Algunas propiedades de Lie en álgebras de grupo

Sustentación trabajo de grado

Gerson Leonel Barajas Ávila
Director: Alexander Holguín-Villa

Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas

Bucaramanga, Febrero 8.

Índice

Definición 1.1

Sean G un grupo y $* : G \to G$ una aplicación de grupos. Se dice que $*$ es una involución para G, si

(i) $(gh)^* = h^* g^*$, *para todos* $g, h \in G$,

(ii) $(g^*)^* = g$, *para todo* $g \in G$.

Definición 1.1

Sean G un grupo y $*: G \to G$ una aplicación de grupos. Se dice que $*$ es una involución para G, si

(i) $(gh)^* = h^*g^*$, *para todos* $g, h \in G$,

(ii) $(g^*)^* = g$, *para todo* $g \in G$.

Definición 1.2

Sean G un grupo y $\mathbb{F}$ un cuerpo. Si $\sigma : G \to \mathcal{U}(\mathbb{F})$ es un homomorfismo de grupos, σ es llamado una orientación de grupo.

Definición 1.1

Sean G un grupo y $*: G \to G$ una aplicación de grupos. Se dice que $*$ es una involución para G, si

(i) $(gh)^* = h^*g^*$, *para todos* $g, h \in G$,

(ii) $(g^*)^* = g$, *para todo* $g \in G$.

Definición 1.2

Sean G un grupo y $\mathbb{F}$ un cuerpo. Si $\sigma : G \to \mathcal{U}(\mathbb{F})$ es un homomorfismo de grupos, σ es llamado una orientación de grupo.

Definición 1.3

Un grupo G se dice que posee la propiedad de "conmutatividad limitada" (o que es un LC - grupo), si para cualquier par de elementos $g, h \in G$, tales $gh = hg$, implica que g, h, o gh es central en G.

Definición 1.4

*Un anillo R se dice **semiprimo**, si no tiene ideales nilpotentes no triviales,*

Definición 1.4

Un anillo R se dice ***semiprimo****, si no tiene ideales nilpotentes no triviales,o equivalentemente, si la intersección de todos sus ideales primos es* $\{0\}$.

Definición 1.4

Un anillo R se dice ***semiprimo****, si no tiene ideales nilpotentes no triviales,o equivalentemente, si la intersección de todos sus ideales primos es $\{0\}$.*

Sea R un anillo con unidad, si la aplicación $\star : R \to R$ es un anti- automorfismo de orden 2, $\star$ es llamada una involución y R un anillo con involución.

Definición 1.4

*Un anillo R se dice **semiprimo**, si no tiene ideales nilpotentes no triviales,o equivalentemente, si la intersección de todos sus ideales primos es $\{0\}$.*

Sea R un anillo con unidad, si la aplicación $\star : R \to R$ es un anti- automorfismo de orden 2, $\star$ es llamada una involución y R un anillo con involución.

Definición 1.5

*Un anillo R con involución $\star$ es llamado **semi-normal** si $rr^\star = 0$ implica que $r^\star r = 0$, para todo $r \in R$.*

Definición 1.4

*Un anillo R se dice **semiprimo**, si no tiene ideales nilpotentes no triviales,o equivalentemente, si la intersección de todos sus ideales primos es $\{0\}$.*

Sea R un anillo con unidad, si la aplicación $\star : R \to R$ es un anti- automorfismo de orden 2, $\star$ es llamada una involución y R un anillo con involución.

Definición 1.5

*Un anillo R con involución $\star$ es llamado **semi-normal** si $rr^\star = 0$ implica que $r^\star r = 0$, para todo $r \in R$. En este caso, $\star$ es llamada **definida positiva** sobre R.*

Definición 1.4

*Un anillo R se dice **semiprimo**, si no tiene ideales nilpotentes no triviales,o equivalentemente, si la intersección de todos sus ideales primos es $\{0\}$.*

Sea R un anillo con unidad, si la aplicación $\star : R \to R$ es un anti- automorfismo de orden 2, $\star$ es llamada una involución y R un anillo con involución.

Definición 1.5

*Un anillo R con involución $\star$ es llamado **semi-normal** si $rr^\star = 0$ implica que $r^\star r = 0$, para todo $r \in R$. En este caso, $\star$ es llamada **definida positiva** sobre R.*
*Si $rr^\star = r^\star r$ para todo $r \in R$, R será llamado **anillo normal**.*

Sea R un anillo con 1_R y G un grupo (no necesariamente finito). Denotamos por RG al conjunto de sumas formales

Sea R un anillo con 1_R y G un grupo (no necesariamente finito). Denotamos por RG al conjunto de sumas formales

$$RG = \left\{ \sum_{g \in G} r_g g \mid r_g \in R, \text{ c.s. } \alpha_g = 0 \right\}.$$

Sea R un anillo con 1_R y G un grupo (no necesariamente finito). Denotamos por RG al conjunto de sumas formales

$$RG = \left\{ \sum_{g \in G} r_g g \mid r_g \in R,\ \text{c.s. } \alpha_g = 0 \right\}.$$

(+) $\sum_{g \in G} r_g g + \sum_{g \in G} s_g g = \sum_{g \in G} (r_g + s_g) g,$

Sea R un anillo con 1_R y G un grupo (no necesariamente finito). Denotamos por RG al conjunto de sumas formales

$$RG = \left\{ \sum_{g \in G} r_g g \mid r_g \in R, \text{ c.s. } \alpha_g = 0 \right\}.$$

$(+)$ $\sum_{g \in G} r_g g + \sum_{g \in G} s_g g = \sum_{g \in G} (r_g + s_g) g,$

$(\cdot)$ $\left(\sum_{g \in G} r_g g \right) \left(\sum_{h \in G} s_h h \right) = \sum_{i \in G} t_i i, \text{ donde } t_i = \sum_{gh = i} (r_g s_h).$

Sea R un anillo con 1_R y G un grupo (no necesariamente finito). Denotamos por RG al conjunto de sumas formales

$$RG = \left\{ \sum_{g \in G} r_g g \mid r_g \in R, \text{ c.s. } \alpha_g = 0 \right\}.$$

$(+)$ $\sum_{g\in G} r_g g + \sum_{g\in G} s_g g = \sum_{g\in G} (r_g + s_g) g,$

$(\cdot)$ $\left(\sum_{g\in G} r_g g\right)\left(\sum_{h\in G} s_h h\right) = \sum_{i\in G} t_i i, \text{ donde } t_i = \sum_{gh=i} (r_g s_h).$

RG bajo estas operaciones es un anillo con 1_{RG}.

Se define ahora el producto entre elementos de R y elementos de RG de la siguiente manera:

Se define ahora el producto entre elementos de R y elementos de RG de la siguiente manera:

$$\lambda\left(\sum_{g\in G} r_g g\right) = \sum_{g\in G} (\lambda r_g)g, \text{ con } \lambda \in R.$$

Se define ahora el producto entre elementos de R y elementos de RG de la siguiente manera:

$$\lambda\left(\sum_{g\in G} r_g g\right) = \sum_{g\in G} (\lambda r_g)g, \text{ con } \lambda \in R.$$

Note que con este producto se puede ver a RG como un R-módulo.

Se define ahora el producto entre elementos de R y elementos de RG de la siguiente manera:

$$\lambda\left(\sum_{g\in G} r_g g\right) = \sum_{g\in G} (\lambda r_g) g, \text{ con } \lambda \in R.$$

Note que con este producto se puede ver a RG como un R-módulo.
Además cuando R es conmutativo, RG es llamado el álgebra de grupo de G sobre R.

Se define ahora el producto entre elementos de R y elementos de RG de la siguiente manera:

$$\lambda\left(\sum_{g\in G} r_g g\right) = \sum_{g\in G}(\lambda r_g)g, \text{ con } \lambda \in R.$$

Note que con este producto se puede ver a RG como un R-módulo.
Además cuando R es conmutativo, RG es llamado el álgebra de grupo de G sobre R.

Proposición 1.6 (Involución en RG)

Sean R un anillo conmutativo y G un grupo con involución $*$. Si σ es una orientación sobre G, la aplicación $\circledast : RG \to RG$ definida por

$$\left(\sum_{g\in G} r_g g\right)^{\circledast} = \sum_{g\in G} r_g \sigma(g) g^*,$$

es una involución sobre RG.

Definición 1.7

Definimos los conjuntos de elementos simétricos y anti-simétricos de FG*, denotados por* $(FG)^+$ *y* $(FG)^-$ *respectivamente, como:*

Definición 1.7

Definimos los conjuntos de elementos simétricos y anti-simétricos de FG, *denotados por* $(FG)^+$ *y* $(FG)^-$ *respectivamente, como:*

$$(FG)^+ = \{\alpha \in FG : \alpha^{\circledast} = \alpha\},$$

$$(FG)^- = \{\alpha \in FG : \alpha^{\circledast} = -\alpha\}.$$

Definición 1.7

Definimos los conjuntos de elementos simétricos y anti-simétricos de FG, denotados por $(FG)^+$ y $(FG)^-$ respectivamente, como:

$$(FG)^+ = \{\alpha \in FG : \alpha^{\circledast} = \alpha\},$$

$$(FG)^- = \{\alpha \in FG : \alpha^{\circledast} = -\alpha\}.$$

Definición 1.8 (Corchete de Lie)

Sobre un anillo asociativo R definimos el "corchete de Lie" como

$$[x_1, x_2] = x_1 x_2 - x_2 x_1$$

Definición 1.7

Definimos los conjuntos de elementos simétricos y anti-simétricos de FG, denotados por $(FG)^+$ y $(FG)^-$ respectivamente, como:

$$(FG)^+ = \{\alpha \in FG : \alpha^{\circledast} = \alpha\},$$

$$(FG)^- = \{\alpha \in FG : \alpha^{\circledast} = -\alpha\}.$$

Definición 1.8 (Corchete de Lie)

Sobre un anillo asociativo R definimos el "corchete de Lie" como

$$[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$$

y de forma recursiva se tiene que

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}] = [[x_1, x_2, \ldots, x_n], x_{n+1}]$$

Definición 1.9 (Lie nilpotente)

Sea S un subconjunto de R un anillo asociativo. Decimos que S es Lie nilpotente si existe $n \geq 2$ tal que para todo $a_i \in S$,

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = 0.$$

Definición 1.9 (Lie nilpotente)

Sea S un subconjunto de R un anillo asociativo. Decimos que S es Lie nilpotente si existe $n \geq 2$ tal que para todo $a_i \in S$,

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = 0.$$

Escribiremos $S \in \eta_L$ para decir que S es Lie nilpotente.

Definición 1.10 (Lie n-Engel)

Sea S un subconjunto de R. Decimos que S es Lie n-Engel si existe $n \geq 2$ tal que para todo $a, b \in S$,

$$[a, \underbrace{b, \ldots, b}_{n \ veces}] = 0$$

Definición 1.9 (Lie nilpotente)

Sea S un subconjunto de R un anillo asociativo. Decimos que S es Lie nilpotente si existe $n \geq 2$ tal que para todo $a_i \in S$,

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = 0.$$

Escribiremos $S \in \eta_L$ para decir que S es Lie nilpotente.

Definición 1.10 (Lie n-Engel)

Sea S un subconjunto de R. Decimos que S es Lie n-Engel si existe $n \geq 2$ tal que para todo $a, b \in S$,

$$[a, \underbrace{b, \ldots, b}_{n \ veces}] = 0$$

Escribiremos $S \in \xi_{\mathrm{L}}$ para decir que S es Lie n-Engel.

Definición 1.9 (Lie nilpotente)

Sea S un subconjunto de R un anillo asociativo. Decimos que S es Lie nilpotente si existe $n \geq 2$ tal que para todo $a_i \in S$,

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = 0.$$

Escribiremos $S \in \eta_L$ para decir que S es Lie nilpotente.

Definición 1.10 (Lie n-Engel)

Sea S un subconjunto de R. Decimos que S es Lie n-Engel si existe $n \geq 2$ tal que para todo $a, b \in S$,

$$[a, \underbrace{b, \ldots, b}_{n \ veces}] = 0$$

Escribiremos $S \in \xi_{\mathrm{L}}$ para decir que S es Lie n-Engel.

Claramente si $S \in \eta_L$ entonces $S \in \xi_{\mathrm{L}}$.

Involución de grupo orientada Generalizada

Lema 2.1

Sea G un grupo tal que $\tilde{\zeta}(G) = \left\{z^{-1}z^* : z \in \zeta(G)\right\}$ es infinito. Si $\alpha \in \mathbb{F}G$ es tal que $\left(\sigma(z)z^{-1}z^* - 1\right)\alpha = 0$, para todo $z \in \zeta$, entonces $\alpha = 0$.

Involución de grupo orientada Generalizada

Lema 2.1

Sea G un grupo tal que $\tilde{\zeta}(G) = \left\{z^{-1}z^* : z \in \zeta(G)\right\}$ es infinito. Si $\alpha \in \mathbb{F}G$ es tal que $\left(\sigma(z)z^{-1}z^* - 1\right)\alpha = 0$, para todo $z \in \zeta$, entonces $\alpha = 0$.

Teorema 2.2

Sea G un grupo tal que $\tilde{\zeta}(G) = \{z^{-1}z^* : z \in \zeta(G)\}$ es un conjunto infinito. Si $\mathbb{F}G$ satisface una $\circledast$ - IP (con $g \overset{\circledast}{\mapsto} \sigma(g)g^*$) de grado n, entonces $\mathbb{F}G$ satisface una IP de grado $\partial \leq n$.

Involución de grupo orientada Generalizada

Lema 2.1

Sea G un grupo tal que $\tilde{\zeta}(G) = \left\{z^{-1}z^* : z \in \zeta(G)\right\}$ es infinito. Si $\alpha \in \mathbb{F}G$ es tal que $\left(\sigma(z)z^{-1}z^* - 1\right)\alpha = 0$, para todo $z \in \zeta$, entonces $\alpha = 0$.

Teorema 2.2

Sea G un grupo tal que $\tilde{\zeta}(G) = \{z^{-1}z^* : z \in \zeta(G)\}$ es un conjunto infinito. Si $\mathbb{F}G$ satisface una $\circledast$ - IP (con $g \overset{\circledast}{\mapsto} \sigma(g)g^*$) de grado n, entonces $\mathbb{F}G$ satisface una IP de grado $\partial \leq n$.

Corolario 2.3

Sea G un grupo tal que $\tilde{\zeta}(G)$ es un conjunto infinito. Entonces, $\mathbb{F}G^+$ o $\mathbb{F}G^-$ es Lie nilpotente de índice n, si y solo si, $\mathbb{F}G$ es Lie nilpotente de índice n.

Involución clásica orientada generalizada

Lema 3.1

Sean $g, h \in G$ *tales que* $g^2 \neq 1$ *y* $h^2 \neq 1$, *y* $\sigma : G \to \mathcal{U}(\mathbb{F})$ *una orientación no trivial. Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

Involución clásica orientada generalizada

Lema 3.1

Sean $g, h \in G$ *tales que* $g^2 \neq 1$ *y* $h^2 \neq 1$, *y* $\sigma : G \to \mathcal{U}(\mathbb{F})$ *una orientación no trivial. Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

(*i*) *Si* $[g + g^{-1}, h + h^{-1}] = 0$, *entonces:*

(*a*) $gh \in \{hg, hg^{-1}, h^{-1}g\}$ *o,*

(*b*) $(g^{\alpha} h^{\beta})^2 = 1$, $\forall \alpha, \beta \in \{-1, 1\}$.

Involución clásica orientada generalizada

Lema 3.1

Sean $g, h \in G$ tales que $g^2 \neq 1$ y $h^2 \neq 1$, y $\sigma : G \to \mathcal{U}(\mathbb{F})$ una orientación no trivial. Las siguientes afirmaciones son verdaderas:

(i) *Si* $[g + g^{-1}, h + h^{-1}] = 0$, *entonces:*

- (a) $gh \in \{hg, hg^{-1}, h^{-1}g\}$ *o,*
- (b) $(g^{\alpha}h^{\beta})^2 = 1, \forall \alpha, \beta \in \{-1, 1\}$.

(ii) *Si* $[g - g^{-1}, h - h^{-1}] = 0$, *entonces:*

- (a) $gh = hg$ *o,*
- (b) $(g^{\alpha}h^{\beta})^2 = 1, \forall \alpha, \beta \in \{-1, 1\}$.

(iii) *Si* $[g - g^{-1}, h + h^{-1}] = 0$, *entonces:*

- (a) $gh \in \{hg, h^{-1}g\}$ *o,*
- (b) $o(g) = 4 = o(h)$ *y* $g^2 = h^2$.

Involución clásica orientada generalizada

Lema 3.1

Sean $g, h \in G$ tales que $g^2 \neq 1$ y $h^2 \neq 1$, y $\sigma : G \to \mathcal{U}(\mathbb{F})$ una orientación no trivial. Las siguientes afirmaciones son verdaderas:

(i) *Si* $[g+g^{-1}, h+h^{-1}] = 0$, *entonces:*
  (a) $gh \in \{hg, hg^{-1}, h^{-1}g\}$ *o,* (b) $(g^\alpha h^\beta)^2 = 1$, $\forall \alpha, \beta \in \{-1, 1\}$.

(ii) *Si* $[g-g^{-1}, h-h^{-1}] = 0$, *entonces:*
  (a) $gh = hg$ *o,* (b) $(g^\alpha h^\beta)^2 = 1$, $\forall \alpha, \beta \in \{-1, 1\}$.

(iii) *Si* $[g-g^{-1}, h+h^{-1}] = 0$, *entonces:*
  (a) $gh \in \{hg, h^{-1}g\}$ *o,* (b) $o(g) = 4 = o(h)$ *y* $g^2 = h^2$.

(iv) *Si* $[g+g^{-1}, h+\sigma(h)h^{-1}] = 0$ *y* $\sigma(h) \neq \pm 1$, *entonces:*
  (a) $gh \in \{hg, hg^{-1}\}$ *o,* (b) $o(g) = 4 = o(h)$ *y* $g^2 = h^2$.

(v) *Si* $[g+\sigma(g)g^{-1}, h+\sigma(h)h^{-1}] = 0$, $\sigma(g) \neq \pm 1$ *y* $\sigma(h) \neq \pm 1$, *entonces :*
  (a) $gh \in \{hg, hg^{-1}\}$ *o,* (b) $o(g) = 4 = o(h)$ *y* $g^2 = h^2$.

(vi) *Si* $[g-g^{-1}, h+\sigma(h)h^{-1}] = 0$ *y* $\sigma(h) \neq \pm 1$, *entonces:*

Lema 3.2

Suponga que $\mathbb{F}G^{+}$ es Lie n - Engel para algún n, con $char(\mathbb{F}) \neq 2$. Entonces, todo elementos $g \in N$ de orden 2 es central en G.

Lema 3.2

Suponga que $\mathbb{F}G^+$ *es Lie* n *- Engel para algún* n, *con* $char(\mathbb{F}) \neq 2$. *Entonces, todo elementos* $g \in N$ *de orden 2 es central en* G.

Lema 3.3

Sea $G = \langle a, b \rangle$, *con* a, b *tales que* $b^{-1}ab = a^{-1}$. *Si* G *no tiene elementos de orden 2, entonces* $\mathbb{F}G^+$ *y* $\mathbb{F}G^-$ *no son Lie* n *- Engel.*

Lema 3.2

Suponga que $\mathbb{F}G^+$ *es Lie* n *- Engel para algún* n*, con char*$(\mathbb{F}) \neq 2$*. Entonces, todo elementos* $g \in N$ *de orden 2 es central en* G*.*

Lema 3.3

Sea $G = \langle a, b \rangle$*, con* a, b *tales que* $b^{-1}ab = a^{-1}$*. Si* G *no tiene elementos de orden 2, entonces* $\mathbb{F}G^+$ *y* $\mathbb{F}G^-$ *no son Lie* n *- Engel.*

Lema 3.4

Sea $G = \langle g, h \rangle$ *con* g, h *tales que* $[g + c_1 g^{-1}, h + c_2 h^{-1}] = 0$ *para algunos* c_1 *y* c_2 *en* $\mathbb{F}$*. Suponga que* G *no contiene elementos de orden 2. Si* $\mathbb{F}G^+$ *o* $\mathbb{F}G^-$ *es Lie* n *- Engel, entonces* G *es abeliano.*

Lema 3.2

Suponga que $\mathbb{F}G^+$ *es Lie* n *- Engel para algún* n*, con char*$(\mathbb{F}) \neq 2$*. Entonces, todo elementos* $g \in N$ *de orden 2 es central en* G*.*

Lema 3.3

Sea $G = \langle a, b \rangle$*, con* a, b *tales que* $b^{-1}ab = a^{-1}$*. Si* G *no tiene elementos de orden 2, entonces* $\mathbb{F}G^+$ *y* $\mathbb{F}G^-$ *no son Lie* n *- Engel.*

Lema 3.4

Sea $G = \langle g, h \rangle$ *con* g, h *tales que* $[g + c_1 g^{-1}, h + c_2 h^{-1}] = 0$ *para algunos* c_1 *y* c_2 *en* $\mathbb{F}$*. Suponga que* G *no contiene elementos de orden 2. Si* $\mathbb{F}G^+$ *o* $\mathbb{F}G^-$ *es Lie* n *- Engel, entonces* G *es abeliano.*

Lema 3.5

Sea G un grupo sin elementos de orden 2 y $\mathbb{F}$ un cuerpo con $char(\mathbb{F}) \neq 2$. Suponga que $\mathbb{F}G^+$ o $\mathbb{F}G^-$ es Lie n - Engel para algún n. Las siguientes afirmaciones son verdaderas:

(i) *Si $char(\mathbb{F}) = 0$, entonces G es abeliano.*

(ii) *Si $char(\mathbb{F}) = p > 2$, entonces $G^{p^m} \subseteq \zeta(G)$, para algún $m > 0$.*

Lema 3.5

Sea G un grupo sin elementos de orden 2 y $\mathbb{F}$ un cuerpo con $char(\mathbb{F}) \neq 2$. Suponga que $\mathbb{F}G^+$ o $\mathbb{F}G^-$ es Lie n - Engel para algún n. Las siguientes afirmaciones son verdaderas:

(i) *Si $char(\mathbb{F}) = 0$, entonces G es abeliano.*

(ii) *Si $char(\mathbb{F}) = p > 2$, entonces $G^{p^m} \subseteq \zeta(G)$, para algún $m > 0$.*

Teorema 3.6

Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo con $char(\mathbb{F}) \neq 2$ y G un grupo sin elementos de orden 2. Entonces $\mathbb{F}G^+$ (o $\mathbb{F}G^-$) es Lie n - Engel, para algún n, si y solo si, $\mathbb{F}G$ es Lie m - Engel, para algún m.

Lema 3.7

Sea G un grupo sin elementos de orden 2 y $\mathbb{F}$ un cuerpo con char$(\mathbb{F}) \neq 2$. Suponga que $\mathbb{F}G^{+}$ o $\mathbb{F}G^{-}$ es Lie nilpotente. Si el centro $\zeta(G)$ contiene un elemento z de orden infinito, entonces $\mathbb{F}G$ es Lie nilpotente.

Lema 3.7

Sea G un grupo sin elementos de orden 2 y $\mathbb{F}$ un cuerpo con char$(\mathbb{F}) \neq 2$. Suponga que $\mathbb{F}G^{+}$ o $\mathbb{F}G^{-}$ es Lie nilpotente. Si el centro $\zeta(G)$ contiene un elemento z de orden infinito, entonces $\mathbb{F}G$ es Lie nilpotente.

Teorema 3.8

Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo con char$(\mathbb{F}) \neq 2$ y G un grupo sin elementos de orden 2, tal que existe $z \in \zeta(G)$ con $z^{q} = 1$ y $(p, q) = 1$. Suponga que $\mathbb{F}$ no contiene raíces q - ésimas de la unidad. Entonces $\mathbb{F}G^{+}$ (o $\mathbb{F}G^{-}$) es Lie nilpotente, si y solo si, $\mathbb{F}G$ es Lie nilpotente.

Sketch

Demostración.

Si $char(F) = 0$, del Lema 3.5 $G \in \mathcal{A}$

Sketch

Demostración.

Si $char(F) = 0$, del Lema 3.5 $G \in \mathcal{A}$

Si $char(F) = p$, del Lema 3.5 es posible mostrar que G es nilpotente.

Sketch

Demostración.

Si $char(F) = 0$, del Lema 3.5 $G \in \mathcal{A}$

Si $char(F) = p$, del Lema 3.5 es posible mostrar que G es nilpotente.

Si $|\zeta(G)| = \infty$, como $G_2 = \emptyset$ $|\zeta^2(G)| = \infty$, así $\mathbb{F}G \in \eta_{\mathrm{L}}$

Sketch

Demostración.

Si $char(F) = 0$, del Lema 3.5 $G \in \mathcal{A}$

Si $char(F) = p$, del Lema 3.5 es posible mostrar que G es nilpotente.

Si $|\zeta(G)| = \infty$, como $G_2 = \emptyset$ $|\zeta^2(G)| = \infty$, así $\mathbb{F}G \in \eta_{\mathrm{L}}$
Si $|\zeta(G)| < \infty$, supongamos que para todo grupo H con clase de nilpotencia menor G, entonces H' es p - grupo finito.
Supongamos que $\zeta(G)$ es un p - grupo. Como la clase de nilpotencia de $G/\zeta(G)$ es menor que la de G, $(G/\zeta(G))'$ es un p - grupo finito

$$(G/\zeta(G))' = G\zeta(G)/\zeta(G) \simeq G'/(G' \cap \zeta(G))$$

□

Lema 4.1

Sea R un anillo semiprimo con involución $\star$ de $\mathrm{char}(\mathbb{F}) \neq 2$. Si R^- (o R^+) es Lie n - Engel, entonces $[R^-, R^-] = 0$ (respectivamente $[R^+, R^+] = 0$).

Lema 4.1

Sea R un anillo semiprimo con involución $\star$ de char$(\mathbb{F}) \neq 2$. Si R^- (o R^+) es Lie n - Engel, entonces $[R^-, R^-] = 0$ (respectivamente $[R^+, R^+] = 0$).

Teorema 4.2

Sean $\mathbb{F}$ un cuerpo de char$(\mathbb{F}) \neq 2$, G un grupo sin elementos de orden 2 tales que $\mathbb{F}G$ es semiprima. Suponga que $\mathbb{F}G^+$ es Lie n - Engel para algún n (o Lie nilpotente). Entonces, G es abeliano o $N = ker(\sigma)$ es abeliano y $(G \setminus N) \subseteq G^+$. Luego, $\mathbb{F}G$ es un álgebra de grupo normal.

Teorema 4.3

Sean $\mathbb{F}$ un cuerpo de $char(\mathbb{F}) \neq 2$ y G un grupo sin elementos de orden 2 tal que $\mathbb{F}G$ es semiprima, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

Teorema 4.3

Sean $\mathbb{F}$ un cuerpo de $char(\mathbb{F}) \neq 2$ y G un grupo sin elementos de orden 2 tal que $\mathbb{F}G$ es semiprima, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $\mathbb{F}G^+$ *es Lie* n *- Engel (o Lie nilpotente).*

Teorema 4.3

Sean $\mathbb{F}$ *un cuerpo de* $char(\mathbb{F}) \neq 2$ *y* G *un grupo sin elementos de orden 2 tal que* $\mathbb{F}G$ *es semiprima, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathbb{F}G^+$ *es Lie* n *- Engel (o Lie nilpotente).*

(ii) $\mathbb{F}G^+$ *es conmutativo.*

Teorema 4.3

Sean $\mathbb{F}$ un cuerpo de $char(\mathbb{F}) \neq 2$ y G un grupo sin elementos de orden 2 tal que $\mathbb{F}G$ es semiprima, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $\mathbb{F}G^{+}$ *es Lie n - Engel (o Lie nilpotente).*

(ii) $\mathbb{F}G^{+}$ *es conmutativo.*

(iii) $\mathbb{F}G$ *es normal.*

Teorema 4.3

Sean $\mathbb{F}$ un cuerpo de $char(\mathbb{F}) \neq 2$ y G un grupo sin elementos de orden 2 tal que $\mathbb{F}G$ es semiprima, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $\mathbb{F}G^+$ *es Lie n - Engel (o Lie nilpotente).*

(ii) $\mathbb{F}G^+$ *es conmutativo.*

(iii) $\mathbb{F}G$ *es normal.*

Demostración.

Como $\mathbb{F}G^+$ conmutativo implica ser Lie nilpotente, entonces por la demostración de la primera parte del Teorema 4.2, (i) y (ii) son equivalentes.

Teorema 4.3

Sean $\mathbb{F}$ un cuerpo de $char(\mathbb{F}) \neq 2$ y G un grupo sin elementos de orden 2 tal que $\mathbb{F}G$ es semiprima, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(*i*) $\mathbb{F}G^+$ *es Lie* n *- Engel (o Lie nilpotente).*

(*ii*) $\mathbb{F}G^+$ *es conmutativo.*

(*iii*) $\mathbb{F}G$ *es normal.*

Demostración.

Como $\mathbb{F}G^+$ conmutativo implica ser Lie nilpotente, entonces por la demostración de la primera parte del Teorema 4.2, (i) y (ii) son equivalentes. Ahora bien, de la demostración de la segunda parte del Teorema 4.2 (ii) implica (iii).

Teorema 4.3

Sean $\mathbb{F}$ un cuerpo de $char(\mathbb{F}) \neq 2$ y G un grupo sin elementos de orden 2 tal que $\mathbb{F}G$ es semiprima, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *$\mathbb{F}G^+$ es Lie n - Engel (o Lie nilpotente).*

(ii) *$\mathbb{F}G^+$ es conmutativo.*

(iii) *$\mathbb{F}G$ es normal.*

Demostración.

Como $\mathbb{F}G^+$ conmutativo implica ser Lie nilpotente, entonces por la demostración de la primera parte del Teorema 4.2, (i) y (ii) son equivalentes.
Ahora bien, de la demostración de la segunda parte del Teorema 4.2 (ii) implica (iii).
Finalmente, dado que $G_2 = \emptyset$ se obtiene de la condición (iii) que los elementos en $\mathbb{F}G^+$ conmutan. $\square$

Lema 4.4

Sea G un grupo finito, $\mathbb{F}$ un cuerpo con $char(\mathbb{F}) = p > 2$. Suponga que $\mathbb{F}G^{+}$ es Lie n - Engel. Entonces, el conjunto P de los p - elementos es un subgrupo de G.

Lema 4.4

Sea G un grupo finito, $\mathbb{F}$ un cuerpo con $char(\mathbb{F}) = p > 2$. Suponga que $\mathbb{F}G^{+}$ es Lie n - Engel. Entonces, el conjunto P de los p - elementos es un subgrupo de G.

Proposición 4.5

Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo con $char(\mathbb{F}) = p \neq 2$ y G un grupo finito. Suponga que $\mathbb{F}G^{+}$ (o $\mathbb{F}G^{-}$) Lie n - Engel, las siguientes afirmaciones son verdaderas:

Lema 4.4

Sea G un grupo finito, $\mathbb{F}$ un cuerpo con $char(\mathbb{F}) = p > 2$. Suponga que $\mathbb{F}G^+$ es Lie n - Engel. Entonces, el conjunto P de los p - elementos es un subgrupo de G.

Proposición 4.5

Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo con $char(\mathbb{F}) = p \neq 2$ y G un grupo finito. Suponga que $\mathbb{F}G^+$ (o $\mathbb{F}G^-$) Lie n - Engel, las siguientes afirmaciones son verdaderas:

(i) *Si $char(\mathbb{F}) = 0$, entonces $\mathbb{F}G^+$ (o $\mathbb{F}G^-$) es conmutativo.*

Lema 4.4

Sea G un grupo finito, $\mathbb{F}$ un cuerpo con $char(\mathbb{F}) = p > 2$. Suponga que $\mathbb{F}G^+$ es Lie n - Engel. Entonces, el conjunto P de los p - elementos es un subgrupo de G.

Proposición 4.5

Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo con $char(\mathbb{F}) = p \neq 2$ y G un grupo finito. Suponga que $\mathbb{F}G^+$ (o $\mathbb{F}G^-$) Lie n - Engel, las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- (i) *Si $char(\mathbb{F}) = 0$, entonces $\mathbb{F}G^+$ (o $\mathbb{F}G^-$) es conmutativo.*
- (ii) *Si $char(\mathbb{F}) = p > 2$, entonces $\mathbb{F}(G/P)^+$ (o $\mathbb{F}(G/P)^-$) es conmutativo.*

Bibliografía

- O. Broche Cristo, C. Polcino Milies, *Symmetric elements under oriented involutions in group rings*, Comm. Algebra **34** (2006), 3347-3356.
- J. H. Castillo Gómez, C. Polcino Milies, *Lie properties of symmetric elements under oriented involutions*. To appear in Commun. Algebra (2012).
- A. Giambruno, C. Polcino Milies, S. K. Sehgal, *Lie properties of symmetric elements in group rings*, J. Algebra **321** (2009), 890-902.
- A. Giambruno, S. K. Sehgal, *A Lie property in group rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **105** (1989), 287-291.
- A. Giambruno, S. K. Sehgal, *Lie nilpotency in group rings*, Comm. Algebra **21** (1993), 4253-4261.
- A. Holguín Villa, *$*$-Identidades em álgebras de Grupo* (2012), Ph.D. thesis, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brazil.

Bibliografía

- G. T. Lee, *Group rings whose symmetrics elements are Lie nilpotent*, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999), no.11, 3153-3159. MR 1641124 (2000b:16052)
- G. T. Lee, *The Lie n-Engel property in group rings*, Comm. Algebra 28 (2000), no.2, 867-881. MR 1736769 (2001b:16027).
- G. T. Lee, *Group identities on units and symmetric units of group rings*, Algebra and Applications, vol. 12, Springer-Verlag, London, 2010.
- I. B. S. Passi, D. S. Passman, S. K. Sehgal, *Lie solvable group rings*, Canad. J. Math. **25** (1973), 748-757.
- D. S. Passman, *The algebraic structure of group rings*, Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1977.
- C. Polcino Milies, S. K.Sehgal, *An introduction to group rings* (2002). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gracias por su atención