UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER - ESCUELA DE MATEMÁTICAS

Notas de Clase: **Cálculo II**

Alexander Holguín Villa

Octubre de 2020

1. EL PROBLEMA DE ÁREA

Así como en *cálculo diferencial* se vió que una de las aplicaciones de la **derivada** es el problema geométrico de construir una tangente a la curva descrita por una función f, se verá que el *cálculo integral* permite dar respuesta al problema de encontrar el área de una región acotada por el eje x, $\mathbf{E}_x$, y la gráfica de una función f (no-negativa) continua sobre un intervalo $I = [a, b]$.
En esta sección se introduce una notación concisa para sumas, notación que recibe el nombre de **notación sigma** debido a que utiliza la letra griega mayúscula sigma, $\sum$.

Definición 1.1 (**Notación sigma -** $\sum$). *Sean $a_1, a_2, \cdots, a_n$ números reales. La suma $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ se escribe como*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

donde k es el **índice de la suma**, *a_k es el término* k**-ésimo** *o* **genérico** *de la suma y los* **límites inferior** *y* **superior de la suma** *son 1 y n.*

Observación 1.2.

1. *Los límites inferior y superior de la suma han de ser constantes respecto al índice de la suma. Sin embargo, el límte inferior no tiene que ser necesariamente 1, este último puede ser cualquier entero ("positivo") menor o igual al límite superior.*

2. *El índice de la suma k es "***mudo***", esto quiere decir:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{l=1}^{n} a_l.$$

En otras palabras, el índice de la suma "carece" de importancia y lo que si es relevante son los valores sucesivos y dónde estos últimos comienzan y terminan.

Ejemplos 1.3. *1.* $\sum_{k=1}^{50} k = \sum_{i=0}^{49}(i+1) = \sum_{j=2}^{51}(j-1) = 1+2+3+\cdots+50.$

2. a) $\sum_{k=5}^{10} k^3 = 5^3+6^3+7^3+\cdots+10^3.$ b) $\sum_{k=4}^{9}\frac{1}{k} = \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}.$

3. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(k^2+1\right) = \frac{1}{n}\left\{\left(1^2+1\right)+\left(2^2+1\right)+\left(3^2+1\right)+\ldots+\left(n^2+1\right)\right\}.$

4. $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + f(x_3)\Delta x_3 + \ldots + f(x_n)\Delta x_n.$

5. Recuerde que una **progresión geométrica** *es una sucesión de números reales llamados términos, en la que cada término se obtiene multiplicando el término anterior por una constante denominada razón o factor de la progresión. Considere la progresión geométrica de término inicial $a \neq 0$ y razón r. Obtenga la suma de los primeros n términos de la progresión geométrica indicada.*

De lo indicado en las hipótesis la **progresión geométrica** *tiene los términos:*

$$a, ar, ar^2, \ldots ar^{n-1} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{n-1} ar^k.$$

Si S es igual a la suma de los n términos de la progresión, entonces S y rS vienen dadas por:

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} ar^k = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \quad y \quad rS = r\sum_{k=1}^{n-1} ar^k = ar + ar^2 + ar^3 \cdots + ar^n.$$

Por tanto, $S - rS = \left(ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n\right) - \left(a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}\right) = a - ar^n.$

Finalmente,

$$S(1-r) = S - rS = a - ar^n = a(1-r^n) \qquad \Longrightarrow \qquad S = \sum_{k=1}^{n-1} ar^k = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right).$$

En el siguiente resultado se enuncian algunas de las propiedades de las sumas y se establecen fórmulas cerradas usando la *notación sigma.*

Teorema 1.4. *(***Propiedades y fórmulas en notación sigma***)*

1. Sean $c \neq 0$ un número real, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n; b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ números reales. Entonces:

a) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$.

b) $\sum_{k=1}^{n} \left(a_k \pm b_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$.

2. *Sean n un entero positivo y c una constante cualquiera. Entonces:*

a) $\sum_{k=1}^{n} c = nc$.

b) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

c) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

d) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Ejemplo 1.5. *Considere la siguiente suma* $\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{n^2}$.

1. *Halle una expresión reducida.*
2. *Determine la suma para* $10, 100, \ldots, 10^6$.

1. *Aplicando el Teorema 1.4 se tiene:*

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{n^2} &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i+1) && \left(\frac{1}{n^2}\ \text{constante}\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right) && \left(\text{Linealidad de } \textstyle\sum\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2} + n\right] && (\text{Teorema 1.4a), b)})\\
&= \frac{1}{n^2}\left[\frac{n^2+3n}{2}\right] && (\text{Simplificando})\\
\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{n^2} &= \frac{1}{2}\left[1+\frac{3}{n}\right]. && (\textbf{Expresión reducida})
\end{aligned}
$$

2.

x	$\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{n^2} = \frac{1}{2}\left[1+\frac{3}{n}\right]$
10	0,6500000
10^2	0,5150000
10^3	0,5015000
$\vdots$	$\vdots$
10^6	0,5000015

Como puede verse en la tabla, las sumas parecen **tender** *a un límite conforme n aumenta. Posteriormente se verá que muchos de los resultados establecidos para cuando una variable x "tiende al infinito", siguen siendo válidos cuando una variable n se restringe al conjunto de números naturales* $\mathbb{N}$. *En particular, es válido:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+3}{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Ejercicios 1.6. 1. *Escriba los siguientes números usando la Notación Sigma* $\sum$*:*

a) $0,11111111.$ b) $0,3737373737.$ c) $0,\underbrace{153153\ldots153153}_{n\ veces}.$

¿Podemos hacer algo similar con expresiones periódicas infinitas?

2. *Evalúe la cada una de las sumas:*

a) $\displaystyle\sum_{k=-3}^{n}\left(2^k-2^{k-1}\right).$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10^6}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right].$

c) $\displaystyle\sum_{\substack{j=-2\\ j\neq 0,1}}^{n}\frac{2}{j(j-1)}.$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[(3^{-k}-3^k)^2)-(3^{k-1}-3^{-k+1})^2\right].$

e) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{4j+3}{n^2}.$

f) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{4i^2(i-1)}{n^4}.$

g) $\displaystyle\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 0,2}}^{10^2}\frac{2}{i(i-2)}.$

h) $\displaystyle\sum_{m=0}^{2021}(1+m).$

3. *Use la Notación Sigma para escribir las siguientes expresiones:*

a) $\left[5\left(\frac{1}{8}\right)+3\right]+\left[5\left(\frac{2}{8}\right)+3\right]+\left[5\left(\frac{3}{8}\right)+3\right]\cdots\left[5\left(\frac{2^{11}-31}{8}\right)+3\right].$

b) $\left[1-\left(\frac{2}{n}-1\right)^2\right]\left(\frac{2}{n}\right)+\left[1-\left(\frac{2\cdot 2}{n}-1\right)^2\right]\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots\left[1-\left(\frac{2n}{n}-1\right)^2\right]\left(\frac{2}{n}\right).$

c) $\left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\left(\frac{0}{n}\right)^2}+\left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\cdots\left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}.$

Problema 1.7 (**Problema de área).** *Encontrar el área A de una región $\mathscr{R}$ acotada por el eje $\mathbf{E}_x$ y la gráfica $\mathscr{G}_f$ de una función no-negativa y continua $y=f(x)$ definida sobre un intervalo $I=[a,b]$.*

Sea $y=f(x)$ una función continua con $f(x)\geq 0$ sobre un intervalo $I=[a,b]$. Siga el siguiente procedimiento:

- Divida el intervalo $I=[a,b]$ en n subintervalos $I_k=\left[x_{k-1},x_k\right]$ donde

  $$\mathscr{P}:\quad a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n,$$

  es llamada una partición **regular** del $I=[a,b]$ si la longitud $\mathbf{l}(I_k)$ de cada subintervalo I_k es $\Delta x=\Delta x_k=\frac{b-a}{n}$.

- Escoja un número x_k^* en cada uno de los n subintervalos $\left[x_{k-1},x_k\right]$ y forme los n productos $f(x_k^*)\Delta x$, productos que corresponden a las áreas de los n rectángulos R_k de largo $f(x_k^*)$ y ancho Δx, construídos en los subtintervalos I_k. Los números $\left\{x_k^*\right\}_{k=1}^{n}$ son llamados **números muestra**.

- Sume las áreas de los n rectángulos R_k:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x = f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + f(x_3^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x.$$

  Tal suma corresponde a una *aproximación* del área A bajo la gráfica $\mathcal{G}_f$ sobre el intervalo $I = [a, b]$.

Tenemos,

Definición 1.8 (Área bajo una gráfica). *Sea f una función continua sobre $I = [a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. El área A* **bajo la gráfica de** *f sobre I se define como*

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x. \tag{1.1}$$

Observación 1.9. 1. *Si en la expresión 1.1 se toma el número muestra x_k^* como siendo el extremo derecho x_k del intervalo I_k, entonces con $\Delta x = \Delta x_k = \frac{b-a}{n}$ se tiene:*

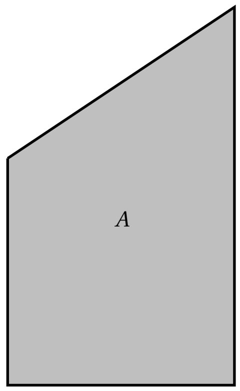
$$\begin{aligned}
x_1^* &= a + \Delta x = a + \frac{b-a}{n} \\
x_2^* &= a + 2\Delta x = a + 2\left(\frac{b-a}{n}\right) \\
x_3^* &= a + 3\Delta x = a + 3\left(\frac{b-a}{n}\right) \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \\
x_k^* &= a + k\Delta x = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right) \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \\
x_n^* &= a + n\Delta x = a + n\left(\frac{b-a}{n}\right).
\end{aligned} \tag{1.2}$$

2. *Reemplazando la expresión* (1.2) *en 1.1, se concluye que el área A es dada por:*

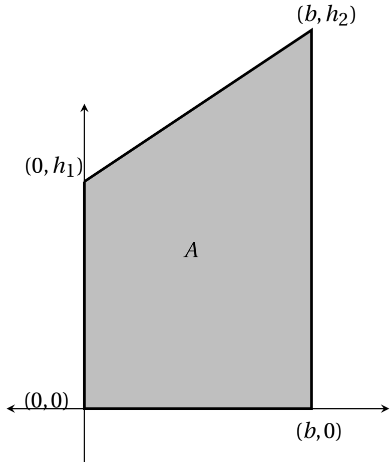
$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n}. \tag{1.3}$$

3. *Dado que $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, entonces si la cantidad de subintervalos "crece mucho", i.e., $n \to +\infty$, se tiene que $\Delta x \to 0$.*

Ejemplos 1.10. *1. Obtenga la fórmula para el área del trapezoide proporcionado en la figura:*



Trapezoide de área A



Trapezoide en el plano Π_{xy}

Al ubicar el trapezoide en el sistema de coordenadas con uno de sus vértices en el origen del plano Π_{xy}, se obtiene un cuadrilátero con las dimensiones de la figura, i.e., el trapezoide con alturas menor y mayor h_1 y h_2 respectivamente y base b. Así las cosas, la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0,h_1)$ y (b,h_2) es

$$f(x) = \frac{h_2 - h_1}{b} x + h_1.$$

Luego usando $\Delta x = \dfrac{b}{n}$ y $f\left(\dfrac{kb}{n}\right) = \dfrac{k(h_2-h_1)}{n} + h_1$, $a = 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k(h_2-h_1)}{n} + h_1 \right] \frac{b}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{b}{n^2}(h_2-h_1) \sum_{k=1}^{n} k + \frac{bh_1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1 \right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{b}{n^2}(h_2-h_1) \frac{n(n+1)}{2} + \frac{bh_1}{n} n \right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{b}{2}(h_2-h_1) \frac{n^2+n}{n^2} + bh_1 \right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{b(h_2-h_1)}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) + bh_1 \right].
\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1$, entonces:

$$A = \frac{b(h_2-h_1)}{2} + bh_1 = \frac{b(h_2 - h_1 + 2h_1)}{2} = \frac{h_1+h_2}{2} b.$$

2. a) *Suponga que* $y = ax^2 + bx + c \geq 0$ *sobre el intervalo* $[0, x_0]$. *Demuestre que el área bajo la gráfica* $\mathcal{G}_f$ *sobre* $[0, x_0]$ *está dada por* $A = a\dfrac{x_0^3}{3} + b\dfrac{x_0^2}{2} + cx_0$.

Usando $\Delta x = \dfrac{x_0}{n}$ *y* $f\left(\frac{kx_0}{n}\right) = a\dfrac{k^2x_0^2}{n^2} + b\dfrac{kx_0}{n} + c$, *se tiene que:*

$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(a\frac{k^2x_0^2}{n^2} + b\frac{kx_0}{n} + c\right)\frac{x_0}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(a\frac{x_0^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 + b\frac{x_0^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k + c\frac{x_0}{n}\sum_{k=1}^{n} 1\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(a\frac{x_0^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + b\frac{x_0^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + c\frac{x_0}{n}n\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(a\frac{x_0^3}{6}\frac{2n^3+3n^2+n}{n^3} + b\frac{x_0^2}{2}\frac{n^2+n}{n^2} + cx_0\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(a\frac{x_0^3}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) + b\frac{x_0^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) + cx_0\right) \\
A &= a\frac{x_0^3}{3} + b\frac{x_0^2}{2} + cx_0.
\end{aligned}
$$

b) *Use el ítem* a) *para encontrar el área bajo la gráfica* $\mathcal{G}_f$ *de* $y = f(x) = 6x^2 + 2x + 1$ *sobre el intervalo* $[2, 5]$.

Sean A_1 *el área bajo la gráfica sobre* $[0, 2]$ *y* A_2 *el área bajo la gráfica sobre* $[0, 5]$. *Luego el área bajo la gráfica sobre* $[2, 5]$ *es:*

$$
\begin{aligned}
A = A_2 - A_1 &= \left(6\frac{5^3}{3} + 2\frac{5^2}{2} + 1\cdot 5\right) - \left(6\frac{2^3}{3} + 2\frac{2^2}{2} + 1\cdot 2\right) \\
&= (250 + 25 + 5) - (16 + 4 + 2) \\
&= 258.
\end{aligned}
$$

3. *Use el Ejemplo 1.3(5) y la Regla de L'Hôpital* [1] *para calcular el área A bajo la gráfica de* $y = f(x) = e^{-x}$ *sobre el intervalo* $I = [0, 1]$.

Como $I = \left[0, 1\right]$ *y* $f(x) = e^{-x}$, *se tiene que* $\Delta x = \dfrac{1}{n}$, $x_k^* = k\Delta x = k\dfrac{1}{n}$ *y* $f(x_k^*) = \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^k$. *Luego el área del rectángulo k es* $A_{R_k} = f(x_k^*)\Delta x$ *y,*

[1] **http://www.100ciaquimica.net/biograf/cientif/L/lhopital.htm**

$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^k \frac{1}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \left[e^{-\frac{1}{n}} + \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^2 + \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^3 + \cdots + \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n \right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{n}}}{n} \left[1 + e^{-\frac{1}{n}} + \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^2 + \cdots + \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^{n-1} \right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{n}}}{n} \frac{1-\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{-\frac{1}{n}}} = (1-e^{-1}) \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1} && \text{(Ejemplo 1.3(5) con } r = e^{-\frac{1}{n}}\text{)} \\
&= (1-e^{-1}) \lim_{n\to+\infty} \frac{-\frac{1}{n^2}}{e^{\frac{1}{n}}\left(-\frac{1}{n^2}\right)} && \text{(Regla de L'Hôpital)} \\
&= (1-e^{-1}) \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{n}}} = (1-e^{-1}), && (\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1)
\end{aligned}
$$

i.e., $A = (1-e^{-1})$.

REFERENCIAS

1. ALBARRACÍN MANTILLA. A. A., *Notas de Clase Cálculo II.* Escuela de Matemáticas - UIS (2020/1).

2. LEITHOLD L. B., *El Cálculo,* 7^a *Ed.*. OXFORD Universityy Press, México, (1994).

3. ZILL D. G. & WRIGHT W. S., *Cálculo Trascendentes Tempranas,* 4^a *Ed.*. McGraW-Hill/Interamericana Editores S.A, México D.F (2011).