Límites & Continuidad

Alexander Holguín Villa [*] [**]
Escuela de Matemáticas - UIS
Bucaramanga - Santander

Cálculo I

2020/1 - 2020/2

Resumen

En esta breve nota presentamos algunas definiciones y propiedades básicas asociadas con los conceptos de *Límite & Continuidad* de funciones, $f : I \to \mathbb{R}$, donde I puede ser algún tipo de intervalo o incluso algún tipo de semi-recta (Capítulo 1), las mismas serán afianzadas con ejemplos diversos.

1. Introducción - Motivación

En esta parte nuestro objetivo es hacer un acercamiento informal al concepto de límite de una función y para ello comenzamos con un ejemplo.

Ejemplo 1.1 (Motivación). *La función* $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$, *entre otras tiene las siguientes características:*

1. *Aunque los ceros del denominador* $q(x) = x^2 - 1$ *son* $x = \pm 1$, *sólo* $x = -1$ *es asíntota vertical, dado que el numerador* $p(x) = x^2 + 2x - 3$ *y el denominador* $q(x)$ *tienen como factor común a* $x - 1$*:*

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \frac{(x+3){\color{red}(x-1)}}{{\color{red}(x-1)}(x+1)} \underbrace{=}_{\textit{vale si } x \neq 1} \frac{x+3}{x+1},$$

   i.e., $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$ *coincide con* $\dfrac{x+3}{x+1}$ *sólo en el caso que* $x \neq 1$ *y así, bajo tal supuesto,* $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2. *Sabemos que la función* $g(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$ *tiene además de la asíntota vertical* $x = -1$, *una asíntota horizontal en* $y = 1$, *comportándose así:*

   a) *Al estar próximos a* -1 *por izquierda,* $g(x)$ *asume valores negativos grandes, mientras que al estar próximos a* -1 *por derecha,* $g(x)$ *asume valores positivos grandes.*

---

[*] **AULA VIRTUAL** - https://tic.uis.edu.co/ava/
[**] **Sitio Web:** http://matematicas.uis.edu.co/aholguin/

b) *Cuando x es un valor grande positivo (negativo), la fracción* $g(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$ *se acerca a* 1 *por encima (por debajo).*

3. *Así las cosas las gráficas de* $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$ *y* $g(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$, *son esencialmente las mismas, excepto que el gráfico de f tiene un hueco en el punto correspondiente a* $x = 1$.

4. *De lo observado en el ítem 1., vemos que no "tiene sentido" evaluar directamente* $f(x)$ *en* $x = 1$, *dado que ello nos produce la expresión indefinida* $0/0$ *(haremos un tratamiento para estas expresiones posteriormente). Sin embargo, podemos evaluar* $f(x)$ *en valores x "muy próximos" de* 1, *tanto por izquierda,* $x < 1$, *como por derecha,* $x>1$. *Más exactamente:*

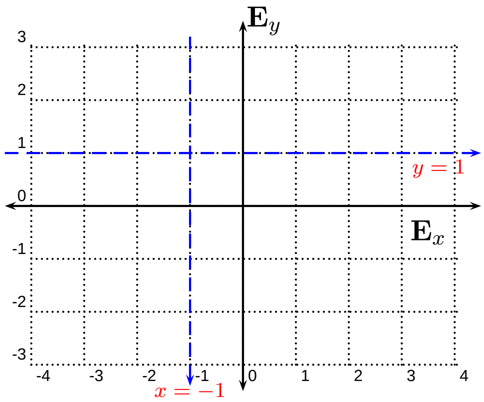
x	$0,9$	$0,99$	$0,999$	$\cdots$
$f(x)$	$2,05$	$2,005$	$2,0005$	$\cdots$

x	$1,01$	$1,001$	$1,0001$	$\cdots$
$f(x)$	$1,99$	$1,999$	$1,9999$	$\cdots$

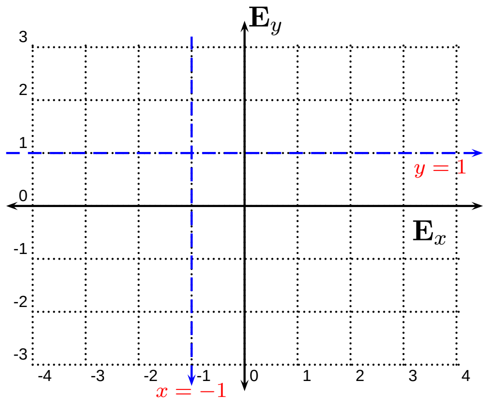
Las tablas anteriores "indican" que cuando x es próximo a 1, *tanto por izquierda como por derecha,* $f(x)$ *es próximo al valor* 2, *que suele decirse así:*

"2 es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1"

Ejercicio 1.1. *Use la información anterior para trazar las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$:*



Gráfica de $y = f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$



Gráfica de $y = g(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$

Informalmente podemos enunciar la siguiente definición:

Definición 1.1 (Límite). *Suponga que L denota un número. El concepto de $f(x)$ que tiende a L a medida que x tiende a un número a puede definirse informalmente así:*

Si $f(x)$ puede hacerse arbitrariamente próximo al número L al tomar x suficientemente cerca de, pero diferente de un número a, por la izquierda y por la derecha de a, entonces el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L.

NOTACIÓN: *Por facilidad suele usarse el símbolo flecha "$\to$" para significar la palabra* **tiende**. *Por tanto:*

1. $x \to a^-$ *indica que x tiende al número a por la izquierda, es decir, "x está muy cercano de a pero x es menor que a,* $x \approx a$, $x < a$.
2. $x \to a^+$ *indica que x tiende al número a por la derecha, es decir, "x está muy cercano de a pero x es mayor que a,* $x \approx a$, $x > a$.
3. $x \to a$ *indica que x tiende al número a por la izquierda y por la derecha, es decir, "x está muy cercano de a pero x es diferente de a,* $x \approx a$, $x \neq a$.

1.1. Límites laterales & bilaterales

1. **Límite por izquierda:** Si los valores de la función $f(x)$ se hacen arbitrariamente próximos a un número L_1 al tomar los valores de x suficientemente cercanos, pero sin que sean iguales a un número a, por la izquierda, se escribe

$$f(x) \to L_1 \text{ cuando } x \to a^- \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = L_1.$$

En este caso se dice que L_1 es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la izquierda.

2. **Límite por derecha:** Escriba (realizando los cambios del caso en **límite por izquierda**) la idea de límite por derecha, que en símbolos es:

$$f(x) \to L_2 \text{ cuando } x \to a^+ \iff \lim_{x \to a^+} f(x) = L_2.$$

Y se dice que L_2 es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la derecha.

3. **Límite bilateral:** Si tanto el límite por la izquierda $\lim_{x \to a^-} f(x)$ como el límite por la derecha $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existen y tienen un **valor común** L, i.e.,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x),$$

entonces se dice que L es el límite $f(x)$ cuando tiende a a y escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

1.2. Existencia o no de límites

Es "pensable" que un límite (lateral o bilateral) puede no existir. Sin embargo, es importante tener presente lo siguiente:

"La existencia de un límite de una función f cuando x tiende a a (lateral o bilateral) no depende de si f está o no definida en a, sino únicamente de si f está definida para x cercanos del número a"

Ejemplos 1.1. *1. Modificando el Ejemplo 1.1 - Motivación, consideremos $f(x)$ dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}, & si\ x \neq 1 \\ 3, & si\ x = 1 \end{cases}.$$

Como vemos f está definida en 1, los límites cuando $x \to 1^{\pm}$ existen y estos últimos son coincidentes. Más exactamente:

$$f(1) = 3 \quad y \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 2 = \lim_{x \to 1^+} f(x),$$

i.e., $\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \neq 3 = f(1)$.

Pregunta 1. *¿En qué se diferencia la gráfica de esta f y la gráfica de la función del Ejemplo - Motivación 1.1? Ilustre gráficamente su idea.*

2. $f(x) = x^2 + 2x - 3$, está definida para todo número real y además verifica:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0 = \lim_{x \to 1^+} f(x), \quad \therefore \quad f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = 0.$$

En general, $f(x) = \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0$, donde $\beta_0, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$; con $\beta_2 \neq 0$, está definida para todo número real a y

$$\lim_{x \to a} f(x) = \beta_2 a^2 + \beta_1 a + \beta_0 = f(a).$$

3. *La función* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *tiene una asíntota vertical en* $x = 0$ *y una asíntota horizontal en* $y = 0$, *i.e., el eje* $\mathbf{E}_x$. *Más exactamente,*

$x \to 0^+$	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$	$\cdots$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	10	10^2	10^3	10^4	$\cdots$

$x \to +\infty$	10	10^2	10^3	10^4	$\cdots$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$	$\cdots$

Así las cosas,
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \quad y \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 \quad (0^+).$$
Como $f(-x) = -f(x)$, *i.e.,* $f(x)$ *es una función impar, entonces*
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \quad y \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0 \quad (0^-).$$
Por tanto, f *no está definida en* $x = 0$ *y además* $\lim_{x\to 0} f(x)$ *no existe.*

4. *Consideremos la función por tramos dada por:*
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}, & si\ x < 1 \\ x+1, & si\ x > 1 \end{cases}. \tag{1}$$
De la expresión (1) es claro que $f(1)$ *no está definida, sin embargo los límites laterales existen. Más exactamente:*
$$\lim_{x\to 1} f(x) : \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = 2, & (x<1) \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x+1) = 2, & (x>1) \end{cases}, \qquad \text{(Ejemplo 1.1 - \textit{Motivación})}$$
i.e.,
$$f(1)\ \textit{no existe, pero} \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2 = \lim_{x\to 1^+} f(x).$$

5. *La gráfica* (**esbozarla**) *de la función por partes dada por:*
$$f(x) = \begin{cases} x+1, & si\ x \le 1 \\ x-2, & si\ x > 1 \end{cases},$$
nos dá indicios que
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2 \ y \ \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1,$$
y así, $\lim_{x\to 1} f(x)$, *no existe.*

6. *Consideremos la función* $f(x) = \sqrt{x-a}$, $a > 0$, *traslación rígida de* a *unidades* **a derecha** *obtenida de* $g(x) = \sqrt{x}$. *Dado que* $\mathcal{D}_f = [a, +\infty)$, *es "***incorrecto***" pensar evaluar a* f *en valores negativos, hecho que se presentaría si* $x \to a^-, x - a < 0$. *Así las cosas, es bastante natural proceder a ver el comportamiento de* $f(x)$ *cuando* $x \to a^+$. *Por tanto,*
$$\lim_{x\to a^-} \sqrt{x-a}\ \textit{no existe y,} \qquad \lim_{x\to a^+} \sqrt{x-a} = 0.$$

7. (**Límites laterales diferentes**) *¿Existe o no el límite* $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$*?*
Es claro que la función no está definida en $x = 0$. *Usando la definición de valor absoluto tenemos:*
$$\lim_{x\to 0} f(x) : \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{-x} = -1, & (x<0) \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1, & (x>0) \end{cases}, \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0} f(x)\ \textit{no existe}.$$

8. (**Un Ejemplo diferente**) *La función* **mayor entero** *o* **parte entera** *denotada por* $f(x) = \lfloor x \rfloor$, *se define como el mayor entero que es menor o igual* (**piso**) *a* x. *De la definición,* $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ *y además tenemos que:*
$$\lfloor 0 \rfloor = \lfloor 0,1 \rfloor = \lfloor 0,9 \rfloor = \lfloor 0,999\cdots 999 \rfloor = 0.$$

Más aún, $\lfloor x \rfloor = 0$, *para* $0 \leq x < 1$. *También es claro que para todo* $n \in \mathbb{Z}$, $\lfloor n \rfloor = n$ *y teniendo en mente la definición,* $\lfloor x \rfloor = n$ *para* $n \leq x < n+1$. *Usando la información anterior no es difícil ver que como* **función por tramos** $\lfloor x \rfloor = n$ *viene dada por:*

$$\lfloor x \rfloor = \begin{cases} \vdots & \\ -2, & si \ -2 \leq x < -1 \\ -1, & si \ -1 \leq x < 0 \\ 0, & si \ 0 \leq x < 1 \\ 1, & si \ 1 \leq x < 2 \\ 2, & si \ 2 \leq x < 3 \\ \vdots & \end{cases}.$$

Así las cosas, el rango de $\lfloor x \rfloor$ *es* $\mathcal{R}_f = \mathbb{Z}$. *Además, para todo* $n \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n-1 \quad y \quad \lim_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to n} \lfloor x \rfloor \text{ no existe.}$$

Ejercicios 1.1. *1. Esboce las distintas gráficas de las funciones asociadas a los Ejemplos 1.1.*

2. Considere la función **menor entero** *denotada por* $f(x) = \lceil x \rceil$, *definida como el* **menor entero** *que es mayor o igual (***techo***) a x. Use las ideas de Ejemplos 1.1(8) para determinar su dominio* $\mathcal{D}_f$, *rango* $\mathcal{R}_f$ *y su expresión como función por tramos. Finalmente determine los límites*

$$\lim_{x \to n^-} \lceil x \rceil, \quad \lim_{x \to n^+} \lceil x \rceil \quad y \quad \lim_{x \to n} \lceil x \rceil.$$

Observación 1. *1. De manera intuitiva el concepto de límite de una función trata del estudio del comportamiento de los valores de la función en cercanías de un número real, el cual no necesariamente pertenece a su dominio.*

2. Cuando se procede a calcular el límite de una función $f(x)$ *en* $x = a$, *pueden presentarse las siguientes posibilidades:*

a) *Que* $f(a)$ *exista,* $\lim_{x \to a} f(x)$ *exista y* $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$.

b) *Que* $f(a)$ *exista,* $\lim_{x \to a} f(x)$ *exista y* $f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$.

c) *Que* $f(a)$ *exista y* $\lim_{x \to a} f(x)$ *no exista.*

d) *Que* $f(a)$ *no exista y* $\lim_{x \to a} f(x)$ *exista.*

e) *Que* $f(a)$ *no exista y* $\lim_{x \to a} f(x)$ *no exista.*

3. Con el objetivo de establecer la existencia del límite de una función y de calcular el mencionado límite, es necesario buscar formas más eficientes de hacerlo...

4. Para que el límite bilateral $\lim_{x \to a} f(x)$ *no exista, en general necesitamos:*

a) *Alguno de los dos límites laterales,* $\lim_{x \to a^-} f(x)$ *o* $\lim_{x \to a^+} f(x)$ *no exista, o*

b) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$ *y* $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$, *con* $L_1 \neq L_2$.

2. Cálculo de Límites

Como ya lo mencionamos en la Observación 1(3), con el objetivo de abordar el problema de la *existencia y el cálculo de límites*, se hace necesario tener a la mano "herramientas" que nos permitan llevarlo a cabo de manera eficiente. Para ello en esta sección introducimos por medio de varios resultados (**Teoremas**) un *enfoque analítico*, usando métodos algebraicos para calcular el valor del límite de una función.

Teoremas 2.1. *(***Reglas o Resultados***)*

*1. (***Dos límites básicos***) Sean c una constante y a un número real. Entonces:*

a) $\lim_{x \to a} c = c$.   b) $\lim_{x \to a} x = a$.

*2. (***Álgebra de límites***) Al formalizar la relación de la operación de límite con nuestro sistema aritmético, se pueden calcular límites de manera más eficiente. Más exactamente:*

Sean f y g funciones, a y c números reales, con a no necesariamente perteneciendo a los dominios $\mathcal{D}_f$ *y* $\mathcal{D}_g$. *Supongamos que tanto* $\lim_{x \to a} f(x)$ *como* $\lim_{x \to a} g(x)$ *existen. Entonces son válidas las siguientes:*

a) $\lim\limits_{x\to a}\big[f(x)\pm g(x)\big]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

b) $\lim\limits_{x\to a}\big[cf(x)\big]=c\lim\limits_{x\to a}f(x)$.

c) $\lim\limits_{x\to a}\big[f(x)\cdot g(x)\big]=\big[\lim\limits_{x\to a}f(x)\big]\big[\lim\limits_{x\to a}g(x)\big]$.

d) $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$.

Note que: *Si en el ítem c) anterior tomamos $g(x)=f(x)$, entonces*

$$\lim_{x\to a}\big[f(x)\big]^2=\lim_{x\to a}\big[f(x)\cdot f(x)\big]=\big[\lim_{x\to a}f(x)\big]\big[\lim_{x\to a}f(x)\big]=\big[\lim_{x\to a}f(x)\big]^2.$$

Por tanto, para $n\in\mathbb{N}$, la "intuición" y el hecho conocido $\big[f(x)\big]^n=\underbrace{f(x)\cdot f(x)\cdots f(x)}_{n\text{-veces}}$, nos indica que:

3. *(***Límite de una potencia***)*

   a) $\lim\limits_{x\to a}\big[f(x)\big]^n=\big[\lim\limits_{x\to a}f(x)\big]^n$.

   b) *Si $f(x)=x$, $\lim\limits_{x\to a}\big[x\big]^n=\big[\lim\limits_{x\to a}x\big]^n=a^n$.*

   Ahora bien, de los ítem 2.b) y 3.b) para todo $n\in\mathbb{N}$, $\alpha_n x^n$ tiene límite y $\lim\limits_{x\to a}\alpha_n x^n=\alpha_n a^n$. Así las cosas y el hecho que un polinomio $p(x)$ de grado $\mathbf{deg}(p)=n$ se escribe

   $$p(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\cdots+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\alpha_nx^n,$$

   entonces:

4. *(***Polinomios & Funciones racionales***) Si $p(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\cdots+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\alpha_nx^n$ y $q(x)=\beta_0+\beta_1x+\beta_2x^2+\cdots+\beta_{m-1}x^{m-1}+\beta_mx^m$, son polinomios de grados $\mathbf{deg}(p)=n$ y $\mathbf{deg}(q)=m$ respectivamente. Entonces:*

   a) $\lim\limits_{x\to a}p(x)=\alpha_0+\alpha_1a+\alpha_2a^2+\cdots+\alpha_{n-1}a^{n-1}+\alpha_na^n=p(a)$.

   b) *Si $\lim\limits_{x\to a}p(x)=L_1$ y $\lim\limits_{x\to a}q(x)=L_2\neq 0$, entonces*

   $$\lim_{x\to a}\left[\frac{p(x)}{q(x)}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to a}p(x)}{\lim\limits_{x\to a}q(x)}=\frac{p(a)}{q(a)}=\frac{L_1}{L_2}.$$

   Como vemos para funciones polinomiales $p(x)$ o racionales $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ tales que a pertenece al dominio de $f(x)$, $a\in\mathcal{D}_f$, i.e., $q(a)\neq 0$, el cálculo del límite cuando $x\to a$ se lleva a cabo por **substitución directa**.

5. *(***Límite de una compuesta***) Sean f y g funciones tales que la función compuesta $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ está definida. Supongamos que,*

   a) *$\lim\limits_{x\to a}g(x)=b$ existe;*

   b) *$\lim\limits_{y\to b}f(y)$ existe con $b\in\mathcal{D}_f$*

   Entonces, $\lim\limits_{x\to a}f(g(x))$ existe y además,

   $$\lim_{x\to a}f(g(x))=f\big(\lim_{x\to a}g(x)\big).$$

   Como una **consecuencia** *directa tenemos:*

6. *(***Límite de la raíz n-ésima***) Sean $n\in\mathbb{N}$ y $a\in\mathbb{R}$*

   a) *Si $\lim\limits_{x\to a}g(x)=b$ existe y este número b pertenece al dominio $\mathcal{D}_f$, con $f(x)=\sqrt[n]{x}$, entonces*

   $$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{g(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}g(x)}.$$

   b) *Si $g(x)=x$, entonces*

   $$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}.$$

Ejemplos 2.1. *1. Determine si existe el $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, donde $f(x)$ es la función por tramos siguiente:*

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2\cos(x)+1, & si\ x<0\\ e^x-4, & si\ x\geq 0\end{cases}.$$

Solución 2.1. *De la definición de f y usando el Teorema 2.1(2)(a)(b), tenemos que:*

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 + 2\cos(x) + 1 = 3 \quad \neq \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} e^x - 4 = -3.$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

2. *Si $h(x) = e^{\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\cdots+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\alpha_n x^n}$, determine:*

   a) $\lim_{x\to a} h(x)$. b) $\lim_{x\to 0} h(x)$.

   Solución 2.2. a) *Considerando $f(x) = e^x$ y $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \alpha_n x^n$, tenemos que:*

   $$(f \circ p)(x) = f(p(x)) = h(x).$$

   Luego del Teorema 2.1(4)(5), $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$ y $\lim_{x\to a} h(x) = f\big(\lim_{x\to a} p(x)\big) = e^{p(a)}$.

   b) *Del ítem anterior con $a = 0$, tenemos que:*

   $$\lim_{x\to 0} p(x) = \alpha_0 \qquad y \qquad \lim_{x\to} h(x) = f\big(\lim_{x\to 0} p(x)\big) = e^{\alpha_0}.$$

3. *(**No existencia de un límite**) Sean f y g funciones tales que $\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \neq 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Entonces, $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$ no existe.*

   Solución 2.3. *Supongamos que la conclusión es **falsa**, i.e., supongamos que $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = L_2$ existe. Así las cosas se tiene que:*

   $$\begin{aligned} L_1 = \lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}\left(g(x)\cdot\frac{f(x)}{g(x)}\right), && (g(x)\neq 0)\\ &= \left(\lim_{x\to a} g(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\right) = 0\cdot L_2 = 0, && (\text{Teorema } 2.1(2)(c)) \end{aligned}$$

   *lo cual es una contradicción con la hipótesis que $L_1 \neq 0$ y así, la conclusión del Teorema es **verdadera**.*

4. *¿Existe el límite $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}$?*

   Solución 2.4. *Notemos que*

   $$\frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x^2+x+1)}{(\sqrt{x}-1)} \underbrace{=}_{vale\ si\ x\neq 1} (\sqrt{x}+1)(x^2+x+1).$$

   Así las cosas y usando el Teorema 2.1(2), se tiene que:

   $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1} \underbrace{=}_{para\ x\neq 1} \big[\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)\big]\big[\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)\big] = 6.$$

Observación 2. *(**Forma indeterminada** $0/0$)*

1. *Como lo hicimos notar en el Ejemplo 1.1(4), la función $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1} \underbrace{=}_{para\ x\neq 1} \dfrac{x+3}{x+1}$ no puede ser evaluada directamente en $x = 1$, dado que ello produce la expresión $0/0$. Algo similar sucede en los Ejemplos 1.1(7) y 2.1(4) con las funciones $\dfrac{x}{|x|}$ y $\dfrac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}$, las cuales no pueden ser evaluadas directamente en 0 y 1 respectivamente. Existen ejemplos diversos de este tipo de **expresiones indeterminadas**, por ejemplo:*

   $$\frac{\sin(x)}{x}, \quad \frac{1-\cos(x)}{x}, \quad \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}, \quad etc.$$

   las cuales no pueden ser evaluadas en 0 y 4 respectivamente.

2. *Usando el concepto de límite se obtienen expresiones del tipo* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$*, donde tanto el numerador* $f(x)$ *como el denominador* $g(x)$ **tienden a cero** *cuando* $x \to a$*, y en cuyo caso se dice que la expresión o límite tiene una* **forma indeterminada** $0/0$.

3. *Como vemos a todas las funciones del ítem (1) les podemos asociar un límite con forma indeterminada* $0/0$*, dados por:*
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1},\quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|},\quad \lim_{x\to 1},\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1},\quad \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\quad y\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}.$$

4. *Podemos asociar a "toda función"* $f(x)$ *un límite con* **forma indeterminada** $0/0$*, límite que constituye la columna vertebral del Cálculo Diferencial, y es dado por:*
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{2}$$
Este límite lo trataremos en el Capítulo 3*, donde como veremos los límites* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}$ *y* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x}$*, son casos particulares de la expresión* (2).

A continuación dos resultados que dan propiedades adicionales de los límites, ambos siendo "intuitivamente claros" y además, aceptando el primero de ellos se puede justificar el segundo, resultado conocido comúnmente como **Teorema de Compresión o Estricción**:

Teoremas 2.2. *Sean* f, g, h *funciones y* $a \in \mathbb{R}$ *no necesariamente perteneciente a sus dominios. Las siguientes son válidas:*

1. *Si* $f(x) \leq g(x)$ *cuando* x *está próximo de* a *(excepto posiblemente en* a*) y los límites de* f *y* g *ambos existen cuando* $x \to a$*, entonces*
$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x).$$

2. *(***Teorema de Compresión***) Si* $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ *cuando* x *está próximo de* a *(excepto posiblemente en* a*) y los límites de* g *y* h *ambos existen y son iguales a* L *cuando* $x \to a$*, entonces*
$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L.$$

En el cálculo de la derivada, concepto que estudiaremos en el próximo capítulo, existen ciertos límites de funciones trigonométricas que son importantes. Además, veremos que las funciones trigonométricas son ejemplo de funciones para los cuales aplica el *Teorema de Compresión.*

Ejemplos 2.2. 1. *(***Dos límites trigonométricos destacados***) Iniciamos con dos resultados, los cuales son importantes en el estudio de la continuidad de funciones trigonométricas.*
$$\lim_{x\to 0}\sin(x) = 0 \qquad y \qquad \lim_{x\to 0}\cos(x) = 1.$$
Para el primer límite, gráficamente (corroborarlo) podemos ver que si $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$*, entonces*
$$-x \leq \sin(x) \leq x \qquad y \qquad \cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}.$$
Ahora bien del Teorema 2.1, $\lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} x$*. Por tanto del Teorema 2.2 (Estricción), sigue que*
$$\lim_{x\to 0}\sin(x) = 0 \quad \text{y así} \quad \lim_{x\to 0}(1-\sin^2(x)) = 1 > 0.$$
Por tanto del Teorema 2.1(6) (**raíz n-ésima**) *sigue que*
$$\lim_{x\to 0}\cos(x) = \lim_{x\to 0}\sqrt{1-\sin^2(x)} = \sqrt{\lim_{x\to 0}(1-\sin^2(x))} = 1.$$

2. *Establezca que:*
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad y \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = 0.$$
Recordemos que al trabajar con las funciones trigonométricas $\sin(x), \cos(x), \tan(x)$*, etc., se debe tener presente que la variable* x *es un número real o un ángulo medido en radianes. Teniendo ello en mente, obtenemos numéricamente que la función* $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ *tiene el siguiente comportamiento cuando* $x \to 0^+$*:*

$x \to 0^+$	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$	$\cdots$
$f(x) = \sin(x)$	$0,99833416$	$0,99998333$	$0,99999983$	$0,99999999$	$\cdots$

Dado que $f(x)$ es una función par, $f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{-\sin(x)}{-x} = f(x)$, entonces es claro que si $x \to 0^-$, se obtendran los mismos resultados de la tabla de valores anterior. Así las cosas, tales valores "indican-sugieren" que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.
Otra forma de establecerlo es notar que si $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, entonces:

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)}.$$

Del ítem anterior y el Teorema 2.1(2), tenemos que

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)}.$$

El resultado sigue del Teorema de Estricción.
Para el segundo límite, notemos que si $x \to 0$ entonces $1+\cos(x) \neq 0$ y así,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x}\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x(1+\cos(x))} = 0,$$

dado que $\dfrac{\sin^2(x)}{x(1+\cos(x))} = \dfrac{\sin(x)}{x}\dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ y $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = 0$.

3. *Determine el valor de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$.*

   Usando los dos límites anteriores y el hecho que $\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \dfrac{\frac{1-\cos(x)}{x}}{\frac{\sin(x)}{x}}$, tenemos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\frac{1-\cos(x)}{x}}{\frac{\sin(x)}{x}} \right) = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}} = \frac{0}{1} = 0.$$

4. *Determine el valor de los límites:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{\sin(6x)} \quad y \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan(8x)}{\tan(4x)}.$$

   En efecto, para $x \neq 0$ tenemos:

$$\frac{\sin(4x)}{\sin(6x)} = \frac{4\frac{\sin(4x)}{4x}}{6\frac{\sin(6x)}{6x}} = \frac{2}{3}\frac{\frac{\sin(4x)}{4x}}{\frac{\sin(6x)}{6x}}.$$

   Ahora bien si $x \to 0$, entonces $4x \to 0$ y $6x \to 0$. Por tanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{\sin(6x)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{3}\frac{\frac{\sin(4x)}{4x}}{\frac{\sin(6x)}{6x}} \right) = \frac{2}{3} \frac{\lim\limits_{4x\to 0} \frac{\sin(4x)}{4x}}{\lim\limits_{6x\to 0} \frac{\sin(6x)}{6x}} = \frac{2}{3}.$$

   De otro lado,

$$\frac{\tan(8x)}{\tan(4x)} = \frac{\frac{\sin(8x)}{\cos(8x)}}{\frac{\sin(4x)}{\cos(4x)}} = \frac{8\frac{\sin(8x)}{8x}\frac{1}{\cos(8x)}}{4\frac{\sin(4x)}{4x}\frac{1}{\cos(4x)}} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ 8x\to 0\\ 4x\to 0}]{} \frac{8\cdot 1\cdot 1}{4\cdot 1\cdot 1} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan(8x)}{\tan(4x)} = 2.$$

5. *Establezca que*

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}e^{\sin(\pi/x)} = 0.$$

   En efecto, dado que $-1 \leq \sin(\pi/x) \leq 1$, entonces $e^{-1} \leq e^{\sin(\pi/x)} \leq e$. Ahora bien como $x \to 0^+$, entonces $\sqrt{x}$ está definido y al multiplicar la última desigualdad por $\sqrt{x}$, obtenemos que:

$$e^{-1}\sqrt{x} \leq \sqrt{x}e^{\sin(\pi/x)} \leq e\sqrt{x}, \quad \textit{luego} \quad \sqrt{x}e^{\sin(\pi/x)} \longrightarrow 0, \quad \textit{dado que} \quad \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0.$$

6. (Cuidado: **Límite de un producto** $\cdots$)

   a) *Determine el valor* $\lim_{x\to 0}(x\cot(x))$.

   Dado que no sabemos el valor $\lim_{x\to 0}\cot(x)$, *no podemos usar el Teorema 2.1(2)(c), (límite de un producto* $\cdots$*). La verdad al apoyarnos de la gráfica de* $y=\cot(x)=\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$, *vemos que* $\lim_{x\to 0}\cot(x)$ *no existe. Más exactamente:*

   $$\lim_{x\to 0^-}\cot(x)=-\infty \quad y \quad \lim_{x\to 0^+}\cot(x)=+\infty.$$

   Sin embargo usando los resultados: $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1=\lim_{x\to 0}\cos(x)$, *tenemos:*

   $$\lim_{x\to 0}(x\cot(x))=\lim_{x\to 0}\left(x\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)=\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)}\right)\left(\lim_{x\to 0}\cos(x)\right)=1\cdot 1=1.$$

   b) *Determine el valor de*

   $$\lim_{x\to 0}\left[x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

   Sabemos que los valores de la función $y=\cos(w)$ *oscilan entre* -1 *y* 1. *Ahora bien, si* $x\to 0^+$ (0^-), *entonces* $\dfrac{1}{x}\to\pm\infty$, *por tanto en "cercanías" de* 0 *la función* $y=\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *oscila hacia atrás y hacia adelante entre* -1 *y* 1, *siendo estas oscilaciones más rápidas cuanto más cerca esté* x *de* 0. *En otras palabras,* $\lim_{x\to 0}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *no existe. Sin embargo,* $-1\leq\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq 1$ *y así,*

   $$-x^2\leq x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\leq x^2, \quad \therefore \quad x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\longrightarrow\quad 0, \quad \textit{dado que} \quad \lim_{x\to 0}\left(\pm x^2\right)=0.$$

2.1. Límites infinitos & Límites en el infinito

En esta subsección trataremos funciones $y=f(x)$ tales que:

1. f tiene un comportamiento "**no-acotado**", i.e., sus valores crecen o decrecen sin límite, cuando la variable independiente x se aproxima a un número fijo a: *Límites infinitos.*
2. f se aproxima a un valor finito L cuando x crece (o decrece) sin límite, i.e., $x\to\pm\infty$: *Límites en el infinito.*

Ambos tipos de límites tienen interpretaciones geométricas, más exactamente ellos están relacionados con los conceptos de **asíntota vertical** y **asíntota horizontal**, respectivamente, de la gráfica $\mathcal{G}_f$ de la función $y=f(x)$, dado que estos conceptos se definen en términos de límites que implican el concepto de infinito.

Definición 2.1. (**Límites infinitos**) *Sean* $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ *y* $a\in\mathbb{R}$ *no necesariamente en el* $\mathcal{D}_f$. *Entonces,*

$$\lim_{x\to a}g(x)\neq 0,\ \lim_{x\to a}h(x)=0 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)}\ \textit{no-existe}\ ,\quad \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)}=\pm\infty.$$

Similarmente, si $\lim_{x\to a^\pm}g(x)\neq 0$ *y* $\lim_{x\to a^\pm}h(x)=0$, *entonces* $\lim_{x\to a^\pm}\dfrac{g(x)}{h(x)}$ *no-existe, i.e.,* $\lim_{x\to a^\pm}\dfrac{g(x)}{h(x)}=\pm\infty$.

Notación: *Al usar el símbolo "$\to$" expresamos simbólicamente así:*

1. $$f(x)\to\pm\infty \quad \textit{cuando} \quad x\to a \quad \Leftrightarrow \lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty.$$
2. $$f(x)\to\pm\infty \quad \textit{cuando} \quad x\to a^- \quad \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty.$$
3. $$f(x)\to\pm\infty \quad \textit{cuando} \quad x\to a^+ \quad \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty.$$

Definición 2.2. **(Asíntota vertical)** *Se dice que la recta $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de la función f si se dá al menos uno de los siguientes límites:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty.$$

Ejemplos 2.3. 1. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1} \underbrace{=}_{si\ x\neq 1} \lim_{x\to -1} \frac{x+3}{x+1} = \pm\infty$, *i.e., $x = -1$ es una asíntota vertical para la gráfica de $f(x)$.*

2. *Como* $\displaystyle\lim_{x\to \pm\pi/2} \tan(x) = \pm\infty$, *entonces* $x = \pm\dfrac{\pi}{2}$ *son asíntotas verticales para la gráfica de* $\tan(x)$.

3. *Sabemos que* $\displaystyle\lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty$ *y así el* $\mathbf{E}_y$, $x = 0$, *es asíntota vertical para* $\dfrac{1}{x}$. *En general,* $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ *tiene a* $x = 0$ *como asíntota vertical. Más exactamente:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n} : \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty, & (n \text{ par }) \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{x^n} = \pm\infty, & (n \text{ impar }) \end{cases}.$$

4. *Para* $f(x) = \ln(x)$ *se tiene que* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ *y así,* $\mathbf{E}_y$ *es asíntota vertical para* $\ln(x)$.

5. *Considere las funciones* $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ *y* $g(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$. *Determine los límites:*

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} \quad y \quad \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}.$$

   a) *Dado que* $x \to 2^+$, $x - 2 > 0$ *y así* $x - 2 = \sqrt{(x-2)^2}$. *Luego*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} &= \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{\sqrt{(x-2)^2}} \\ &= \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{(x+2)(x-2)}}{\sqrt{(x-2)(x-2)}} \\ &= \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}. \end{aligned}$$

   Como $x > 2$, *entonces el denominador* $\sqrt{x-2} \to 0^+$ *y así* $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} = +\infty$.

   b) *Análogamente y teniendo presente que si* $x \to 2^-$, *entonces* $x - 2 = -(2-x) = -\sqrt{(2-x)^2}$, *obtenemos:*

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{-\sqrt{(2-x)^2}} = \cdots = -\infty.$$

6. *Considere la función* $h(x) = \dfrac{\lfloor x\rfloor - 4}{x-4}$, *determine el* $\displaystyle\lim_{x\to 4^-} h(x)$.
   Como $\displaystyle\lim_{x\to 4^-} \lfloor x\rfloor = 3$, *entonces* $\displaystyle\lim_{x\to 4^-} \big(\lfloor x\rfloor - 4\big) = -1$. *Ahora bien, dado que* $x \to 4^-$, *entonces* $x-4 \to 0^-$. *Consequentemente,*

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{\lfloor x\rfloor - 4}{x-4} = -\infty.$$

   Pregunta 2. *¿Qué puede decirse de los límites*

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{\lfloor x\rfloor - 4}{x-4} \quad y \quad \lim_{x\to 4^\pm} \frac{\lceil x\rceil - 4}{x-4}?$$

   Recuerde que $\lceil x\rceil$ *denota la función* **menor entero** *mayor o igual a* x, *ver Ejercicio 1.1(2).*

7. *Considere la función racional* $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2(x+4)}$. *Establezca que* f *tiene* **asíntotas verticales** *en* $a = 0, -4$, *i.e., el* $\displaystyle\lim_{x\to a^\pm} f(x) = \pm\infty$.

En efecto, notemos que:

$$\lim_{x\to a}(x+2)=a+2\neq 0 \quad y \quad \lim_{x\to a}x^2(x+4)=a^2(a+4)=0.$$

Más exactamente tenemos el siguiente análisis:

$$x\to -4^- \Longrightarrow \begin{cases} x+2\to -2, \\ x^2(x+4)\to 0^-, \quad (x+4<0) \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to -4^-}\frac{x+2}{x^2(x+4)}=+\infty,$$

$$x\to -4^+ \Longrightarrow \begin{cases} x+2\to -2, \\ x^2(x+4)\to 0^+, \quad (x+4>0) \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to -4^-}\frac{x+2}{x^2(x+4)}=-\infty,$$

$$x\to 0^- \Longrightarrow \begin{cases} x+2\to 2, \\ x^2(x+4)\to 0^+, \quad (x+4>0) \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{x+2}{x^2(x+4)}=+\infty,$$

$$x\to 0^+ \Longrightarrow \begin{cases} x+2\to 2, \\ x^2(x+4)\to 0^+, \quad (x+4>0) \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{x+2}{x^2(x+4)}=+\infty.$$

Definición 2.3. 1. (**Límites en el infinito**) *Si los valores $f(x)$ de una función tienden a un valor constante L ($f(x)\to L$) cuando x crece o decrece sin límite ($x\to\pm\infty$), entonces se escribe, respectivamente,*

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=L \quad o \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=L,$$

y se dice que f posee un **límite en el infinito**. *Las posibilidades para límites en el infinito $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ y $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ son las siguientes:*

a) *Uno de los límites, $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ o $\lim_{x\to+\infty}f(x)$, existe pero el otro no.*

b) *Los límites $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ y $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ existen y son iguales.*

c) *Los límites $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ y $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ existen y son distintos.*

d) *Ninguno de $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ y $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ existen.*

Nota: *Si por lo menos uno de los límites existe, por ejemplo, $\lim_{x\to-\infty}f(x)$, entonces la gráfica de f puede hacerse arbitrariamente próxima a la recta $y=L$ cuando x crece en la dirección negativa.*

2. (**Asíntota horizontal**) *Se dice que la recta $y=L$ es una asíntota horizontal para la gráfica de la función f si se dá al menos uno de los siguientes límites:*

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=L \quad o \quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=L.$$

Observación 3. 1. (**Límites infinitos**) *Como lo muestran los Ejemplos 2.3, excepto el 4, al considerar una función cociente $\dfrac{g(x)}{h(x)}$ y $a\in\mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to a}g(x)=L\neq 0$ y $\lim_{x\to a}h(x)=0$, se presentan las siguientes posibilidades:*

a) *Si $L>0$ y $h(x)\to 0^+$, entonces $\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)}{h(x)}=+\infty$.*

b) *Si $L>0$ y $h(x)\to 0^-$, entonces $\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)}{h(x)}=-\infty$.*

c) *Si $L<0$ y $h(x)\to 0^+$, entonces $\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)}{h(x)}=-\infty$.*

d) *Si $L<0$ y $h(x)\to 0^-$, entonces $\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)}{h(x)}=+\infty$.*

Como también lo vimos en los Ejemplos 2.3, los resultados anteriores permanecen válidos si se sustituye "$x\to a$" por "$x\to a^{\pm}$".

2. (**Otros límites infinitos**) *Dado que los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ no son números reales, los resultados en el Teorema 2.1(2)(a)(c), no se cumplen para "límites infinitos". Sin embargo, dichos límites tienen las siguientes propiedades:*

a*) Si* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ *(o* $-\infty$*) y* $\lim_{x\to a} g(x) = L$*, entonces* $\lim_{x\to a} \big[f(x) + g(x)\big] = +\infty$ *(*$-\infty$*).*

b*) Suponga que* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ *(o* $-\infty$*) y* $\lim_{x\to a} g(x) = L \neq 0$*. Las siguientes afirmaciones son válidas:*

i) Si $L > 0$*:* $\lim_{x\to a} \big[f(x)\cdot g(x)\big] = +\infty$ *(*$-\infty$*).* *ii) Si* $L < 0$*:* $\lim_{x\to a} \big[f(x)\cdot g(x)\big] = -\infty$ *(*$+\infty$*).*

*3. (***Límites en el infinito & Cociente de funciones***) Al considerar límites en el infinito de la forma*

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{g(x)}{h(x)} \quad o \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{h(x)},$$

pueden presentarse las posibilidades: $\dfrac{L}{\pm\infty}$, $\dfrac{\pm\infty}{L}$ *ó* $\dfrac{L}{0}$*, con* $L \neq 0$ *un número real. También son posibles las indeterminaciones* $\dfrac{-\infty}{\pm\infty}$ *o* $\dfrac{+\infty}{\pm\infty}$*. Aunque en todos estos casos no aplica la* **regla del cociente** *de límites en el infinito, ello no quiere decir que algunos de estos límites no existan. De hecho, para las tres primeras opciones de estos límites en el infinito se tienen los siguientes resultados:*

Teorema 2.1. *Consideremos la función cociente* $\dfrac{g(x)}{h(x)}$*. Las siguientes afirmaciones son válidas:*

a*) Si* $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = L \neq 0$ *y* $\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = \pm\infty$*, entonces* $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{g(x)}{h(x)} = 0$*.*

b*) Si* $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$ *y* $\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = L \neq 0$*, entonces* $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{g(x)}{h(x)} = \pm\infty$*.*

c*) Si* $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = L \neq 0$ *y* $\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = 0$*, entonces* $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{g(x)}{h(x)} = \pm\infty$*.*

*4. (***Formas indeterminadas***) Cuando alguno de los límites en el infinito*

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{g(x)}{h(x)} \quad o \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{h(x)},$$

tenga una de las formas $\dfrac{-\infty}{\pm\infty}$ *o* $\dfrac{+\infty}{\pm\infty}$*, se dice que el límite en cuestión es una* **forma indeterminada***. Este tipo forma indeterminada será tratada usando la conocida Regla de L'Hôpital.*

*5. (***Otras formas indeterminadas***) Algunos límites en el infinito involucran funciones del tipo* $\dfrac{g(x)}{h(x)}$*, donde* $g(x)$ *o* $h(x)$ *pueden o no ser polinomios.*

Ejemplo 2.1. a*) Calcule el* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}$*.*

Dado que el mayor exponente de x *es 2 y se encuentra "bajo el signo radical", se dividen numerador y denominador por* $\sqrt{x^2} = |x|$*, i.e.,*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{3x+4}{\sqrt{x^2}}}{\dfrac{\sqrt{2x^2-5}}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{3x+4}{|x|}}{\sqrt{2-\dfrac{5}{x^2}}}.$$

Dado que $x \to +\infty$*,* $x > 0$*, y así* $|x| = x$*. Luego se tiene que*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{3x+4}{x}}{\sqrt{2-\dfrac{5}{x^2}}} = \frac{\lim_{x\to+\infty}\left(3+\dfrac{4}{x}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2-\dfrac{5}{x^2}}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Pregunta 3. *¿Qué puede decirse del*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}?$$

Justifique su **respuesta***.*

Ejercicios 2.1. *1. Las propiedades algebraicas de los límites dadas en el Teorema 2.1(1)(2)(5)(6) se cumplen al sustituir a por $-\infty$ o $+\infty$ en el supuesto que los límites existan. Enuncie dichos resultados para el caso $x \to -\infty$ y $x \to -\infty$.*

*2. (**Comportamiento final**) Como lo analizamos en la Sección 1.3 (Libro) la forma en que una función se comporta cuando $|x|$ es muy grande se denomina **comportamiento final**. Además, si el límite en el infinito, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ se tiene, la gráfica $\mathcal{G}_f$ de f puede hacerse arbitrariamente próxima a L para valores grandes de x. En otras palabras, la gráfica de una función polinomial,*

$$f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

se asemeja a la gráfica de $y = \alpha_n x^n$ para $|x|$ muy grande, i.e., los términos $\alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$, son irrelevantes y lo simbolizamos por

$$f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \underbrace{\sim}_{|x|\to+\infty} y = \alpha_n x^n.$$

Use la anterior descripción y los Ejemplos $8-9$, pág. 100 del Libro*, para determinar los límites:*

a)
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{6}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right), \qquad \lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\frac{2x-1}{7-16x}}.$$

b) *Determine si existen los límites:*

$$\lim_{x\to-\infty}\sin\left(\frac{\pi x}{3-6x}\right), \qquad \lim_{x\to-\infty}\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{4x^2+1}}\right).$$

3. Encuentre $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ para la función f indicada:

a) $\dfrac{2x+1}{\sqrt{3x^2+1}}$.

b) $\dfrac{|x-5|}{x-5}$.

c) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

d) $1 + \dfrac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Referencias

1. Carrillo Escobar J. C., *Notas de Clase Cálculo I.* Universidad Industrial de Santander.
2. Leithold L. B., *El Cálculo, 7^a Ed.*. OXFORD Universityy Press, México, (1994).
3. Mejía Guzmán D. A., *Notas de Clase Introducción al Cálculo.* Universidad de Antioquia (2006).
4. Zill D. G. & Wright W. S., *Cálculo Trascendentes Tempranas, 4^a Ed.*. McGraW-Hill/Interamericana Editores S.A, México D.F (2011).