Combinación de funciones & Funciones inversas

Alexander Holguín Villa * **
Escuela de Matemáticas - UIS
Bucaramanga - Santander
Cálculo I

2020/1 - 2020/2

Resumen

A partir del concepto de función previamente introducido y dadas dos funciones f y g, se analizan dos formas posibles de combinarlas: mediante operaciones (usuales) aritméticas y por medio de la llamada composición de funciones. En la parte final se estudian las condiciones necesarias para que una función f tenga asociada la función inversa f^{-1}.

1. Introducción

Recuerde que una relación entre los conjuntos A y B es un conjunto de pares (parejas) ordenadas (x, y), donde x es un elemento en A y y es un elemento en B. Además, una **función** f de A en B, denotada por $f : A \to B$, es una relación entre A y B en la cual cada elemento $x \in A$ está relacionado con un único $y \in B$. En otras palabras, una función $f : A \to B$ es conjunto de pares ordenados (x, y), $x \in A$ y $y \in B$, en los que no existen dos pares ordenados diferentes con la misma primera componente x. Al conjunto de valores permitidos A se le llama el **dominio** de la función f, $\mathcal{D}_f$, y al elemento $y \in B$ se le denomina la imagen de x por f o el valor de f en x, denotado por $y = f(x)$. El **recorrido o rango** de f, $\mathcal{R}_f$, es el subconjunto de B formado por todas las imágenes de elementos $x \in A$, es decir, si $f : A \to B$ es una función se tiene:

$$A = \mathcal{D}_f \quad \text{y} \quad \mathcal{R} = \{f(x) : x \in A\} \subseteq B.$$

En este curso se tiene interés en funciones $f : A \to B$, donde A y B son conjuntos de números reales, i.e., A y B pueden ser intervalos bien sea abiertos, semi-abiertos o cerrados; semi-rectas abiertas o cerradas, incluso la misma recta real $\mathbb{R}$. En este caso, $f : A \to B$ con $A, B \subseteq \mathbb{R}$, es llamada **función de variable real** x.

La gráfica de una función $y = f(x)$, $\mathcal{G}_f$, está formada por todos los puntos $(x, f(x))$, donde x pertenece al dominio $\mathcal{D}_f$ y es claro que x corresponde a la distancia dirigida desde el eje $\mathbf{E}_y$; y $f(x)$ a la distancia dirigida desde el eje $\mathbf{E}_x$.

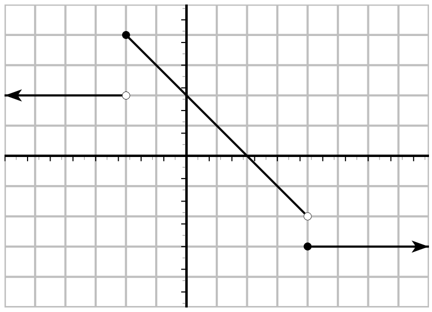
Ahora bien, de la definición de función se tiene que a cada $x \in \mathcal{D}_f$ le corresponde un solo valor $f(x)$ en el $\mathcal{R}_f$. Lo anterior significa que una recta vertical puede cortar la gráfica $\mathcal{G}_f$ de una función y $y = f(x)$ (que equivale a escoger un $x \in \mathcal{D}_f$) cuando más en un punto. Recíprocamente, si toda recta vertical que corte la gráfica de una ecuación lo hace

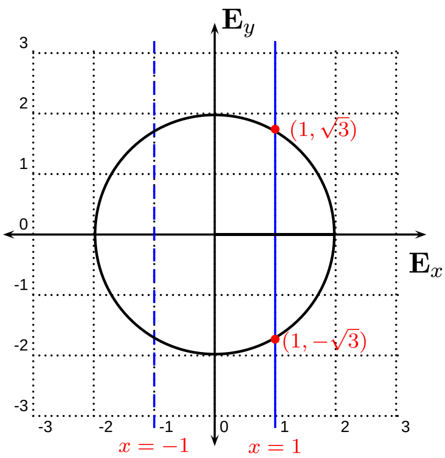
*AULA VIRTUAL - https://tic.uis.edu.co/ava/
**Sitio Web: http://matematicas.uis.edu.co/aholguin/

en a lo más en un punto, entonces tal gráfica corresponde a la de una función. La última afirmación es conocida con el nombre de **Test de la Recta Vertical**.

Por ejemplo, la figura de al lado representa la gráfica de la función a trozos $f(x)$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } -\infty < x < -2 \\ -x+2, & \text{si } -2 \leq x < 4 \\ -3, & \text{si } x \geq 4 \end{cases},$$





Gráfica de $x^2 + y^2 = 4$

Por otro lado, toda recta vertical $x = a$, $-2 < a < 2$, corta la gráfica de la circunferencia de radio $r = 2$, $x^2 + y^2 = 4$, en los puntos:

$$(a, \sqrt{4-a^2}) \quad \text{y} \quad (a, -\sqrt{4-a^2}),$$

y así $x^2 + y^2 = 4$ no es una función. Note que en particular, la recta $x = 1$ corta la circunferencia en los puntos

$$(1, \sqrt{3}) \quad \text{y} \quad (1, -\sqrt{3}).$$

2. Combinación de funciones

La noción moderna de función es fruto del esfuerzo de muchos matemáticos de los siglos $XVII$ y $XVIII$. En particular, es de especial mención el matemático y físico suizo *Leonhard Euler*, 1707 - 1783, quien se ideó la notación $y = f(x)$. Para finales del siglo $XVIII$, los matemáticos y científicos habían llegado a la conclusión de que un gran número de fenómenos cotidianos podían ser representados mediante modelos matemáticos, construidos a partir de una colección de funciones denominadas **funciones elementales**, las cuales se dividen en tres categorías:

- Funciones algebraicas (polinómicas, racionales y radicales).
- Funciones trigonométricas.
- Funciones exponenciales y logarítmicas.

2.1. Combinación aritméticas

Usando las operaciones aritméticas suma, resta, multiplicación y división, dos funciones f y g pueden combinarse para obtener nuevas funciones, siempre y cuando tales *combinaciones aritméticas* se definan en el dominio común $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$. Más exactamente:

Definición 2.1 (Combinaciones aritméticas). *Sean f g funciones con dominios $\mathcal{D}_f$ y $\mathcal{D}_g$ respectivamente, entonces la* **suma** $f+g$, *la* **diferencia** $f-g$, *el* **producto** fg *y el* **cociente** $\frac{f}{g}$, *se definen sobre el dominio común $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ de la siguiente manera:*

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \tag{1}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \tag{2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad si \;\; g(x) \neq 0. \tag{3}$$

A continuación algunos ejemplos:

Ejemplos 2.1. 1. *Como ya sabemos las funciones $y = f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$, $b, c \in \mathbb{R}$, son parábolas y tienen dominio la recta real $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Ahora bien, si $d > 0$ la parábola que abre a derecha desplazada horizontalmente d unidades $y = g(x) = \sqrt{x-d}$, tiene dominio $\mathcal{D}_g = [d, +\infty)$. Así $f(x) \pm g(x)$ y $f(x)g(x)$ tienen dominio*

$$\mathcal{D} = (-\infty, +\infty) \cap [d, +\infty) = [d, +\infty),$$

mientras que $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene dominio $\mathcal{D}_{f/g} = \{x : x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g,\; g(x) \neq 0\} = (d, +\infty)$.

2. *Como vimos expresiones del tipo $y = p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, donde $n \in \mathbb{N}$ y los coeficientes a_i, $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ son números reales, son llamados polinomios de grado $\mathbf{deg}(p) = n$, los cuales tienen dominio $\mathcal{D}_p = \mathbb{R}$. Notemos que $p(x)$ no es más que la suma de las $(n+1)$ funciones*

$$a_0, a_1 x, \ldots, a_i x^i, \ldots a_n x^n,$$

donde por convención como $x \neq 0$, $x^0 = 1$.

3. *Consideremos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ de grados $\mathbf{deg}(p) = n$ y $\mathbf{deg}(q) = m$. Entonces la función cociente entre $p(x)$ y $q(x)$ dada por*

$$y = f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

donde a_i, $i = 0, 1, 2, \cdots, n$; b_j, $j = 0, 1, 2, \cdots, m$ son números reales, es llamada función racional y tiene dominio $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$.
En particular, si $p_1(x) = x$, $p_2(x) = 2x^2$ y $q_1(x) = x^2 - 1 = q_2(x)$, entonces

$$y = f(x) = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} = \frac{x}{x^2-1} \qquad y \qquad y = g(x) = \frac{p_2(x)}{q_2(x)} = \frac{2x^2}{x^2-1},$$

son funciones racionales con las siguientes características:

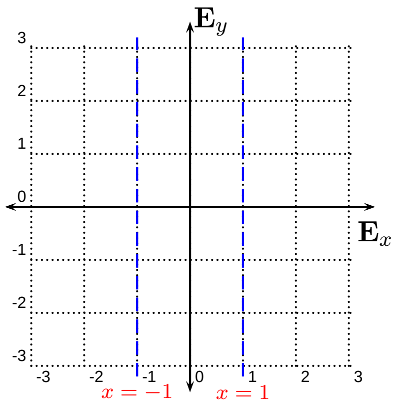
a) *$f(-x) = -f(x)$ $(g(-x) = g(x))$, es decir f es una función impar ($g(x)$ es par) y así, simétrica respecto al origen, (respecto al $\mathbf{E}_y$).*

b) *$f(x)$ y $g(x)$ cortan los ejes $\mathbf{E}_y$ y $\mathbf{E}_x$ en $y = 0$ y $x = 0$, respectivamente.*

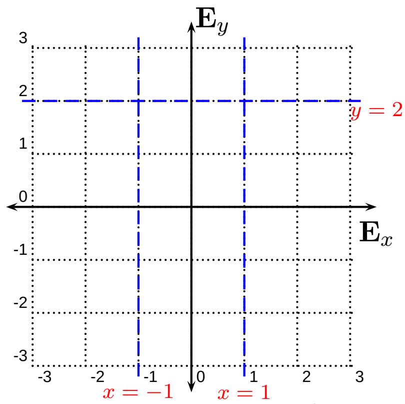
c) *Las rectas $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales para $f(x)$ y $g(x)$. El eje $\mathbf{E}_x$, es decir, $y = 0$ (la recta $y = 2$) es asíntota horizontal para $f(x)$ (para $g(x)$).*

d) *Cuando x se aproxima por a -1 por la izquierda (derecha), $f(x)$ asume valores grandes* **negativos** *(***positivos***). Ahora bien, cuando x se aproxima por a 1 por la derecha (izquierda), $g(x)$ asume valores grandes* **positivos** *(***negativos***).*

Ejercicio: *Use la información anterior para graficar las funciones $f(x)$ y $g(x)$:*



Gráfica de $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$



Gráfica de $y = g(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$

Ejemplos 2.2.

*(***Desigualdades Vs Funciones***)*

1. *Determine los valores reales x tales que $\dfrac{x+5}{x+2} < \dfrac{4}{x+1}$.*

   Solución 2.1. *Es claro que ninguna solución puede contener los números $x = -2$ y $x = -1$, i.e., $x \neq -2, -1$. Trasponiendo el sumando derecho tenemos:*

$$\frac{x+5}{x+2} < \frac{4}{x+1} \iff \frac{x+5}{x+2} - \frac{4}{x+1} < 0 \tag{4}$$

$$\iff \frac{(x+5)(x+1) - 4(x+2)}{(x+2)(x+1)} < 0 \tag{5}$$

$$\iff \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+2)(x+1)} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+2)(x+1)} < 0. \tag{6}$$

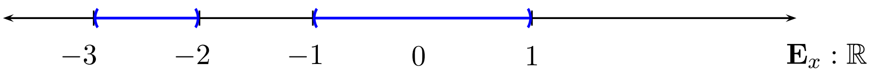
Examinemos los signos de los factores presentes en la desigualdad $\dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+2)(x+1)} < 0$:

		-3		-2		-1		1	
$(x+3)$	$--$		$++$		$++$		$+++$		$++++$
$(x-1)$	$--$		$--$		$--$		$---$		$++++$
$(x+2)$	$--$		$--$		$++$		$+++$		$++++$
$(x+1)$	$--$		$--$		$--$		$+++$		$++++$
	$++$		$--$		$++$		$---$		$++++$

$-3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \qquad \mathbf{E}_x : \mathbb{R}$

Dado que $\dfrac{x+5}{x+2} < \dfrac{4}{x+1} \iff \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+2)(x+1)} < 0$, *la solución* $\mathcal{S}$ *viene dada por:*

$\mathcal{S} = (-3,-2) \cup (-1,1)$:



2. *Sea* $y = f(x) = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+2)(x+1)} = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+3x+2}$. *Determine los intervalos o semi-rectas, según el caso, donde* $f(x) \leq 0$ *y* $f(x) \geq 0$. *Además use los conceptos de clase para "dar una idea" de la gráfica de* $f(x)$.

Solución 2.2. *Como vemos* $y = f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ *es una función racional con* $p(x) = x^2 + 2x - 3$ *y* $q(x) = x^2 + 3x + 2$ *de grados* $\mathbf{deg}(p) = 2 = \mathbf{deg}(q)$. *Además:*

a) $f(x) \leq 0$ *y* $f(x) \geq 0$ *respectivamente en los conjuntos* $\mathcal{S}_1$ *y* $\mathcal{S}_2$ *dados por:*

$$\mathcal{S}_1 = [-3,-2) \cup (-1,1] \quad y \quad \mathcal{S}_2 = (-\infty,-3] \cup (-2,-1) \cup [1,+\infty).$$

b) *El dominio de* $f(x)$ *es* $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2, -1\}$.

c) *Como* $f(-x) \neq f(x), -f(x)$, *entonces la gráfica de* $f(x)$ *no tiene simetrías.*

d) $f(x)$ *tiene cortes con los ejes coordenados en:*

$$\mathbf{E}_x : \ (-3,0) \ y \ (1,0) \qquad \mathbf{E}_y : \ (0,-3/2).$$

e) *Las rectas* $x = -2$ *y* $x = -1$ *son asíntotas verticales para* $f(x)$. *Además, como* $\mathbf{deg}(p) = 2 = \mathbf{q}$ *y* $\mathbf{coef}(x^2) = 1$ *en* p *y* q, *entonces* $y = 1$ *es una asíntota horizontal para* $f(x)$.

f) *Ahora bien, cuando* x *está próximo de* -2 *y* -1, *tenemos que:*

i) Si x *se "aproxima a" a* -2 *por izquierda, respectivamente por derecha, (números tipo* $-2,000001$, *respectivamente* $-1,999999$*), entonces tenemos que:*

$$f(x) = \frac{(+)(-)}{(-)(-)} < 0 \text{ con } x{+}2 \text{ próximo a } 0: \ f \text{ asume valores negativos grandes }.$$

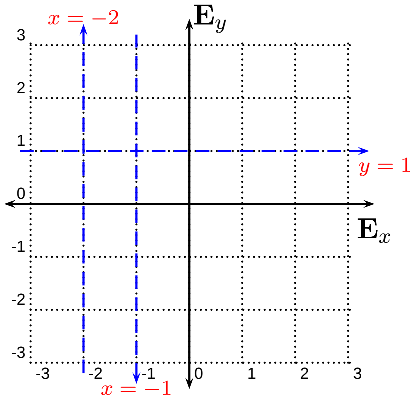
$$f(x) = \frac{(+)(-)}{(+)(-)} > 0 \text{ con } x{+}2 \text{ próximo a } 0: \ f \text{ asume valores positivos grandes }.$$

ii) Haciendo un análisis similar, vemos que si x *se "aproxima a" a* -1 *por izquierda, respectivamente por derecha, tenemos que:*

f *asume valores positivos grandes (respectivamente, negativos grandes).*

3. *Finalmente, del ítem anterior y el hecho que el gráfico de* $f(x)$ *corta el eje* $\mathbf{E}_x$, *entonces* $\mathcal{R}_f = (-\infty, -\infty) = \mathbb{R}$.

Ejercicio: Use la información anterior para graficar la función $f(x)$.



Gráfica de $y = f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+3x+2}$

2.2. Composición de funciones

Existe otra manera de combinar dos funciones, llamada **composición**. Para ilustrar la idea, sean f y g funciones y suponga que para $x \in \mathcal{D}_g$ dado el valor funcional $g(x)$ pertenece al dominio $\mathcal{D}_f$, lo que significa que es posible evaluar f en $g(x)$, i.e., $f\big(g(x)\big)$. Por ejemplo consideremos $f(x) = x^{1/2}$ y $g(x) = x^2 - 4$. Entonces para $x = 4$, $g(4) = 12$ el cual pertenece al dominio $\mathcal{D}_f$ y así, $f\big(g(4)\big) = f(12) = 2\sqrt{3}$. Por otro lado, para $x = 1$, $g(1) = -3 \notin \mathcal{D}_f$ y así, f no puede evaluarse en $g(1)$.

Definición 2.2 (Composición de funciones). *Sean $g : A \to B$ y $f : D \to C$ funciones con $D \subseteq B$. La* **función compuesta** *de g con f o* **composición** *de f y g, denotada por $f \circ g$, es la función que a cada $x \in A = \mathcal{D}_g$ le asigna el elemento $f\big(g(x)\big)$, i.e.,*

$$\big(f \circ g\big)(x) = f\big(g(x)\big).$$

Análogamente y teniendo en cuenta que el dominio de la segunda función a aplicar g "debe ser subconjunto del codominio" de la primera función a aplicar f, $\mathcal{D}_g = A \subseteq C$, se define la función compuesta de f con g o composición de g y f como la función que a cada $x \in \mathcal{D}_f = D$ le asigna el elemento $g\big(f(x)\big)$.

Observación 1. 1. *Sean f y g funciones con las condiciones de la Definición 2.2. Para efectuar la composición $f \circ g$ (respectivamente $g \circ f$) seguir los pasos:*

a) *Tome un elemento $x \in \mathcal{D}_g$, ($x \in \mathcal{D}_f$).*

b) *Obtenga el valor de la función g en x (f en x) y verifique que el valor funcional $g(x)$ ($f(x)$) esté en el dominio de f (dominio de g), i.e., $g(x) \in \mathcal{D}_f$ ($f(x) \in \mathcal{D}_g$).*

c) *Aplique la función f (la función g) al valor funcional anterior, i.e., $f\big(g(x)\big)$ ($g\big(f(x)\big)$).*

Esquemáticamente se tiene que:

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f\big(g(x)\big) \quad y \quad x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g\big(f(x)\big).$$

2. *Si el elemento $x' \in A = \mathcal{D}_g$ es tal que $g(x) \notin D = \mathcal{D}_f$, entonces f no puede aplicarse a $g(x)$, en otras palabras no es posible la composición $f\big(g(x)\big)$, i.e., $x \notin \mathcal{D}_{f\circ g}$ y así,*

$$\mathcal{D}_{f\circ g} = \big\{x : x \in \mathcal{D}_g \ y \ g(x) \in \mathcal{D}_f\big\}.$$

Ejemplos 2.3. 1. *Sean f y g las funciones dadas por:*

$$f=\big\{(1,a),(2,b),(3,b),(4,d)\big\} \quad y \quad g=\big\{(a,x),(b,y),(c,y),(d,y)\big\}.$$

Así las cosas, se tiene que:

$$\mathcal{D}_f=\{1,2,3,4\}\,,\mathcal{R}_f=\{a,b,d\} \quad \subset \quad \mathcal{D}_g=\{a,b,c,d\}\,,\mathcal{R}_g=\{x,y\}\,.$$

Por tanto,

$$(g\circ f)(1)=g\big(f(1)\big)=g(a)=x. \qquad (g\circ f)(3)=g\big(f(3)\big)=g(b)=y.$$
$$(g\circ f)(2)=g\big(f(2)\big)=g(b)=y. \qquad (g\circ f)(4)=g\big(f(4)\big)=g(d)=y.$$

Luego $g\circ f=\big\{(1,x),(2,y),(3,y),(4,y)\big\}$ *y* $\mathcal{D}_{g\circ f}=\{1,2,3,4\}=\mathcal{D}_f$.

2. *Sean f y g dadas por:*

$$f=\big\{(1,a),(2,b),(3,b),(4,d)\big\} \quad y \quad g=\big\{(a,x),(c,y),(d,x)\big\}.$$

Como $f(2)=b=f(3)\notin\mathcal{D}_g$, *entonces* $g\circ f=\{(1,x),(4,x)\}$ *y* $\mathcal{D}_{g\circ f}=\{1,4\}\subset\mathcal{D}_f$.

3. *Sea $y=f(x)=2x+1$, i.e., f se obtiene al "estirar" verticalmente un factor de $c=2$ la gráfica de la función identidad $y=\mathcal{I}_d(x)=x$ y luego desplazar verticalmente hacia arriba $c=1$ unidad esta última gráfica. Si $y=g(x)=\dfrac{x-1}{2}$, entonces:*

$$\mathcal{D}_f=\mathbb{R}=\mathcal{R}_f \quad y \quad \mathcal{D}_g=\mathbb{R}=\mathcal{R}_g.$$

Además,

$$\begin{aligned}\big(f\circ g\big)(x)&=f\big(g(x)\big)\\&=f\Big(\frac{x-1}{2}\Big)\\&=2\Big(\frac{x-1}{2}\Big)+1\\&=(x-1)+1\\&=x=\mathcal{I}_d(x).\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(g\circ f)(x)&=g\big(f(x)\big)\\&=g\Big(2x+1\Big)\\&=\Big(\frac{(2x+1)-1}{2}\Big)\\&=\frac{2x}{2}\\&=x=\mathcal{I}_d(x).\end{aligned}$$

Las funciones de este ejemplo son de un tipo particualr y serán tratadas en detalle cuando sea introducido el concepto de función inversa.

4. *Considere las funciones $y=f(x)=\sqrt{x}$ y $y=g(x)=2x^2+1$. Determine las composiciones $f\circ g$ y $g\circ f$ y sus respectivos dominios $\mathcal{D}_{f\circ g}$ y $\mathcal{D}_{g\circ f}$.*

Es claro que,

$$\mathcal{D}_f=[0,+\infty)=\mathcal{R}_f,\ \mathcal{D}_g=\mathbb{R},\ \mathcal{R}_g=[1,+\infty) \ \ i.e.,\ \ g(x)=2x^2+1\geq 1.$$

Ahora bien,

$$f\big(g(x)\big) = f\big(2x^2+1\big) = \sqrt{2x^2+1} \geq 1, \text{ para cada } x. \qquad \mathcal{D}_{f\circ g} = \big\{x : x \in \mathcal{D}_g,\ g(x) \in \mathcal{D}_f\big\} = \big\{x : x \in \mathbb{R},\ g(x) \in [0,\infty)\big\} = \mathbb{R}.$$

$$g\big(f(x)\big) = g\big(\sqrt{x}\big) = 2\big(\sqrt{x}\big)^2 + 1 = 2x+1. \qquad \mathcal{D}_{g\circ f} = \big\{x : x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) \in \mathcal{D}_g\big\} = \big\{x : x \in [0,+\infty),\ \sqrt{x} \in \mathbb{R}\big\} = [0,+\infty).$$

Note que $g\big(f(x)\big) = 2x+1$ es una recta y sin embargo $\mathcal{D}_{g\circ f} = [0,+\infty)$. Ello se debe a que es necesario tener en cuenta las condiciones $x \in [0,+\infty)$ y $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$. Además en general, $\mathcal{D}_{g\circ f} \subseteq \mathcal{D}_f$.

5. *Sea $a > 0$ y considere las funciones $y = f(x) = \sqrt{x-1}$ y $y = g(x) = x - a$.*

   Luego es claro que $\mathcal{D}_f = [1,+\infty)$, $\mathcal{R}_f = [0,+\infty)$ y $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} = \mathcal{R}_g$. Además,

$$g\big(f(x)\big) = g\big(\sqrt{x-1}\big) = \sqrt{x-1} - a \quad y \quad f\big(g(x)\big) = f\big(x-a\big) = \sqrt{x-a-1}.$$

   Ahora bien,

$$\mathcal{D}_{g\circ f} = \big\{x : x \in [1,+\infty),\ f(x) \in \mathbb{R}\big\} = [1,+\infty) = \mathcal{D}_f. \qquad \mathcal{D}_{f\circ g} = \big\{x : x \in \mathbb{R},\ x-a \in [1,+\infty)\big\} = [a+1,+\infty) \subset \mathbb{R} = \mathcal{D}_g.$$

3. Funciones inversas

Como fue definido previamente, una función $f : A \to B$ es una correspondencia que asigna a cada valor x de su dominio $A = \mathcal{D}_f$ un único valor y en el recorrido o rango $\mathcal{R}_f \subseteq B$. Es bien sabido que esta *regla de correspondencia* no excluye la posibilidad que el mismo valor y esté asociado con varios valores diferentes de x. Por ejemplo, para la función $f(x) = x^2 - 2x - 4$, el valor $y = -4 \in \mathcal{R}_f$ ocurre para $x = 0$ y $x = 2$, que son valores del dominio $\mathcal{D}_f$. Por otro lado, exiten funciones f para las cuales cada valor y del recorrido, corresponde con único valor x del dominio, como es el caso de la función $f(x) = 2x+1$ o en general $f(x) = ax+b$, para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Reinterpretando lo anterior, el objetivo de la sección es definir una relación $f^{-1} : B \to A$ que también sea función.

Ejemplos 3.1. 1. *Considere $f : A \to B$, donde $A = \big\{1,2,3\big\}$ y $B = \big\{a,b\big\}$, definida por $f = \big\{(1,a),(2,b),(3,b)\big\}$.*

   Así las cosas, el elemento $b \in B$ es la imagen de dos elementos distintos de, $f(2) = b = f(3)$. Por tanto, $f^{-1} = \big\{(a,1),(b,2),(b,3)\big\}$, es una relación que no es función.

2. *Si $f : A \to B$ está dada por $f = \big\{(1,a),(2,b)\big\}$, donde $A = \big\{1,2\big\}$ y $B = \big\{a,b,c\big\}$, entonces el elemento $c \in B$ no es la imagen de ningún elemento $x \in A$ y así, $f^{-1} : B \to A$ es una relación que tampoco es función, dado que el elemento $c \in B$ no está relacionado con ningún elemento del conjunto A.*

3. *Finalmente si,*

$$f = \{(1,c),(2,b),(3,a)\}, \quad A = \{1,2,3\} \quad y \quad B = \{a,b,c\},$$

entonces los elementos de B son la imagen de un único elemento en A y así, f^{-1} es una función de B en A.

Como puede notarse, el ejemplo 3) "sugiere que" para que una función $f : A \to B$ tenga asociada inversa f^{-1}, los conjuntos A y B deben tener la misma cantidad de elementos.

Definición 3.1 (Función uno a uno & Función inversa). 1. (**Función uno a uno**) *Una función $f : A \to B$ es* **uno a uno** *si cada elemento $y \in \mathcal{R}_f$ está asociado con exactamente un elemento $x \in A = \mathcal{D}_f$. En notación de función se tiene:*

$$y = f(x) \text{ significa lo mismo que } x = f^{-1}(y).$$

2. (**Función inversa**) *Sea $f : A \to B$ una función* **uno a uno**. *La inversa de f es una función $g : B \to A$ tal que*

$$f\big(g(x)\big) = \mathcal{I}_d(x), \text{ para todo } x \in B \quad y \quad g\big(f(x)\big) = \mathcal{I}_d(x), \text{ para todo } x \in A.$$

La función g o inversa de f suele denotarse por f^{-1} y se lee "f inversa", así las cosas las igualdades anteriores toman la forma:

$$f\big(f^{-1}(x)\big) = \mathcal{I}_d(x), \text{ para todo } x \in B \quad y \quad f^{-1}\big(f(x)\big) = \mathcal{I}_d(x), \text{ para todo } x \in A.$$

De la definición anterior se tienen las siguientes:

Observaciones 1. 1. (**Prueba de la recta horizontal**) *Interpretando geométricamente la definición anterior, sigue que una recta horizontal puede cortar la gráfica $\mathcal{G}_f$ de una función* **uno a uno** *en a lo más un punto. Por otro lado, si toda recta horizontal que corta la gráfica $\mathcal{G}_f$ de la función f, lo hace en a lo más un punto, entonces la función f es necesariamente* **uno a uno**.

2. (**Propiedades**) *Si $f : [a,b] \to [c,d]$ es una función* **uno a uno** *con inversa $f^{-1} : [c,d] \to [a,b]$, entonces son válidas:*

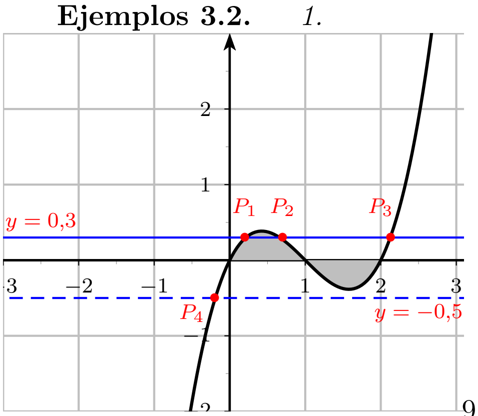
   a) $\mathcal{D}_f^{-1} = \mathcal{R}_f$.

   b) $\mathcal{R}_f^{-1} = \mathcal{D}_f$.

   c) *f^{-1} es uno a uno.*

   d) $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$, *"inversa" de f^{-1} es f.*

Ejemplos 3.2. 1.



En la figura de al lado se muestra la gráfica de la función

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x.$$

- *Aunque la recta $y = -0{,}5$ sólo corta a $\mathcal{G}_f$ en el punto P_4,*
- *$\mathcal{G}_f$ es cortada por la recta $y = 0{,}3$ en los puntos P_1, P_2 y P_3.*

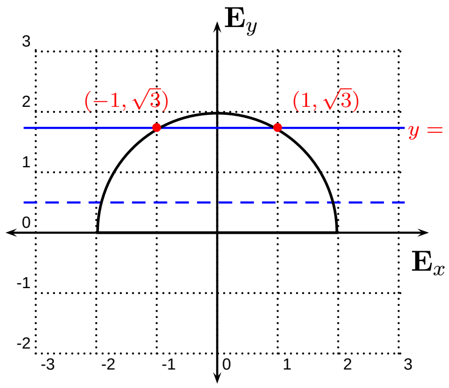
Por tanto $y = f(x)$ no es **uno a uno**.

2. Por otro lado, toda recta horizontal $y = a$, $0 < a < 2$, corta la gráfica de la semi-circunferencia de radio $r = 2$, $y = \sqrt{4 - x^2}$, en los puntos:

$$(\sqrt{4-a^2}, a) \quad y \quad (-\sqrt{4-a^2}, a),$$

y así $y = \sqrt{4 - x^2}$ no es una función **uno a uno**. *Note que en particular, la recta $y = \sqrt{3}$ corta la gráfica en los puntos*

$$(-1, \sqrt{3}) \quad y \quad (1, \sqrt{3}).$$



Gráfica de $y = \sqrt{4 - x^2}$

*3. (***Dominios restringidos***)*

a) *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ y considere la función cuadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$. Luego,*

$$y = ax^2 + bx + c = a\Big(x^2 + \frac{b}{a}x + \Big(\frac{b}{2a}\Big)^2\Big) + \Big(\frac{4ac - b^2}{4a}\Big).$$

Por tanto, $y - \Big(\dfrac{4ac-b^2}{4a}\Big) = a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2$, expresión que corresponde a una parábola con vértice en $V\big(-\frac{b}{2a}, f\big(-\frac{b}{2a}\big)\big)$, la cual abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo en el caso que $a < 0$. Es claro que toda recta horizontal arriba (abajo) del vértice para $a > 0$ (para $a < 0$) toca la gráfica $\mathcal{G}_f$ en dos puntos. Luego ninguna función cuadrática es **uno a uno**.

b) *Del ítem anterior $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 = \frac{x^2-6x+10}{2}$ no es uno a uno. Además,*

$$y = \frac{x^2 - 6x + 10}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y - \frac{1}{2} = \frac{(x-3)^2}{2},$$

que es una parábola con vértice $V\big(3, \frac{1}{2}\big)$ y así,

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \quad y \quad \mathcal{R}_f = \Big[\frac{1}{2}, +\infty\Big).$$

Por tanto, al considerar $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$ en el intervalo $\mathcal{D}_f = \big[3, +\infty\big)$ se ve que el rango $\mathcal{R}_f$ se preserva y que $f(x)$ restringida al dominio $[3, +\infty)$ cumple el test de la recta horizontal, i.e., es uno a uno. Finalmente,

$$y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 \quad \Longleftrightarrow \quad y = f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{2x - 1} \quad \textit{(Verificar!!!)}\ .$$

Referencias

1. Leithold L. B., *El Cálculo, 7ª Ed.*. OXFORD Universityy Press, México, (1994).

2. Mejía Guzmán D. A., *Notas de Clase Introducción al Cálculo.* Universidad de Antioquia (2006).

3. Piedrahita A., *Notas de Clase Introducción al Cálculo.* Universidad de Antioquia (2008).

4. Zill D. G. & Wright W. S., *Cálculo Trascendentes Tempranas, 4ª Ed.*. McGraW-Hill/Interamericana Editores S.A, México D.F (2011).