UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER - ESCUELA DE MATEMÁTICAS

Notas de Clase: **Cálculo II**

Alexander Holguín Villa

Octubre de 2020

1. REGLA DE SUSTITUCIÓN

En la sección anterior se concluyó a partir de la definición de *antiderivada* que, por cada fórmula de *derivación* de una cierta función se tiene una *antiderivada* o *integral indefinida* asociada. Sin embargo, muchas antiderivadas no pueden determinarse de esta manera y por ello se deben aprender ciertas técnicas o métodos de integración. En esta sección se analizará la "reversa de la **Regla de la Cadena**" En este análisis juega un papel relevante el concepto de **diferencial** de una función. Recuerde que:

$$u = h(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{d}u = h'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ejemplo 1.1 (**Motivación**). *Si* $y = f(x) = \frac{1}{10}\left(1+x^2\right)^{10}$*, entonces por la Regla de la Cadena se obtiene:*

$$D_x\left[\frac{1}{10}\left(1+x^2\right)^{10}\right] = \left(1+x^2\right)^9(2x).$$

Si se desea antiderivar $\left(1+x^2\right)^9(2x)$*, i.e., se desea calcular* $\int \left(1+x^2\right)^9(2x)\,\mathrm{d}x$.
Para tal efecto considere

$$g(x) = 1+x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad g'(x)\,\mathrm{d}x = 2x\,\mathrm{d}x.$$

Luego,

$$\int \left(1+x^2\right)^9(2x)\,\mathrm{d}x = \int \left[g(x)\right]^9\left[g'(x)\,\mathrm{d}x\right] \underbrace{=}_{\int u^9\,\mathrm{d}u = \frac{1}{10}u^{10}+C} \frac{1}{10}\left(1+x^2\right)^{10} + C.$$

El siguiente resultado justifica el procedimiento utilizado en el **Ejemplo - Motivación**, resultado que es el análogo a la *Regla de la Cadena* del cálculo diferencial y llamado comúnmente *Regla de sustitución.*

Teorema 1.2. *Si $u = g(x)$ es una función diferenciable cuyo rango R_g es un intervalo I, f es una función continua sobre I y F es una antiderivada de f sobre I, entonces*

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u = F\big(g(x)\big) + C.$$

Demostración. Dado que F es una antiderivada de f sobre el intervalo I, al usar la *Regla de la Cadena* a la función $F\big(g(x)\big)$ se obtiene que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F\big(g(x)\big) = F'\big(g(x)\big)g'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x),$$

luego de la definición de antiderivada

$$F\big(g(x)\big)+C = \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F\big(g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int F'\big(g(x)\big)g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f\big(g(x)\big)g'(x)\,\mathrm{d}x \underbrace{=}_{\mathrm{d}u=g'(x)\,\mathrm{d}x} \int f(u)\,\mathrm{d}u.$$

□

Recuerde que la derivada de la potencia de una función $y = f(x)$, $f^n(x)$, es un caso particular de la Regla de la Cadena y así usando el Teorema 1.2, si $g(x)$ es una función diferenciable y $n \neq -1$, entonces

$$\int \big[g(x)\big]^n g'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\big[g(x)\big]^{n+1}}{n+1} + C.$$

Ejemplos 1.3. *1. Evalúe las integrales dadas usando una sustitución idónea:*

a) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{4x}}\,\mathrm{d}x = \int e^{-4x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}e^u + C = -\frac{1}{4}e^{-4x} + C$, *con* $u = -4x$ *y* $\displaystyle -\frac{\mathrm{d}u}{4} = \mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x.$

Si $z = \sin(x)+\cos(x)$, *entonces* $\mathrm{d}z = -\big(\sin(x)-\cos(x)\big)\,\mathrm{d}x$. *Luego*

$$\int \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x = -\ln|\sin(x)+\cos(x)| + C.$$

2. *Calcule la antiderivada más general de* $\displaystyle\int \frac{1}{(a+b)+(a-b)x^2}\,\mathrm{d}x.$

Claramente,

$$\frac{1}{(a+b)+(a-b)x^2} = \frac{1}{a+b}\frac{1}{1+\frac{a-b}{a+b}x^2} = \frac{1}{a+b}\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}x\right)^2}.$$

Luego con $w = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}x$ *sigue que* $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\,\mathrm{d}w = \mathrm{d}x$ *y se tiene:*

$$\int \frac{1}{(a+b)+(a-b)x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\int \frac{1}{1+w^2}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}x\right)+C.$$

3. *Obtenga* $F(x)+C$ *si* $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. **Note que** *en el integrando aparecen las potencias racionales* $x^{1/4}$ *y* $x^{1/2}$*. Ahora bien,* $m.c.m(4,2)=4$ *y tomando* $z^4 = x$*, es claro que:*

$$4z^3\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}x, \qquad z = x^{1/4} \quad y \quad z^2 = x^{1/2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\left(1+z\right)^{1/3}}{z^2}4z^3\,\mathrm{d}z \\
&= 4\int z\left(1+z\right)^{1/3}\mathrm{d}z \qquad\qquad (1+z=w \text{ y } \mathrm{d}z=\mathrm{d}w) \\
&= 4\int (w-1)\,w^{1/3}\,\mathrm{d}w = 4\left[\frac{3}{7}w^{7/3}-\frac{3}{4}w^{4/3}\right]+C \\
&= 4\left[\frac{3}{7}\left(1+x^{1/4}\right)^{7/3}-\frac{3}{4}\left(1+x^{1/4}\right)^{4/3}\right]+C.
\end{aligned}$$

4. *Si* $\alpha > 0$ *es una constante, calcule* $I = \int \frac{1}{1+e^{-\alpha x}}\,\mathrm{d}x$.

   Como $\frac{1}{1+e^{-\alpha x}} = \frac{e^{\alpha x}}{e^{\alpha x}+1}$*, entonces con* $u = e^{\alpha x}+1$*,* $\mathrm{d}u = \alpha\left(e^{\alpha x}\right)\mathrm{d}x$ *y así,*

$$I = \int \frac{e^{\alpha x}}{e^{\alpha x}+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\int \frac{1}{e^{\alpha x}+1}\left(\alpha e^{\alpha x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\ln\left(e^{\alpha x}+1\right)+C,$$

   dado que $e^{\alpha x}+1>0$ *para cada valor de* $x \in \mathbb{R}$.

5. $\int \frac{e^{\arctan(x)}+x\ln(1+x^2)+1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

   Tomando $u = \arctan(x)$ *y* $w = \ln(1+x^2)$*, se obtiene que* $\mathrm{d}u = \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ *y* $\frac{\mathrm{d}w}{2} = \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$*. Por tanto,*

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{\arctan(x)}+x\ln(1+x^2)+1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}x\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int e^u\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int w\,\mathrm{d}w + \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= e^{\arctan(x)} + \frac{1}{4}\ln^2\left(1+x^2\right)+\arctan(x)+C.
\end{aligned}$$

Ejercicios 1.4. *1. Sean $a, b; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Determine en cada caso la antiderivada más general:*

a) $\displaystyle\int x\sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(ax)\cos(ax)}\,\mathrm{d}z.$

d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln(x)}}{x}\,\mathrm{d}x.$

e) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x.$

f) $\displaystyle\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x.$

g) $\displaystyle\int e^{\alpha x}\sqrt{a-be^{\alpha x}}\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2^x+3}.$[1]

i) $\displaystyle\int 3^{\alpha x}e^x\,\mathrm{d}x.$

j) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9-16x^2}}\,\mathrm{d}x.$

k) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,\mathrm{d}x.$

l) $\displaystyle\int \sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x.$

m) $\displaystyle\int \frac{1}{x(4-\ln^2(x))}\,\mathrm{d}x.$

n) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{2-\sin^4(x)}}\,\mathrm{d}x.$[2]

ñ) $\displaystyle\int \frac{e^{\arctan(x)}+x\ln(1+x^2)+1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

2. *Evalúe la integral indefinida dada. Suponga en cada caso que f es una función diferenciable:*

a) $\displaystyle\int f'(8x)\,\mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int xf'(5x^2)\,\mathrm{d}x.$

c) $\displaystyle\int \sqrt{f(2x)}f'(2x)\,\mathrm{d}x.$

d) $\displaystyle\int \frac{f'(3x+1)}{f(3x+1)}\,\mathrm{d}x.$

3. *Evalúe en cada caso:*

a) $\displaystyle\int f^{(2)}(4x)\,\mathrm{d}x,\ f(x)=\sqrt{x^4+1}.$

b) $\displaystyle\int \left\{\int \sec^2(3x)\,\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}x.$

4. *Sean $a\neq 0, b, c \in \mathbb{R}$ y considere integrales del tipo* $\displaystyle\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{ax^2+bx+c}}\,\mathbf{dx}$:

a) *Obtenga que*

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right] \underbrace{=}_{\text{CONCLUYA}} \begin{cases} a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+K^2\right], & si\ \frac{c}{a}>\frac{b^2}{4a^2},\\ a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-K^2\right], & si\ \frac{c}{a}<\frac{b^2}{4a^2}.\end{cases}$$

b) *Concluya* **usando un cambio variable** *adecuado que*

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{u^2\pm K^2}\,\mathrm{d}u$$

y obtenga las posibles respuestas para la integral **inicial**.

---

[1] $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{b}\left(1-\frac{a}{a+b}\right)$ ó tome $u=2^x+3$ y re-escriba la fracción de manera adecuada.

[2] Tome $w=\sin^2(x)$.

c) *Use lo anterior para obtener:*

i) $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{11}}\tan^{-1}\left(\frac{3x-1}{\sqrt{11}}\right)+C.$

ii) $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2-5x+7}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{31}}\arctan\left(\frac{4x-5}{\sqrt{31}}\right)+C.$

5. *Sean* $a\neq 0, b, c; A\neq 0, B\in\mathbb{R}$ *y considere integrales del tipo* $\displaystyle\int \frac{\mathbf{Ax+B}}{\mathbf{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{dx}$ *y* **use el hecho** *que si* $u=ax^2+bx+c$*, entonces* $\mathrm{d}u=(2ax+b)\,\mathrm{d}x$ *para:*

   a) *Establecer*

$$I=\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x=\int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x.$$

   b) *Escriba la integral* I **anterior** *como la suma de dos integrales,* $I=I_1+I_2$*. Use el* **cambio de variable** *evidente y el ítem* 4(a) *para obtener la antiderivada más general de* $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x.$

   c) *Use el ítem anterior para obtener*

$$\int \frac{7x+1}{6x^2+x-1}\,\mathrm{d}x=\int \frac{\frac{7}{12}(12x+1)+\left(1-\frac{7}{12}\right)}{6x^2+x-1}\,\mathrm{d}x=\frac{7}{12}\ln|6x^2+x-1|+\frac{5}{12}\int \frac{1}{6x^2+x-1}\,\mathrm{dx}+\mathbf{C}.$$

   Use el ítem 4(a) *para obtener la* **antiderivada** *en rojo.*

6. *Realice un tratamiento similar con integrales del tipo* $\displaystyle\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}}}$ *y* $\displaystyle\int \frac{\mathbf{Ax+B}}{\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}}}\,\mathrm{dx}.$

   Use su razonamiento para obtener:

   a) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x+\mathbf{2}\int \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{(x+1)^2+1}}}\,\mathrm{dx}+\mathbf{C}.$[3]

   b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2-3x-4x^2}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{41}}{4}\right)^2-\left[2\left(x+\frac{3}{8}\right)\right]^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sin^{-1}\left(\frac{\mathbf{8x+3}}{\sqrt{\mathbf{41}}}\right)+\mathbf{C}.$

REFERENCIAS

1. ALBARRACÍN MANTILLA. A. A., *Notas de Clase Cálculo II*. Escuela de Matemáticas - UIS (2020/1).

2. LEITHOLD L. B., *El Cálculo, 7^a Ed.*. OXFORD Universityy Press, México, (1994).

3. ZILL D. G. & WRIGHT W. S., *Cálculo Trascendentes Tempranas, 4^a Ed.*. McGraW-Hill/Interamericana Editores S.A, México D.F (2011).

[3] ¿$\dfrac{d}{dx}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$?