UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER - ESCUELA DE MATEMÁTICAS

Notas de Clase: **Cálculo II**

Alexander Holguín Villa

Octubre de 2020

1. LA INTEGRAL DEFINIDA

En *cálculo diferencial* uno de los problemas abordados es:

- Dada una función f, encontrar su derivada f'.

En el presente curso uno de los propósitos es ver la importancia del problema "inverso", i.e., dada una función f, determinar una otra función F tal que $F' = f$. En otras palabras, pensamos en la función dada f como una *derivada*, o lo que es lo mismo se pretende encontrar una función F con derivada f, $F' = f$, para cada x en algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Comenzamos con la siguiente definición

Definición 1.1 (Antiderivada). *Una función F es llamada una antiderivada de una función f sobre algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$, si $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.*

Ejemplos 1.2.

1. *Una antiderivada de $f(x) = (\pi^2+1)$ es $F(x) = (\pi^2+1)x$, puesto que $F'(x) = \pi^2 + 1$. Otra antiderivada de $f(x) = (\pi^2 + 1)$ es $F_1(x) = (\pi^2 + 1)x - 5$.*

2. *Si F es la función definida por*

$$F(x) = 4x^3 + x^2 + 5,$$

entonces $F'(x) = 12x^2 + 2x$. Por tanto si f es la función dada por $f(x) = 12x^2 + 2x$, f es la derivada de F y F es la antiderivada de f. Igual que en el ejemplo anterior, $F_1(x) = 4x^3 + x^2 + 5 + e^{\pi}$ también es una antiderivada de $f(x) = 12x^2 + 2x$.

Como pudo observarse en los ejemplos ilustrativos anteriores, una función f siempre tiene más de una antiderivada. Tal observación es un hecho general. Más exactamente:

Suponga que F es una antiderivada de f en un intervalo I. Sea G cualquier otra antiderivada de f en I y considere la función $h(x) = G(x) - F(x)$. Dado que $F'(x) = f(x) = G'(x)$ para cada $x \in I$, entonces $h'(x) = G'(x) - F'(x) = 0$ sobre I. Sean $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. Sigue del *teorema del valor medio*[1] que la función h sobre $[x_1, x_2]$, verifica que existe un número $c \in (x_1, x_2)$ tal que $h'(c)(x_2 - x_1) = h(x_2) - h(x_1)$. Como $h(x) = 0$ para cada $x \in I$, entonces sigue que $h(x_2) - h(x_1) = 0$ y así $h(x_2) = h(x_1)$ para todos los x_1, x_2 en I con $x_1 \neq x_2$, i.e., $h(x) = C$ y finalmente $G(x) = F(x) + C$.

Hemos demostrado.

Teorema 1.3 (**Antiderivadas difieren por una constante).** *Si F es una antiderivada particular de f en un intervalo I, entonces toda antiderivada de f en I es de la forma $F(x) + C$, donde C es una constante arbitraria.*

Observación 1.4 (**Notación para Antiderivadas).**

1. *Por conveniencia se introduce la notación para una antiderivada de una función. Si $F'(x) = f(x)$, la antiderivada más general de f se representa por*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C. \tag{1.1}$$

El símbolo $\int$ denominado signo integral fue introducido por Leibniz y la notación $\int f\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ se denomina **integral indefinida** *de $f(x)$ respecto a x. A f se le llama* **integrando** *y a C constante de integración. El proceso de encontrar una antiderivada se denomina* **antiderivación** *o* **integración**.

2. *En esencia difereciación e integración son operaciones inversas una de la otra y si F es antiderivada de f, entonces $F' = f$ y así de la ecuación 1.1*

$$\int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C, \tag{1.2}$$

i.e., "una antiderivada de la derivada de una función es esa función más una constante".

3. *Ahora bien al derivar expresión 1.1, se obtiene*

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\int f\,\mathrm{d}x = \frac{d}{\mathrm{d}x}\big(F(x) + C\big) = F'(x) = f(x), \tag{1.3}$$

en otras palabras, "la derivada de una antiderivada de una función es esa función".

4. *De lo anterior es claro que siempre que se obtenga la derivada de una función, al mismo tiempo se obtiene una antiderivada, en particular,*

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{d}{\mathrm{d}x}\frac{x^{n+1}}{n+1}\,\mathrm{d}x = \int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$$

[1] Sea g una función continua sobre el intervalo $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b). Entonces existe c en (a, b) tal que $g'(c)(b - a) = g(b) - g(a)$.

Ejemplos 1.5. *1. Evalúe la integral indefinida* $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Como $\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} = (x+1)^2x^{-1/2} = (x^2+2x+1)x^{-1/2} = x^{3/2}+2x^{1/2}+x^{-1/2}$*, entonces*

$$\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int (x^{3/2}+2x^{1/2}+x^{-1/2})\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x^{5/2}+\frac{4}{3}x^{3/2}+2x^{1/2}+C.$$

2. *Encuentre una función* $y = f(x)$ *de modo que* $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$*, y* $f(9) = 1$.

   En efecto,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = 2x^{1/2}+C,$$

   i.e., $f(x) = 2x^{1/2}+C$ *y de la condición inicial* $f(9) = 1$, $1 = 2\sqrt{9}+C = 6+C$. *Por tanto,* $C = -5$ *y en consecuencia* $f(x) = 2x^{1/2}-5$.

Teorema 1.6. *Sean* $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$ *y* k *una constante arbitraria, entonces*

1. $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x = kF(x)+C.$
2. $\int (f(x)\pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\pm G(x)+C.$
3. *Más aún, si* $F_1'(x) = f_1(x), F_2'(x) = f_2(x), \ldots, F_n'(x) = f_n(x)$ *y* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ *constantes, entonces*

$$\int \Big(\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x)+\cdots+\alpha_n f_n(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \alpha_1F_1(x)+\alpha_2F_2(x)+\cdots+\alpha_nF_n(x).$$

Observación 1.7. *Recordemos que si* $p(x)$ *es un polinomio de grado* n*, éste se denota por* $p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots, a_nx^n$. *Sea* $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ *una función racional. Si el grado de la función polinomial* $p(x)$ *es mayor que o igual al grado de la función polinomial* $q(x)$*, se realiza la división antes de integrar y se obtiene:* $\frac{p(x)}{q(x)} = s(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$*, donde* $s(x)$ *es un polinomio con grado menor que el de* $p(x)$ *y* $r(x)$ *es un polinomio con grado menor que el grado del polinomio* $q(x)$.

Ejemplos 1.8. *1. Evaluar la integral indefinida* $\int \frac{x^6}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Como $\frac{x^6}{1+x^2} = x^4-x^2+1-\frac{1}{1+1+x^2}$*, entonces*

$$\int \frac{x^6}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(x^4-x^2+1-\frac{1}{1+1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+x-\arctan(x)+C.$$

2. *Dado que* $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sen}(\pi x) = \pi\cos(\pi x)$*. Encuentre una antiderivada* F *de* $\cos(\pi x)$ *que tenga la propiedad de que* $F\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$.

   Dado que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sen}(\pi x) = \pi\cos(\pi x)$*, la antiderivada* F *de* $\cos(\pi x)$ *debe ser de la forma* $\dfrac{1}{\pi}\operatorname{sen}(\pi x) + C$*. Por tanto de la condición* $F\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$*, se obtiene que* $C = \dfrac{1}{\pi}$ *y así* $F(x) = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{sen}(\pi x) + \dfrac{1}{\pi}$.

3. *Simplifique la expresión* $e^{4\int \frac{\mathrm{d}x}{x}}$.

   Recuerde que $y = b^x$ *si y solo si,* $x = \log_b(y)$*. Por tanto,* $y = b^x = b^{\log_b(y)}$*. Luego,*

$$e^{4\int \frac{\mathrm{d}x}{x}} = e^{4\ln(|x|)+K} = e^{\ln(x^4)}e^K = Ce^{\ln(x^4)} = Cx^4.$$

Observación 1.9. *Usando la Definición 1.1 y la expresión 1.1, se tienen las siguientes antiderivadas:*

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + C.$

(ii) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) + C.$

(iii) $\displaystyle\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \sec^{-1}(x) + C.$

(iv) $\displaystyle\int b^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln(b)}b^x + C.$

Recuerde que $b > 0$ *y* $b \neq 1$*. En el caso particular que* $b = e$*, es claro que* $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$.

Ejercicios 1.10.

1. *Evalúe la integral* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

2. *Si* $F(x)$ *es una antiderivada de* $f(x)$*, use la* **definición de antiderivada** *general para establecer que si* $a \neq o$*:*

$$\int f(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax)+C_1, \quad \int f(x+b)\,\mathrm{d}x = F(x+b)+C_2 \ \text{ y } \ \int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)+C_3.$$

3. *Use una identidad trigonométrica para evaluar la integral indefinida* $\displaystyle\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$.

4. *Use la* **definición de antiderivada** *para comprobar que*

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + C.$$

5. *Si* $f^{(n)} = 0$*, ¿cuál es una expresión general para* $y = f(x)$*?*

6. *Desarrolle* **cada uno** *de los siguientes ítem:*
   i) *Si* $f(x) = |x|$ *y* F *está dada por*

   $$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2, & si\ x < 0, \\ \frac{1}{2}x^2, & si\ x \geq 0. \end{cases}$$

   ¿Es F *una antiderivada de* f*, dónde lo es?* **Justifique** *su respuesta.*

   ii) *Sean* $f(x) = 1$ *para todo* $x \in (-1, 1)$ *y* $g(x)$ *dada por*

   $$g(x) = \begin{cases} -1, & si\ -1 < x \leq 0, \\ 1, & si\ 0 < x < 10. \end{cases}$$

   Entonces $f'(x) = 0$ *para todo* $x \in (-1, 1)$ *y* $g(x) = 0$ *siempre que* g' *exista en* $(-1, 1)$.
   ¿Es cierto que $f(x) = g(x) + K,\ K \in \mathbb{R}$*?* **Justifique su respuesta**

7. *Determine en cada caso la antiderivada más general:*

$$\int \frac{3\tan(\theta) - 4\cos^2(\theta)}{\cos(\theta)}\, \mathrm{d}\theta \quad y \quad \int (2\cot^2(\theta) - 3\tan^2(\theta))\, \mathrm{d}\theta.$$

REFERENCIAS

1. ALBARRACÍN MANTILLA. A. A., *Notas de Clase Cálculo II.* Escuela de Matemáticas - UIS (2020/1).

2. LEITHOLD L. B., *El Cálculo,* 7^a *Ed.*. OXFORD Universityy Press, México, (1994).

3. ZILL D. G. & WRIGHT W. S., *Cálculo Trascendentes Tempranas,* 4^a *Ed.*. McGraW-Hill/Interamericana Editores S.A, México D.F (2011).