Números reales & desigualdades

Alexander Holguín Villa [*] [**]
Escuela de Matemáticas - UIS
Bucaramanga - Santander
Cálculo I

2020/1 - 2020/2

Resumen

En esta breve nota presentamos algunas definiciones y propiedades básicas de los números reales $\mathbb{R}$, las cuales son de interés en el estudio del Cálculo.

1. Introducción

Al parecer el conjunto de los números naturales surge por la imperativa necesidad de contar o enumerar en las diversas civilizaciones. De manera informal podemos decir que los números naturales son aquellos que sirven para designar la cantidad de elementos que tiene un conjunto finito. Cabe destacar que antes de que surgieran los números naturales para la representación de cantidades, las personas usaban otros métodos para contar, por ejemplo usaban objetos como piedras, palitos de madera, nudos de cuerdas, o simplemente los dedos (sistema de numeración unario). Posteriormente comenzaron a aparecer los símbolos gráficos como señales para contar, entre las que se destacan las marcas en una vara o simplemente trazos específicos sobre la arena (hueso de Ishango). Pero fueron los Mesopotámicos alrededor del año 400 a. C. quienes mostraron los primeros vestigios de los números que consistieron en grabados de señales en forma de cuñas sobre pequeños tableros de arcilla empleando para ello un palito aguzado (escritura cuneiforme). Este sistema de numeración fue adoptado más tarde, aunque con símbolos gráficos diferentes, en la Grecia y Roma antiguas, quienes emplearon respectivamente letras de su alfabeto y letras con algunos símbolos adicionales.

Fue el matemático alemán Richard Dedekind, 1831-1916, en el siglo XIX quien colocó al conjunto de los números naturales sobre lo que comenzaba a ser una base sólida. Dedekind los derivó de una serie de postulados (lo que implicaba que la existencia del conjunto de números naturales se daba por cierta), que después precisó Giuseppe Peano, 1858-1932, precisión que le permitió idearse los famosos cinco axiomas o postulados que llevan su nombre.

El conjunto de los números naturales se denota por $\mathbb{N}$ y se escribe por extensión así:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, \}.$$

Ahora bien, debido a la imposibilidad de dar respuesta a algunas necesidades matemáticas usando solo los números naturales surgen los números enteros $\mathbb{Z}$, denotados así

[*] **AULA VIRTUAL** - https://tic.uis.edu.co/ava/
[**] **Sitio Web:** http://matematicas.uis.edu.co/aholguin/

debido a que la palabra alemana para números es *Zahlen.* Este conjunto numérico consta de los números naturales y sus inversos aditivos, es decir,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \}.$$

Podemos decir entonces que los números enteros extienden la utilidad de los números naturales para contar cosas, por ejemplo se pueden utilizar para contabilizar pérdidas. Además ciertas magnitudes como la temperatura o la altura usan valores por debajo del cero.

Se sabe que los egipcios calculaban la resolución de problemas prácticos utilizando fracciones cuyos denominadores son enteros positivos; estos son los primeros números racionales utilizados para representar las "partes de un entero", por medio del concepto de recíproco de un número entero.

Los matemáticos de la Grecia antigua consideraban que dos magnitudes eran conmensurables si era posible encontrar una tercera tal que las dos primeras fueran múltiplos de la última, es decir, era posible encontrar una *unidad* común para la que las dos magnitudes tuvieran una medida entera. El principio pitagórico de que todo número es un cociente de enteros, expresaba en esta forma que cualesquiera dos magnitudes deben ser conmensurables, luego números racionales.

Etimológicamente, el hecho de que estos números se llamen racionales corresponde a que son la razón de dos números enteros, palabra cuya raíz proviene del latín *ratio*, y esta a su vez del griego $\lambda o\gamma o\varsigma$ (razón), que es como llamaban los matemáticos de la Grecia antigua a estos números. La notación $\mathbb{Q}$ empleada para nombrar el conjunto de los números racionales proviene de la palabra italiana *quoziente*, derivada del trabajo de Giuseppe Peano en 1895. El conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ consiste de todas las expresiones $\frac{m}{n}$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$ con $n \neq 0$, es decir, conjuntistamente

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

Dado que $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, \underbrace{0, 1, 2, 3, \dots,}_{\mathbb{N}}\}$, es claro que $\mathbb{N}$ está contenido en $\mathbb{Z}$, es decir, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ y como para $m \in \mathbb{Z}$, se tiene que $m = \frac{m}{1}$, entonces

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

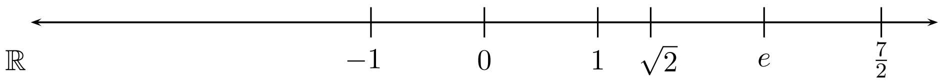
Ahora bien es sabido que diversos problemas relacionados con geometría dieron origen a nuevos números cuyas magnitudes son inconmensurables, es decir, no admiten representación racional. Se atribuye a Hípaso de Metaponto, 500 a. C., perteneciente a un grupo de matemáticos pitagóricos de la existencia de segmentos de recta inconmensurables con respecto a un segmento que se toma como unidad en un sistema de medición, dado que existen segmentos de recta cuya longitud medida en este sistema no es una fracción. Por ejemplo, en un cuadrado, la diagonal de este es inconmensurable con respecto a sus lados. Lo anterior convulsionó el mundo científico antiguo, provocando una ruptura entre la geometría y la aritmética de aquella época, dado que esta última, por entonces, se sustentaba en la teoría de la proporcionalidad, la cual solo se aplica a magnitudes conmensurables.

Tres números irracionales bastante conocidos y sus "expansiones decimales" son

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623\dots; \quad \pi = 3{,}1415926535\dots; \quad e = 2{,}7182818284\dots$$

Para los números *irracionales* no existe una notación universal para designarlos, aunque en general se acepta $\mathbb{I}$. Las razones son que el conjunto de *números irracionales* no constituye alguna estructura algebraica, como sí lo son los naturales $\mathbb{N}$, los enteros $\mathbb{Z}$, los racionales $\mathbb{Q}$, los reales $\mathbb{R}$ y los complejos $\mathbb{C}$, por un lado, y que la $\mathbb{I}$ es tan apropiada para designar al conjunto de números irracionales como al conjunto de números imaginarios, lo cual puede crear confusión.

Intuitivamente podemos pensar que los números irracionales son los elementos que *cubren los vacíos o huecos* que dejan los números racionales. Al considerar la unión de los conjuntos numéricos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$, obtenemos los números reales $\mathbb{R}$, los cuales representamos por medio de la recta numérica



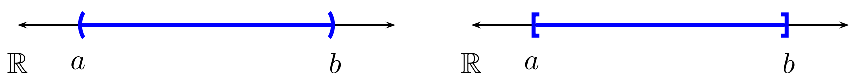
2. Intervalos abiertos, cerrados y semi-abiertos - Semi-rectas

Dados a y b números reales con $a < b$, definimos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

Definición 2.1 (Intervalo abierto & cerrado). *El intervalo abierto (cerrado) determinado por a y b, (a, b) ($[a, b]$), es el conjunto de números reales entre a y b que excluyen (incluyen) tanto a como a b, es decir:*

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \qquad \Big([a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}\Big).$$

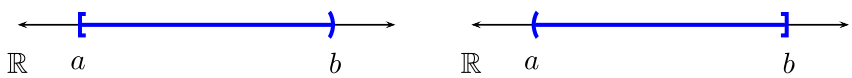
que representamos gráficamente por



Observación 1. *Si en la definición anterior uno de los extremos a o b es incluido, el intervalo se llama semi-abierto en b (respectivamente en a), es decir:*

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \quad \Big((a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}\Big).$$

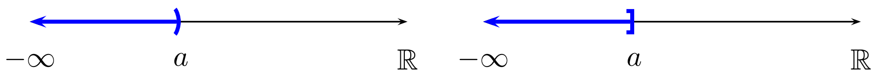
Estos intervalos los representamos gráficamente por:



Definición 2.2 (Semi-recta abierta & cerrada). *Si $a \in \mathbb{R}$, la semi-recta abierta (cerrada) a izquierda determinada por a, es el conjunto de números reales x menores (menores o iguales) que a, es decir:*

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \qquad \Big((-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}\Big),$$

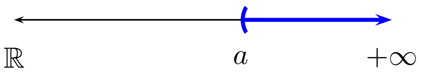
que representamos gráficamente por

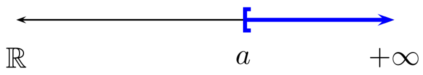


Observación 2. 1. *Para $a \in \mathbb{R}$, se define de manera análoga la semi-recta abierta (cerrada) a derecha determinada por a, es decir, $(a, +\infty)$ ($[a, +\infty)$) es el conjunto de números reales x mayores (mayores o iguales) que a, que simbólicamente es,*

$$(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}:x>a\},\qquad \Big([a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}:x\geq a\}\Big),$$

y gráficamente:





2. *Los símbolos $-\infty$ y $+\infty$ de la definición y observación anteriores no son números reales y son por convención, símbolos que indican respectivamente "cantidades" grandes negativas y positivas.*

3. *Notemos que para $a\in\mathbb{R}$, la recta real $\mathbb{R}$ puede representarse por*

$$\mathbb{R}=(-\infty,a)\cup[a,+\infty)=(-\infty,a]\cup(a,+\infty),$$

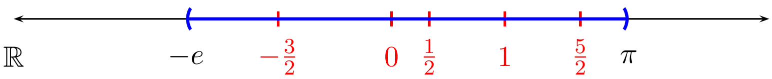
que gráficamente es

4. *Si $a,b\in\mathbb{R}$, ellos pueden compararse, es decir, pasa una y solo una de las siguientes:*

$$a<b,\quad a=b\quad \text{ó}\quad a>b.$$

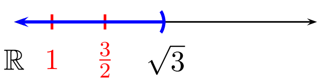
Así las cosas, el orden sobre la recta real $\mathbb{R}$, puede ser heredada a los números racionales $\mathbb{Q}$, propiedad que nos permite considerar únicamente los racionales presentes en un cierto intervalo, por ejemplo en $(-e,\pi)$, lo cual se obtiene así:

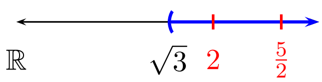
$(-e,\pi)\cap\mathbb{Q}:$



También es posible pensar en el conjunto de números racionales menores o mayores que cierto irracional. Por ejemplo:

$(-\infty,\sqrt{3})\cap\mathbb{Q}:$





$:(\sqrt{3},+\infty)\cap\mathbb{Q}$

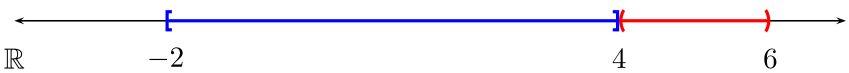
Ejemplos 2.1. 1. *Los números reales -1 y 2 no están en el intervalo $I=\big[-\frac{1}{2},2\big)$, (no pertenecen a I, $-1,2\notin I$). Por otro lado, $0,\frac{3}{2}\in I$.*

Ejercicio: *Ilustre gráficamente lo anterior.*

2. *Para los intervalos $[-2,4]$, $(0,5]$ y $(4,6)$, tenemos:*

   a) *$[-2,4]$ y $(4,6)$ no tienen elementos en común, en otras palabras estos intervalos tienen intersección vacía, es decir,*

$[-2,4]\cap(4,6)=\emptyset:$



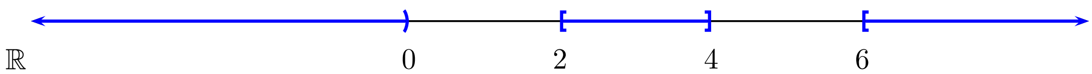
b) *Ahora bien, los intervalos* $[-2,4]$ *y* $(0,5]$ *tienen "muchísimos" elementos en común.*

Ejercicio: *Ilustre gráficamente esta situación.*

c) *Al "quitarle" a la recta real* $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ *la unión de los intervalos* $[0,2)$ *y* $(4,6)$*, es decir,* $\mathbb{R} \setminus \{[0,2) \cup (4,6)\}$*, obtenemos:*

$$\mathbb{R} \setminus \{[0,2) \cup (4,6)\} = (-\infty, 0) \cup [2,4] \cup [6, +\infty),$$

que geométricamente representamos por:



3. Valor absoluto

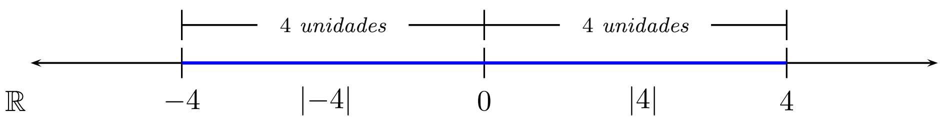
A continuación introducimos un concepto bastante relevante no solo en Cálculo, sino también en ciencias afines como la Física, donde aparece en las nociones de *magnitud, distancia y norma.* Intuitivamente el *valor absoluto* de un número real x cualquiera es la distancia de tal número al origen de la recta $\mathbb{R}$. En otras palabras, el valor absoluto del número real x es su valor numérico sin el respectivo signo, sin importar que sea positivo o negativo. Matemáticamente se tiene:

Definición 3.1 (Valor absoluto). *Si* x *es un número real, entonces el valor absoluto de* x*, denotado por* $|x|$*, se define por*

$$|x| = \begin{cases} -x & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ x & si\ x > 0 \end{cases}, \quad equivalentemente, \ |x| = \begin{cases} -x & si\ x < 0 \\ x & si\ x \geq 0 \end{cases}.$$

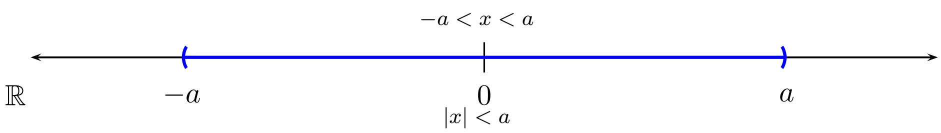
Observación 3.

1. *Como ya lo indicamos antes de la definición anterior, geométricamente* $|x|$ *representa la distancia de* x *al origen* $\mathrm{d}(x, 0)$*, en particular con* $x = 4$*, tenemos:*



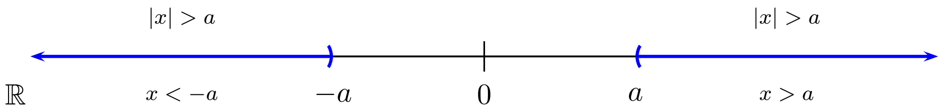
2. *De la definición y la ilustración anterior es claro que* $|x| = |-x|$*, que refleja la propiedad de simetría que tiene el valor absoluto.*

3. *Si* $a > 0$*, entonces de la definición de valor absoluto y la siguiente ilustración se tiene que* $|x| < a$*, corresponde sobre la recta real* $\mathbb{R}$ *con la distancia de* x *al origen menor a* a *unidades, es decir,*



En otras palabras, para $a > 0$ *siempre que se tenga la desigualdad en valor absoluto* $|x| < a$*, se transforma en la desigualdad conjunta* $-a < x < a$.

4. *De manera análoga, para $a > 0$ y teniendo presente el concepto de semi-recta abierta a izquierda (o derecha) de a, la desigualdad $|x| > a$ se transforma en $x > a$ ó $x < -a$, que geométricamente se respresenta por*



5. *Recordemos que si $a > 0$, su raíz positiva $\sqrt{a}$, se define como el único número real $x > 0$ tal que $x^2 = a$. Así las cosas, es claro de la definición que $\sqrt{x^2} = |x|$. Por el momento no estamos interesados en raíces cuadradas de números negativos.*

A continuación enunciamos otras propiedades del valor absoluto.

Proposición 3.1. *Sean x, y números reales. Entonces el valor absoluto verifica:*

1. **Definido positivo:** $|x| \geq 0$ *y además,* $|x| = 0$ *solo si* $x = 0$.
2. **Multiplicativo:** $|xy| = |x|\,|y|$ *y si* $y \neq 0$*, entonces* $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.
3. **Cuadrado positivo:** $|x|^2 = x^2$.
4. **Desigualdad triangular:** $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Observación 4. 1. *Note que la propiedad* 1.) *es clara de la definición. Ahora del ítem* 5 *de la Observación anterior* $\sqrt{x^2} = |x|$ *y así elevando al cuadrado,* $|x|^2 = x^2$.

Usemos esto último para justificar la Desigualdad triangular:

$$\begin{aligned}
|x+y|^2 &= (x+y)^2 \\
&= x^2 + 2xy + y^2 \\
&= |x|^2 + 2xy + |y|^2 \\
&\leq |x|^2 + 2\,|xy| + |y|^2 && (xy \leq |xy|) \\
&= (|x| + |y|)^2.
\end{aligned}$$

Por tanto, $|x+y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$ *y al extraer raíz cuadarada* $|x+y| \leq |x| + |y|$*, como se requería.*

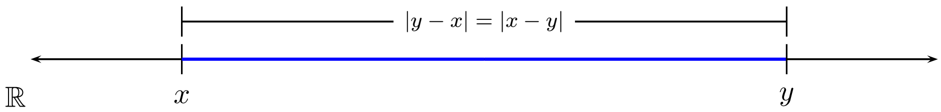
Para la propiedad multiplicativa tenemos:

$$\begin{aligned}
|xy| &= \sqrt{(xy)^2} && \text{(Observación 3.(5))} \\
&= \sqrt{x^2 y^2} \\
&= \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} \\
&= |x|\,|y|\,.
\end{aligned}$$

De manera análoga se establece que:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad \textit{si } y \neq 0.$$

2. *Dados números reales x e y, el valor absoluto de su diferencia, $|y-x|$, es la distancia entre ellos. Gráficamente,*



es decir, la distancia, por ejemplo, entre $-\frac{3}{4}$ y 3 es $\left|3-\left(-\frac{3}{4}\right)\right| = \left|-\frac{3}{4}-3\right| = \frac{15}{4}$.
Es claro que si $x = y$, entonces $|y-x| = 0$ .Además,

a) $|y-x| = |x-y|$ b) $|y-x| = 0$, *obliga* $x = y$.

3.1. Ecuaciones & Valor absoluto

Nuestro objetivo en esta sección es determinar el valor o valores de una incógnita o variable en expresiones algebraicas que además de contener el símbolo de igualdad o desigualdad, contengan valor absoluto.

Antes de ello recordemos:

Observación 5. 1. (**Ecuación lineal**) *La expresión*

$$ax+b=0; \quad a,b\in\mathbb{R} \quad con \quad a\neq 0,$$

es llamada ecuación lineal en la incógnita x en su forma estándard. Un procedimiento "natural" nos lleva a la solución de la expresión lineal anterior, $x_0 = -\frac{b}{a}$, es decir, al reemplazar x por x_0 en $ax+b=0$, dicha igualdad se verifica.

2. (**Ecuación cuadrática**) *Si $a,b,c\in\mathbb{R}$ y $a\neq 0$, la expresión $ax^2+bx+c=0$, es llamada ecuación cuadrática en la variable x. Si $a=0$, obtendríamos la ecuación lineal $bx+c=0$, de la cual ya conocemos su solucón. Así las cosas tenemos:*

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= 0 \\
a\Big(x^2+\frac{b}{a}x\Big)+c &= 0 && \text{(factor común)} \\
a\Big(x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2\Big) &= \Big(\frac{b^2}{4a}-c\Big) && \text{(completar cuadrado)} \\
a\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a} && \text{(trinomio cuadrado perfecto)} \\
\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2}. && (a\neq 0)
\end{aligned}$$

Teniendo presente que $|w|^2 = w^2$, al extraer raíz en la última expresión obtenemos las soluciones:

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{1}$$

En otras palabras, las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ son:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad y \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

3. *La expresión en raíz cuadrada de la expresión* (1)*, es comúnmente llamada discriminante de la ecuación y la denotaremos por*

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

que es un número real y así, tenemos las siguientes opciones para $ax^2 + bx + c$*:*

$$ax^2 + bx + c \overset{\text{tiene}}{\Longrightarrow} \begin{cases} 2 \text{ soluciones reales distintas,} & \text{si } \Delta > 0 \\ 2 \text{ soluciones reales iguales,} & \text{si } \Delta = 0 \\ 2 \text{ soluciones complejas,} & \text{si } \Delta > 0. \end{cases}$$

Ejemplos 3.1. 1. *Determine el valor de* x *que verifica* $\dfrac{1}{x - \frac{a}{2}} = \dfrac{2}{x + \frac{2b}{3}}$*, donde* $a, b \in \mathbb{R}$ *constantes.*

Primeramente tenemos que descartar los valores que anulan los denominadores, es decir, $x \neq \frac{a}{2}$ *y* $x \neq -\frac{2b}{3}$*. Luego,*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x - \frac{a}{2}} &= \frac{2}{x + \frac{2b}{3}} \\
1 &= \frac{2(x - \frac{a}{2})}{x + \frac{2b}{3}} && \text{(multiplicando a ambos lados por } x - \tfrac{a}{2}) \\
x + \frac{2b}{3} &= 2(x - \frac{a}{2}) && \text{(multiplicando a ambos lados por } x + \tfrac{2b}{3}) \\
\frac{3x + 2b}{3} &= 2x - a && \text{(simplificando)} \\
3x + 2b &= 6x - 3a && \text{(multiplicando a ambos lados por 3)} \\
2b + 3a &= 3x. && \text{(simplicando)} \\
x &= \frac{2b + 3a}{3}.
\end{aligned}$$

2. *Determine los valores de* x *que verifican:*

   a) $x^2 - 4kx + 4k^2 = 0$*, donde* k *es una constante.*
   Como $a = 1$, $b = -4k$ *y* $c = 4k^2$*, entonces* $\Delta = (-4k)^2 - 4(1)(4k^2) = 0$*. Luego tenemos dos soluciones reales repetidas que son:*

$$x_1 = x_2 = \frac{4k}{2} = 2k, \quad \text{más aún} \quad x^2 - 4kx + 4k^2 = (x - 2k)(x - 2k) = 0.$$

   b) $x^2 - x - 6 = 0$.
   Una forma de obtener los valores x *que verifican la ecuación cuadrática anterior es factorizando, es decir,* $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) = 0$ *y así, las soluciones (igualando cada factor a* 0*) son* $x_1 = -2$ *y* $x = 3$*.*
   Lo anterior se corrobora usando la fórmula general (1)*:*

$$a = 1, b = -1 \text{ y } c = -6; \text{ luego } \Delta = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 25.$$

   Por tanto,

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+5}{2} = 3, \\ x_2 = \frac{1-5}{2} = -2. \end{cases}$$

c) *Resolver para* x*,* $x+1=\dfrac{x-2}{x+2}$.
Multiplicando por $x+2$*, tenemos* $(x+1)(x+2)=x-2$*. Luego* $(x^2+3x+2)-(x-2)=x^2+2x+4=0$ *y así, con* $a=1$*,* $b2$ *y* $c=4$*,* $\Delta=-12$*.*
Usando que $\sqrt{-1}=i$*, entonces* $\Delta=2\sqrt{3}i$ *y así las soluciones (complejas conjugadas) de* $x^2+2x+4=0$ *son:*

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{-12}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{3}i}{2}=\begin{cases}-1+\sqrt{3}i,\\-1-\sqrt{3}i.\end{cases}$$

A continuación algunos ejemplos de aplicación.

Ejemplos 3.2 (Aplicaciones). *1. La Madre de Juan tiene* 5 *años menos que su Padre y la mitad de la edad del Madre es* 24*. ¿Qué edad tiene el Padre de Juan?*

Solución 3.1. x*: Edad de la Madre de Juan. Entonces:*

$$\frac{x}{2}=24 \quad\Rightarrow\quad x=48.$$

Como la Madre tiene 5 *años menos que el Padre, entonces la edad del Padre es* $x+5=53$ *años.*

2. En la actualidad Pedro tiene 16 *años y sus hermanos menores Mario e Isabela tienen* 5 *y* 3 *años respectivamente. ¿Cuántos años han de pasar para que el triple de la suma de las edades de los hermanos de Pedro sea el doble de la él?*

Solución 3.2. z*: Número de años que pasan para que se cumpla el enunciado. Así al pasar* z *años, Pedro tendrá* $16+z$ *y sus hermanos tendrán respectivamente* $5+z$ *y* $3+z$ *años. De las condiciones del problema tenemos:*

$$\begin{aligned}3\big[(5+z)+(3+z)\big]&=2(16+z)\\3(8+2z)&=32+2z\\6z+24&=2z+32\\6z-2z&=32-24 &&\text{(trasponiendo términos)}\\4z&=8 &&\text{(simplicando)}\\z&=2. &&\text{(despejando } z\text{)}\end{aligned}$$

Deben pasar exactamente 2 *años.*

3. Para encerrar un terreno rectangular de 750 m^2 *se han utilizado* 110 m *de cerca. Determine las dimensiones del terreno.*

Solución 3.3. *Sean* x *e* y *la base y la altura del rectángulo. Dado que* $2x+2y=110$*, entonces* $y=55-x$*.*
Así el área del terreno $A_T(x)$*, viene dada por*

$$x\cdot(55-x)=750 \quad\Rightarrow\quad x^2-55x+750=(x-25)(x-30)=0.$$

Por tanto, si $x=25$ *la altura será* 30 *y contrariamente, si la base* $x=30$*, entonces la altura asume el valor* 25*.* **Ejercicio:** *Ilustrar gráficamente la situación.*

4. El propietario de una finca cuenta con 300 m *de cerca para enrejar dos potreros contiguos:*

a) *Escriba el área total* A *de ambos potreros como una función de* x*. Ilustre gráficamente la situación. ¿Cuál es el dominio* $\mathcal{D}_A$*?*

b) *Represente gráficamente la función área y estime las dimensiones que producen la mayor área de los potreros.*

c) *Encuentre las dimensiones que producen la mayor cantidad de área del potrero completando el cuadrilátero.*

Solución 3.4. Ejercicio.

Referencias

1. LEITHOLD L. B., *El Cálculo, 7^a Ed.. OXFORD Universityy Press, México, (1994).*
2. MEJÍA GUZMÁN D. A., *Notas de Clase Introducción al Cálculo. Universidad de Antioquia (2006).*
3. PIEDRAHITA A., *Notas de Clase Introducción al Cálculo. Universidad de Antioquia (2008).*
4. ZILL D. G. & WRIGHT W. S., *Cálculo Trascendentes Tempranas, 4^a Ed.. McGraW-Hill/Interamericana Editores S.A, México D.F (2011).*