

Verificación de Conjuntos Estabilizantes para el Método de Diseño de Controladores PI de
Ziegler & Nichols

Emerson Rey Ardila

Trabajo de Grado para optar al título de Ingeniero Electrónico

Director

Ricardo Alzate Castaño

Doctorado en Ingeniería Informática y Automática

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas

Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones

Bucaramanga

2019

Dedicatoria

Este trabajo viene dedicado para todas aquellas personas que apoyaron el desarrollo y ejecución de este trabajo de grado.

En especial reconozco la permanente presencia de Dios en mi camino de vida.

Agradecimientos

Agradezco a mi familia por el apoyo económico y moral que tuvieron para conmigo durante el desarrollo de mi carrera. También agradezco a mis amigos y compañeros por las vivencias de estos inolvidables años de universidad.

Un reconocimiento y agradecimiento importante lo realizo a mi director de trabajo de grado, por dedicar su tiempo, experiencia y conocimiento en la guía de mi proyecto.

Tabla de Contenido

Introducción	14
1. Objetivos	17
2. Conjunto estabilizante para sistemas LTI	18
2.1. Estabilidad para un sistema LTI	18
2.2. Conjunto estabilizante	22
2.2.1. Incidencia de \mathcal{S} en la estabilidad de un lazo de control	23
2.2.2. Escenarios dinámicos viables en \mathcal{S} para el sistema compensado	26
2.3. Diseño gráfico de controladores a partir del cálculo de \mathcal{S}	29
2.3.1. Descripción general de requerimientos	31
2.3.1.1. Nivel superior de detalle	31
2.3.1.2. Partición de primer nivel	32
2.3.1.3. Particiones de segundo nivel	33
2.3.2. Selección de herramienta para implementación	34
2.3.3. Descripción de interfaz diseñada	35
3. Modelado matemático del dron	38
3.1. Vehículos aéreos no tripulados	38

CONJUNTOS ESTABILIZANTES EN CONTROLADORES PI	5
3.1.1. Mecanismo de vuelo	38
3.1.2. Control del sistema	39
3.1.3. Sensórica	39
3.1.4. Aplicaciones	40
3.2. Coordenadas en el espacio de movimiento	40
3.3. Ecuaciones del movimiento	44
3.3.1. Movimiento de traslación	44
3.3.2. Movimiento de rotación	48
3.3.3. Simplificaciones del modelo	52
3.4. Análisis del comportamiento en lazo abierto	54
4. Controladores PI y su conjunto estabilizante	62
4.1. Controladores PID	62
4.1.1. Reglas de sintonización	63
4.2. Análisis de estabilidad para un controlador PI	65
4.2.1. Sintonización PI por <i>Ziegler & Nichols</i>	66
4.2.2. Conjunto estabilizante para sistema ante control PI	68
4.3. Fragilidad de controladores PI	70
4.3.1. Geometría para márgenes de estabilidad en un controlador PI	71
4.3.2. Definición de métrica para calcular distancia a inestabilidad	75
5. Recomendaciones	81

6. Trabajo futuro	84
7. Conclusiones	84
Referencias Bibliográficas	86
Apéndices	91

Lista de Figuras

Figura 1.	Sistema de control con realimentación unitaria	18
Figura 2.	Respuesta escalón sistema compensado con inestabilidad	25
Figura 3.	Conjunto estabilizante en el plano (α, β) para $k = 34.93$	27
Figura 4.	Conjunto estabilizante en el plano (M_p, t_s) para $k = 34.93$	28
Figura 5.	Respuesta dinámica y controlador en \mathcal{S} del plano (M_p, t_s)	30
Figura 6.	Nivel superior de detalle para desarrollo de interfaz	31
Figura 7.	Primer nivel de detalle para desarrollo de interfaz	32
Figura 8.	Subproceso de <i>Cálculo de \mathcal{S}</i>	34
Figura 9.	Subproceso de <i>Cálculo respuesta escalón a partir de (α, β)</i>	34
Figura 10.	Subproceso de <i>Elección de punto admisible en (M_p, t_s)</i>	35
Figura 11.	Subproceso de <i>Conversión (M_p^*, t_s^*) a (α, β)</i>	35
Figura 12.	Presentación final para interfaz desarrollada	36
Figura 13.	Vehículo aéreo no tripulado tipo <i>dron</i> cuadrotor	39
Figura 14.	Diagrama de cuerpo libre del <i>dron</i> cuadrotor	41
Figura 15.	Simulación equilibrio perturbado	60
Figura 16.	Simulación equilibrio perturbado con fricción	61
Figura 17.	Controlador PID en forma de realización paralela	64

Figura 18.	Respuesta escalón en forma de s del método en lazo abierto	67
Figura 19.	Respuesta escalón del sistema compensado	69
Figura 20.	Conjunto estabilizante en el plano (k_P, k_I)	70
Figura 21.	Intersección en el plano (k_P, k_I) para línea recta y elipse	76
Figura 22.	Representación en (k_P, k_I) para márgenes de estabilidad	82
Figura 23.	Distancia a la inestabilidad	83

Lista de Tablas

Tabla 1.	Parámetros empleados para simulación del modelo	54
Tabla 2.	Cálculo controlador PI métodos de <i>Ziegler & Nichols</i>	67

Lista de Apéndices

	pág.
Apéndice A. Fundamentos de sólidos rígidos	91
Apéndice B. Función <i>ode45</i> de MATLAB	99
Apéndice C. Interfaz de animación de la dinámica del sistema	103

Glosario

Controlador (o también compensador) es un dispositivo que toma una decisión con base en la comparación de la información medida con respecto a condiciones deseadas de operación. A dicha decisión se le denomina acción de control.

Controlar es asignar valores a la variable manipulada para lograr que la variable controlada siga un valor de referencia.

Perturbación señal indeseada que afecta negativamente el valor de la variable controlada del sistema.

PID sigla que refiere la acción combinada de control proporcional, integral y derivativo.

Sistema conjunto de elementos que interactúan de manera organizada para cumplir con un fin u objetivo común.

Variable Controlada es la cantidad o condición que se mide y controla.

Variable Manipulada es la cantidad que el controlador modifica para afectar los valores de salida de la planta.

Resumen

Título: Verificación de Conjuntos Estabilizantes para Diseño de Controladores PI de Ziegler & Nichols *

Autor: Emerson Rey Ardila **

Palabras Clave: Conjunto Estabilizante, Controladores PI, Diseño Gráfico de Compensadores, Método de Ziegler & Nichols.

Descripción: El presente proyecto presenta el cálculo de conjuntos estabilizantes para sistemas SISO LTI controlados por compensadores de estructura simple. Se estudia la fragilidad de controladores PI calculados empleando el método *Ziegler & Nichols*, técnica de referencia en múltiples aplicaciones de ámbito industrial. A partir de la definición para una métrica basada en la interpretación geométrica para los márgenes de estabilidad del sistema controlado, se verifica que el controlador diseñado con el método en cuestión no necesariamente tolera variaciones significativas en sus valores de parámetro. Por el contrario, asume comportamientos cercanos a los límites de estabilidad proporcionados mediante el cálculo de su conjunto estabilizante. Lo anterior se convierte en información importante tomando en cuenta que generalmente los métodos de diseño se someten a un ajuste fino. Como métrica, se define el espacio planar correspondiente con la intersección entre una elipse y una línea recta que representan lugares geométricos de margen de fase y/o ganancia constantes. Adicional a lo anterior, se desarrolló una interfaz en MATLAB que permite calcular gráficamente los parámetros del controlador a partir de un conjunto admisible de especificaciones con base en su conjunto estabilizante. Trabajo complementario incluye la utilización de técnicas computacionales para el cálculo de conjuntos estabilizantes sobre plantas arbitrarias.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y telecomunicaciones.
Director: Ricardo Alzate Castaño, Doctorado en Ingeniería Informática y Automática.

Abstract

Title: Stabilizing Set Verification for the Ziegler & Nichols PI Controller's Design Method *

Author: Emerson Rey Ardila **

Keywords: Graphical Design of Compensators, PI Controllers, Stabilizing Set, Ziegler & Nichols Classical Method.

Description: In this work the calculation for stabilizing sets of SISO LTI plants controlled by single structure compensators is presented. In particular, the fragility of PI controllers calculated by employing the classical method of *Ziegler & Nichols* is tested by defining a measure based on geometrical interpretation of margins of stability for the controlled loop. As we already know, the *Ziegler & Nichols* method is a reference technique for many industrial applications in practice but surprisingly after tuning parameters for desired performance the controlled system sometimes will operate riskily closed to stability boundaries determined after calculation of its corresponding stabilizing set. As a measure of the distance to instability, the intersection sets between an ellipse and a straight line constructed for constant gain and/or phase margin, is proposed. This measure shows that the controller calculated is not tolerant to changes in the parameter values, a situation typical in practice by the so-called fine tuning procedures. Also, a software interface was developed to perform graphical calculation of controller parameters using the achievable specifications set obtained from the stabilizing set of the controlled system. Ongoing work includes the automatic calculation for stabilizing sets in arbitrary plants by using computational tools already developed for that goal.

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y telecomunicaciones. Director: Ricardo Alzate Castaño, Doctorado en Ingeniería Informática y Automática.

Introducción

Diseñar un controlador, puede considerarse como el arte de determinar la estructura y los parámetros de un sistema para modificar a conveniencia el comportamiento de otro. En este proceso, llevar a la práctica dicha idea formulada en modo simple, implica satisfacer requerimientos con recursos limitados en general.

La teoría del control, tanto de tipo clásico como moderno, ha intentado resolver este problema de diseño atendiendo diferentes criterios de desempeño que incluyen consideraciones de error, criterios de optimalidad, robustez, incertidumbre y adaptabilidad.

A pesar de los diferentes criterios y puntos de vista que atienden la tarea del diseño de un controlador, siempre será necesario cumplir con una premisa básica: la estabilidad del sistema controlado.

Bhattacharyya y Keel (Keel and Bhattacharyya, 1997) mostraron que aún las estrategias más refinadas de diseño de controladores pueden presentar problemas, al no garantizar estabilidad.

Estudios complementarios al anterior, incluyen minuciosos trabajos de alta componente teórica orientados a formular técnicas refinadas para el cálculo de controladores de bajo orden, que garanticen no solamente las premisas requeridas de desempeño dinámico para el sistema controla-

do, sino también el elemento más importante: “*su estabilidad*”.

El conjunto estabilizante, se define por tanto como todos los posibles valores de parámetro para un controlador, que garantizan las condiciones de estabilidad absoluta para el sistema (Alzate and Oliveira, 2016). Estas condiciones de estabilidad absoluta son fácilmente verificables en sistemas de bajo orden a través de procedimientos simples como el criterio de *Routh-Hurwitz* (Ogata, 2010). Sin embargo, cuando el orden del sistema, o la cantidad de parámetros del controlador aumenta, dichas inecuaciones constituyen sistemas no lineales de difícil solución analítica. Algunos autores han propuesto soluciones más generalizadas para resolver este tipo de problemas, basadas en el teorema de *Hermite-Bielher* (Fernandez da Silva, 2008) (Ho et al., 1999) (Keel and Bhattacharyya, 1997).

En particular, se han obtenido resultados aplicados sobre plantas típicas ante controladores PID, como se referencia en (Elizondo et al., 2013) (Oliveira et al., 2003) (Silva et al., 2002), complementado por análisis de lazos de control bajo la acción de retardos en (Farkh et al., 2014) (Fernandez da Silva, 2008) (Oliveira et al., 2003). Algunas aplicaciones para el caso de diseño de controladores sobre convertidores de potencia pueden encontrarse en (Keel and Bhattacharyya, 1994) (Data and Bhattacharyya, 2000) (Loera et al., 2014).

Tomando en cuenta lo anterior, se evidencia la importancia del análisis de conjuntos estabilizantes en el diseño de un sistema de control para garantizar su operación ante distintos escenarios

que pueden experimentarse en situaciones prácticas. Por tanto, se analizará un caso de estudio ampliamente empleado como lo es el método de *Ziegler & Nichols*, buscando mostrar la relación que tiene su formulación básica (expresiones matemáticas y métodos de cálculo) con los conjuntos estabilizantes de sus parámetros solución.

A partir de la ejecución del presente trabajo de grado, se buscan respuestas ante interrogantes como los siguientes: ¿Cómo se relacionan los parámetros de un controlador PI calculado por el método de *Ziegler & Nichols* con su conjunto estabilizante? ¿Qué tan propensa al estado de inestabilidad es una planta controlada a partir del análisis anterior? ¿Demuestra el método de *Ziegler & Nichols* sensibilidad ante cambios de parámetro del sistema? ¿Es fácil llevar a la inestabilidad un sistema controlado mediante un controlador PI diseñado empleando el método de *Ziegler & Nichols*? En otras palabras ¿Qué tan frágil es el método para cálculo de controladores PI de *Ziegler & Nichols*?

1. Objetivos

Objetivo general

Analizar las condiciones de estabilidad del conjunto de parámetros PI calculados empleando el método de diseño de controladores de Ziegler & Nichols.

Objetivos específicos

Interpretar las tablas de diseño de parámetros PI de Ziegler & Nichols en términos de conjuntos estabilizantes;

Desarrollar un algoritmo que permita verificar las condiciones de estabilidad para controladores PI diseñados mediante dicho método;

Implementar una interfaz para cálculo de controladores PI a partir de selección de parámetros en el dominio del tiempo, admisibles respecto al conjunto estabilizante correspondiente.

2. Conjunto estabilizante para sistemas LTI

En el presente capítulo se formula el conjunto de ecuaciones que delimitan la región de estabilidad (*conjunto estabilizante*) para una planta de segundo orden, compensada con un controlador de tres parámetros (k, α, β) . Este estudio se realiza haciendo uso del *Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz*. La región de estabilidad del sistema se formula asumiendo k de valor conocido en el plano (α, β) de parámetros del controlador, mediante deducciones analíticas y simulaciones numéricas en MATLAB.

2.1. Estabilidad para un sistema LTI

Considere el sistema de control con realimentación unitaria ilustrado en la Fig. 1. Para este sistema $R(s)$ representa la señal de entrada, $E(s)$ la señal de error, $Y(s)$ la señal de salida, $P(s)$ la función de transferencia de la planta y $C(s)$ la función de transferencia para un controlador de estructura fija y 3 parámetros, dado por:

$$C(s) = \frac{k(s + \alpha)}{(s + \beta)}. \quad (1)$$

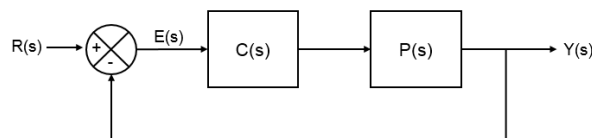


Figura 1. Sistema de control con realimentación unitaria

Para efectos de ilustración, se asumirá una planta genérica de segundo orden con un polo

en el origen, a partir de:

$$P(s) = \frac{1}{s(s+2)} = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad (2)$$

definiendo a su vez el siguiente polinomio característico:

$$\begin{aligned} \delta(s) &= N(s)[k(s+\alpha)] + D(s)(s+\beta) \\ &= k(s+\alpha) + s(s+\alpha)(s+\beta) \\ &= s^3 + (2+\beta)s^2 + (2\beta+k)s + k\alpha, \end{aligned} \quad (3)$$

cuyas raíces establecen la estabilidad del sistema.

Como es bien sabido, el *Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz* (Ogata, 2010) permite determinar las condiciones para la estabilidad absoluta de un sistema dinámico, mediante un método tabulado que define la posición de las raíces en el plano, para un polinomio que representa el denominador de la función de transferencia del sistema.

Así entonces, se aplica dicho criterio a partir de los siguientes pasos:

1. *Se escribe el polinomio característico en la forma $\delta(s) = 0$ y se verifican las condiciones para que todos sus coeficientes sean diferentes de cero y del mismo signo. De esta manera, asumiendo una convención positiva, los coeficientes de (3) serán mayores a cero si se*

cumplen las siguientes condiciones:

$$(2 + \beta) > 0; \quad (2\beta + k) > 0; \quad k\alpha > 0,$$

a partir de lo cual, asumiendo que $k > 0$ es un parámetro constante conocido, las condiciones para estabilidad recaen sobre los parámetros restantes $\{\alpha, \beta\}$, siendo:

$$\beta > -2; \quad \beta > -\frac{k}{2}; \quad \alpha > 0. \quad (4)$$

2. Se construye el arreglo de Routh y se analizan los elementos en la primera columna. La condición necesaria y suficiente para que todas las raíces de (3) se encuentren en el semi-plano izquierdo del plano “ s ”, es que no existan cambios de signo en la primera columna del arreglo (Ogata, 2010). A partir de ello se tiene:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & (2\beta + k) \\ s^2 & (2 + \beta) & k\alpha \\ s^1 & M & 0 \\ s^0 & k\alpha & \end{array}$$

siendo

$$M = \frac{(2\beta + k)(2 + \beta) - k\alpha}{(2 + \beta)},$$

de lo cual, $M > 0$ implica

$$(2\beta + k)(2 + \beta) - k\alpha > 0,$$

puesto que $(2 + \beta) > 0$ y así entonces:

$$2\beta^2 + (4 + k)\beta + 2k - k\alpha > 0.$$

Despejando α en la expresión anterior se obtiene:

$$\alpha < \frac{2}{k} \left(\left(\beta + \frac{(k+4)}{4} \right)^2 - \frac{(k-4)^2}{16} \right), \quad (5)$$

tomando en cuenta que:

$$\begin{aligned} \frac{2\beta^2 + (4+k)\beta + 2k}{k} &= \frac{2}{k} \left(\beta^2 + \frac{(k+4)}{2}\beta + k \right) \\ &= \frac{2}{k} \left(\beta^2 + \frac{(k+4)}{2}\beta + \frac{(k+4)^2}{16} - \frac{(k+4)^2}{16} + k \right) \\ &= \frac{2}{k} \left(\left(\beta + \frac{(k+4)}{4} \right)^2 + \frac{16k - (k^2 + 8k + 16)}{16} \right) \\ &= \frac{2}{k} \left(\left(\beta + \frac{(k+4)}{4} \right)^2 - \frac{(k^2 - 8k + 16)}{16} \right) \\ &= \frac{2}{k} \left(\left(\beta + \frac{(k+4)}{4} \right)^2 - \frac{(k-4)^2}{16} \right). \end{aligned}$$

3. *A partir de las restricciones obtenidas sobre los términos de la primera columna del arreglo de Routh, se determina el rango de valores que asegura para cada parámetro la estabilidad*

absoluta del sistema. Por tanto, para $k > 4$ la condición que prevalece sobre el parámetro β será:

$$\beta > -2. \quad (6)$$

Asimismo se tiene:

$$0 < \alpha < \frac{2}{k} \left(\left(\beta + \frac{(k+4)}{4} \right)^2 - \frac{(k-4)^2}{16} \right). \quad (7)$$

2.2. Conjunto estabilizante

Dada una estructura de controlador fija $C(s)$ para una planta $P(s)$, el conjunto estabilizante \mathcal{S} se define como todos los posibles controladores $C(s)$ que brindan una solución estable para el sistema realimentado mostrado en la Fig. 1.

En este punto es importante resaltar que en la mayoría de métodos clásicos para el diseño de controladores, el cálculo de los parámetros del controlador se realiza sin incluir restricciones explícitas de estabilidad. En general, un diseño viene acompañado por pruebas de verificación no sólo para las condiciones de operación del sistema controlado sino también para su estabilidad, constituyendo procedimientos iterativos muchas veces del tipo ensayo y error.

En otras palabras, los métodos de diseño se formulan para cumplir con condiciones de desempeño sobre un sistema controlado estable, pero no toman en cuenta que aún cuando matemáti-

camente el controlador pueda satisfacer el problema, existe un conjunto restringido de parámetros de control que aseguran la estabilidad del sistema.

El conjunto estabilizante \mathcal{S} es fácil de definir. Por ejemplo, para la combinación de planta y controlador dada por las ecuaciones (1)-(2) en la Sección 2.1, dicho conjunto puede escribirse como:

$$\mathcal{S} = \{(k, \alpha, \beta) : (6) \text{ y } (7) \text{ se satisfagan simultáneamente}\}. \quad (8)$$

El conjunto estabilizante \mathcal{S} es difícil de calcular. Para sistemas de bajo orden, el *criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz* puede ser empleado según ilustrado en la Sección 2.1. Sin embargo, para un orden elevado la cantidad de expresiones no lineales que se requiere combinar para determinar los rangos de parámetros estables justifican la utilización de métodos computacionales refinados. El *método de la signatura* propuesto por Keel y Bhattacharyya es una opción viable para estos casos (Keel and Bhattacharyya, 2008).

2.2.1. Incidencia de \mathcal{S} en la estabilidad de un lazo de control. Para verificar la importancia del conjunto estabilizante, considere el problema de diseño de un compensador $C(s)$ de la forma (1) para el sistema $P(s)$ definido en (2), de manera tal que el sistema compensado y realimentado como en la Fig. 1 exhiba una respuesta escalón con las siguientes características dinámicas:

$$M_p \approx 0\%; \quad t_s|_{2\%} \approx 0.5 [s]. \quad (9)$$

Inicialmente, se deben traducir las especificaciones de respuesta temporal dadas en (9) al

dominio de la frecuencia. A partir de ello, los polos deseados para el sistema compensado corresponden con:

$$s = -8.231 \pm 0j. \quad (10)$$

Ahora bien, evaluando este valor para “ s ” en $P(s)$, se verifica una deficiencia angular de:

$$\angle C(s) = 180, \quad (11)$$

que a su vez corresponde con la contribución de fase que debe aportar el compensador en el polo deseado. A partir de ello, la localización para el polo y el cero del compensador se realiza empleando el siguiente análisis:

- Para obtener 180 de fase en el compensador, el cociente resultante debe ser un número real negativo teniendo en cuenta el carácter real del polo deseado;
- Posteriormente se selecciona una distribución en el eje real negativo para la localización del polo deseado y el polo y el cero del compensador, que conserve una simetría dada por un factor:

$$\gamma = \frac{s}{5} \approx \frac{5}{3},$$

en modo tal que:

$$\alpha = \gamma s \approx 13.21, \quad \beta = \frac{s}{\gamma} \approx 4.84;$$

- Por último se determina la ganancia k del compensador, como aquel valor que satisface la

condición de magnitud para el lugar geométrico de las raíces:

$$\left| \frac{k(s+13.21)}{s(s+2)(s+4.84)} \right|_{s=-8.231 \pm 0j} = 1, \quad (12)$$

a partir de lo cual $k \approx 34.93$.

Una vez diseñado el compensador, se procede a verificar el desempeño del sistema controlado empleando herramientas de simulación. Es así como la Fig. 2 muestra la respuesta temporal ante un estímulo de tipo escalón unitario, calculada empleando el *Control System Toolbox* de MATLAB® en el sistema compensado y realimentado, siendo sin embargo de naturaleza inestable. A partir de lo anterior, surge la pregunta: ¿Por qué un diseño que se realiza empleando apropiadamente las herramientas matemáticas, conduce a un sistema inestable?

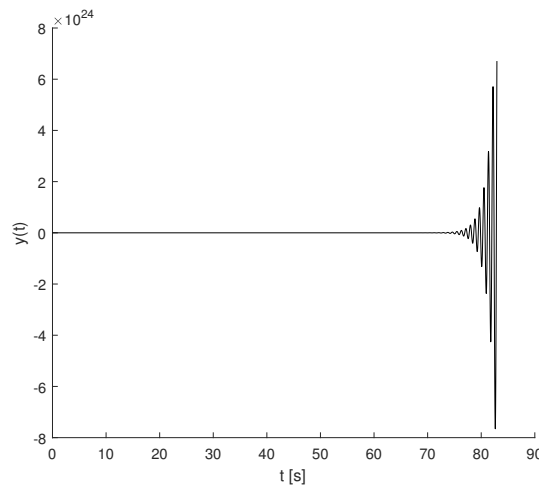


Figura 2. Respuesta escalón de sistema compensado manifestando inestabilidad

La respuesta para este interrogante se explica fácilmente a partir de (8), justificando que los

requerimientos dados en (9) no son viables para la estructura del compensador seleccionada, según se detalla a continuación.

2.2.2. Escenarios dinámicos viables en \mathcal{S} para el sistema compensado. El conjunto estabilizante \mathcal{S} definido en (8) depende de las inecuaciones (6) y (7), establecidas a su vez para $k > 0$.

De los resultados presentados para el cálculo del compensador se observa que $k = 34.93$ satisface la última premisa. Por tanto, el controlador será estable si tanto α como β satisfacen para este valor de k , las desigualdades que relacionan los elementos en la primera columna del arreglo de Routh.

Así entonces, reemplazando (4)-(5) para $k = 34.93$ en (6) y (7), se obtiene:

$$\beta = 4.84$$

$$> -2;$$

$$\alpha = 13.21$$

$$> 0$$

$$\nless \frac{2}{34.93} \left(\left(4.84 + \frac{(34.93 + 4)}{4} \right)^2 - \frac{(34.93 - 4)^2}{16} \right)$$

$$\nless 8.73,$$

de donde la última desigualdad muestra la razón por la cual el controlador calculado representa un sistema realimentado inestable.

De hecho, es posible graficar el plano de parámetros (α, β) que representa los controladores con estructura (1) que para $k = 34.93$ garantizan la estabilidad del sistema controlado y realimentado. Dicha gráfica se presenta en la Fig. 3, siendo el interior de la región gris el conjunto estabilizante \mathcal{S} , mientras el triángulo indica el controlador calculado en la Sección 2.2.1 evidenciando su condición de realización inestable para el sistema.

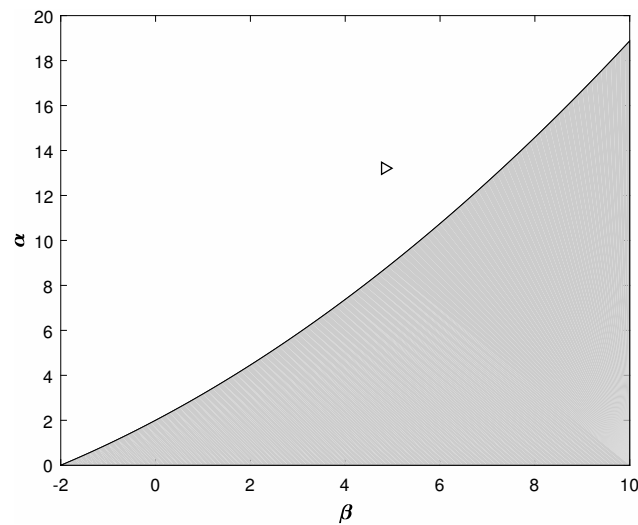


Figura 3. Conjunto estabilizante en el plano (α, β) para $k = 34.93$

Más interesante aún es transformar dicho conjunto estabilizante en términos de parámetros del controlador hacia un espacio de especificaciones de desempeño. Por ejemplo, observe en la Fig. 4 el plano (M_p, t_s) equivalente para el conjunto estabilizante mostrado en la Fig. 3.

De este diagrama se observa la manera en la cual los parámetros de desempeño requeridos

para el diseño presentado en la Sección 2.2.1, no forman parte de los escenarios dinámicos viables en el conjunto estabilizante para el sistema compensado. Visualmente se observa una discontinuidad del conjunto \mathcal{S} al ser mapeado desde el plano (α, β) hacia el plano (M_p, t_s) . Un análisis detallado del efecto anterior involucra *topología matemática*, superando los alcances del presente trabajo de grado.

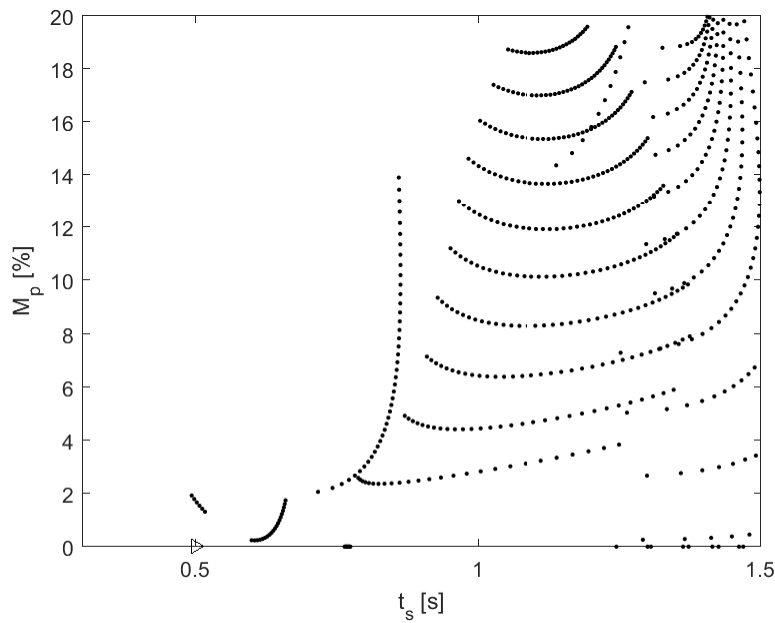


Figura 4. Conjunto estabilizante en el plano (M_p, t_s) para $k = 34.93$

Por tanto, dada la dificultad matemática que implica un mapeo analítico entre el conjunto estabilizante \mathcal{S} y los parámetros de una respuesta escalón, el plano presentado en la Fig. 4 fue generado empleando simulación de fuerza bruta (es decir, punto a punto) a partir de las funciones del *Control Systems Toolbox* de MATLAB®.

De esta manera es posible realizar una selección visual para los parámetros del controlador (*método gráfico de diseño*) a partir de una elección de las especificaciones de desempeño requeridas en la respuesta escalón, al interior del conjunto admisible dado en la Fig. 4

La Fig. 5 ilustra la selección para varios escenarios dinámicos al interior de la región de estabilidad, con su correspondiente mapeo al plano de parámetros del controlador.

A partir de lo anterior, pueden emplearse herramientas computacionales para realizar, de manera gráfica, el cálculo de un compensador de estructura predeterminada para una planta conocida y con base en el conjunto de especificaciones de desempeño admisible proporcionadas por el conjunto estabilizante, según se detalla en la siguiente sección.

2.3. Diseño gráfico de controladores a partir del cálculo de \mathcal{S}

Tomando en cuenta la alta capacidad de cálculo y portabilidad de las herramientas computacionales actuales, resulta simple aceptar que las dificultades analíticas en la determinación de parámetros de control puedan ser reducidas ostensiblemente a partir de paquetes como MATLAB, que integra funciones optimizadas para aproximar con muy alta precisión los valores de variables importantes en un sistema de control realimentado, ante simulación para diversos escenarios de operación.

Tomando en cuenta lo anterior, se construyó una interfaz para realizar el diseño de controladores simples (i.e. compensadores en adelante o en atraso), a partir de un enfoque gráfico basado en el cálculo del conjunto estabilizante para sistemas *SISO LTI*. El diseño de la interfaz se presenta

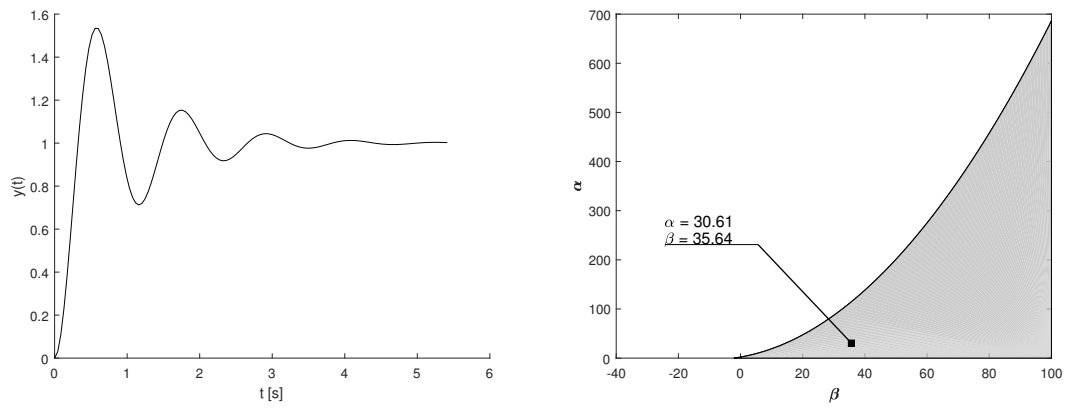
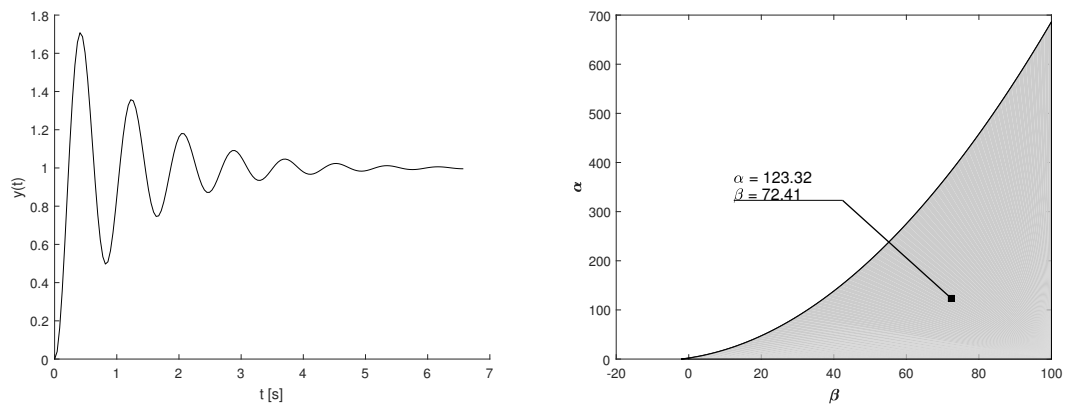
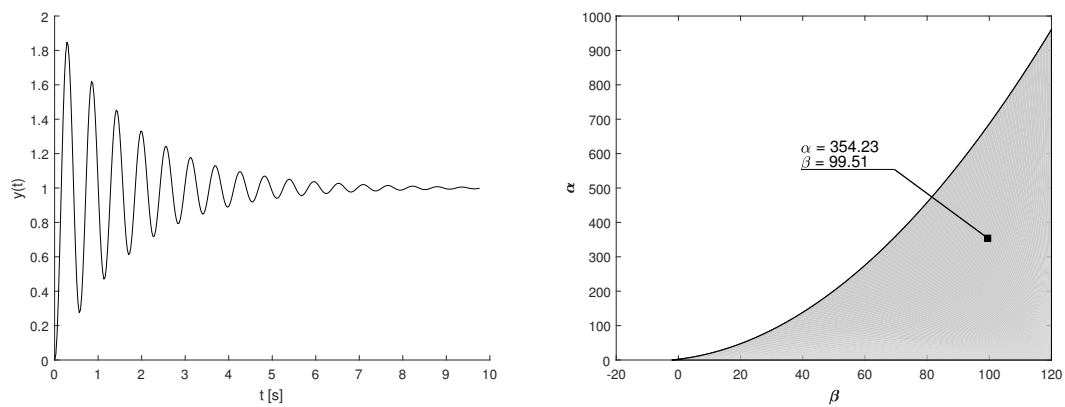
(a) $M_p = 53.38$; $t_s = 3.60$ (b) $M_p = 70.76$; $t_s = 4.59$ (c) $M_p = 84.76$; $t_s = 6.85$

Figura 5. Respuesta dinámica y controlador correspondiente para diferentes especificaciones al interior de \mathcal{S} en el plano (M_p, t_s)

a continuación empleando como base la descripción propuesta por Roa y Ayala en (Roa Cano, 2016) para este tipo de desarrollos.

2.3.1. Descripción general de requerimientos. Se requiere construir una interfaz de software que permita diseñar un controlador de estructura simple pre-establecida, a partir de información del conjunto admisible de parámetros de respuesta dinámica, calculados con base en el conjunto estabilizante \mathcal{S} para un sistema realimentado de manera negativa y unitaria. La interfaz deberá permitir modificar la ganancia k de baja frecuencia del controlador, así como los rangos de variación del parámetro β y la resolución de puntos para el conjunto estabilizante calculado, permitiendo visualizar dicho conjunto en el plano (α, β) , su mapeo correspondiente hacia el plano de parámetros de respuesta (M_p, t_s) y la respuesta escalón del sistema realimentado para un punto arbitrario dentro de \mathcal{S} .

2.3.1.1. Nivel superior de detalle. Posterior a la descripción (en palabras) de los requerimientos del sistema (interfaz), se procede a crear un diagrama general de entradas y salidas a manera de nivel superior de detalle. Dicha representación se muestra en la Fig. 6.

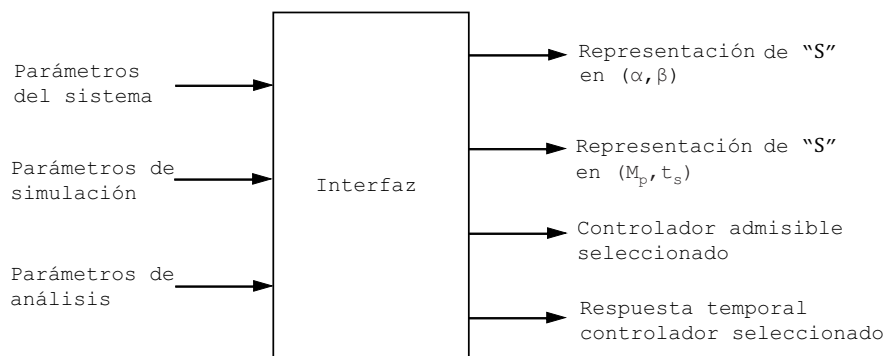


Figura 6. Representación de nivel superior de detalle para desarrollo de interfaz

2.3.1.2. Partición de primer nivel. Una primera partición se logra con la incorporación del bloque que realiza el cálculo del conjunto estabilizante \mathcal{S} , mediante evaluación de las expresiones (6), (7) y (8).

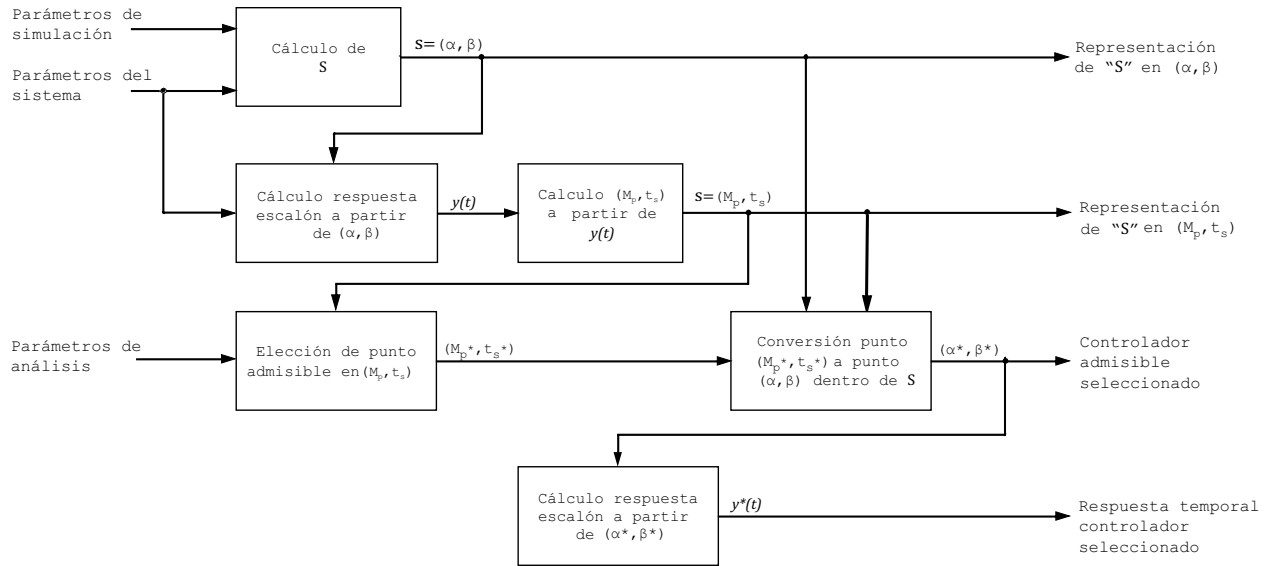


Figura 7. Representación de primer nivel de partición para desarrollo de interfaz

Asimismo, los resultados en esta etapa son la información de entrada a un nuevo bloque encargado de construir la representación gráfica del conjunto estabilizante en el espacio de parámetros (M_p, t_s) . Lo anterior se realiza en una secuencia de dos pasos: 1) se calculan las respuestas escalón $y(t)$ para el sistema realimentado con cada uno de los parámetros de controlador dados por \mathcal{S} y 2) se determina el valor correspondiente en el plano (M_p, t_s) para cada caso.

Con esta información, el usuario puede proceder a seleccionar un punto admisible (M_p^*, t_s^*) , que posteriormente es representado en su versión equivalente de parámetros del controlador de-

seado (α^*, β^*) . Finalmente, se calcula para este punto la respuesta escalón $y^*(t)$ para el sistema realimentado.

De esta manera, el primer nivel de partición se configura con la unión de los anteriores subprocesos, tal y como se ilustra en la Fig. 7.

2.3.1.3. Particiones de segundo nivel. A su vez, cada uno de los subprocesos descritos en el ítem anterior, se descompone en etapas constitutivas fundamentales según se describe a continuación:

- *Cálculo de \mathcal{S}* : para determinar el conjunto estabilizante se debe establecer para un k dado y un intervalo de variación conocido para β , el rango de M valores para la variable α que satisface las restricciones impuestas por las ecuaciones (6), (7) y (8). El esquema para estas subrutinas se muestra en la Fig. 8;
- *Cálculo respuesta escalón a partir de (α, β)* : una vez calculado \mathcal{S} , es posible evaluar cada punto (α, β) en la estructura de control realimentado mostrada en la Fig. 1. De esta manera puede calcularse, a través de comandos del *Control System Toolbox* de MATLAB, la respuesta escalón para el sistema. El esquema para estas subrutinas se muestra en la Fig. 9;
- *Elección de punto admisible en (M_p, t_s)* : a través de selección gráfica el usuario seleccionará un punto de interés (\bar{M}_p, \bar{t}_s) . Posteriormente, se deberá verificar si dicho punto pertenece al conjunto de parámetros admisibles (M_p, t_s) . En caso afirmativo, el punto se denominará (M_p^*, t_s^*) . El esquema para estas subrutinas se muestra en la Fig. 10;

- *Conversión punto (M_p^*, t_s^*) a punto (α, β) dentro de \mathcal{S}* : tomando en cuenta que los planos (M_p, t_s) y (α, β) poseen las mismas dimensiones y son una relación uno a uno, la posición del punto (M_p^*, t_s^*) equivale al conjunto de parámetros (α^*, β^*) del controlador que lo produce.

El esquema para estas subrutinas se muestra en la Fig. 11.

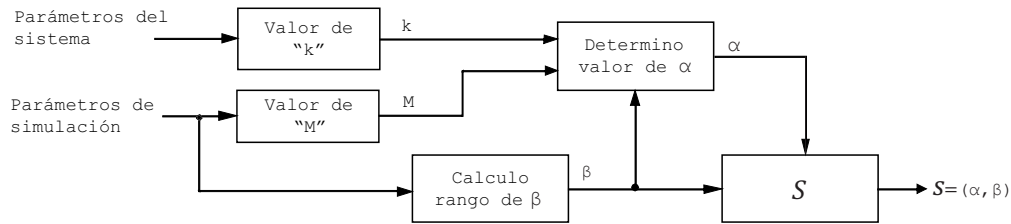


Figura 8. Representación de segundo nivel de partición para subproceso de *Cálculo de \mathcal{S}*

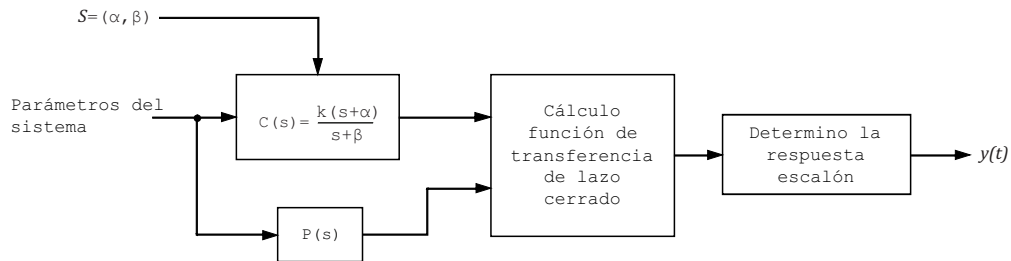


Figura 9. Representación de segundo nivel de partición para subproceso de *Cálculo respuesta escalón a partir de (α, β)*

El esquema definitivo para las etapas que constituyen la interfaz, implica la combinación de los esquemas presentados en las Figs. 7 y 8-11.

2.3.2. Selección de herramienta para implementación. A partir del diagrama obtenido en la Fig. 7, es claro que el corazón de la interfaz a ser diseñada es la rutina que calcula los parámetros de respuesta escalón en el sistema compensado para cada punto de prueba. Como ya mencionado, estas tareas facilitan su ejecución empleando los comando del *Control System Toolbox* de MATLAB. Por tanto, se considera a dicha herramienta como la primera opción para desarrollar la

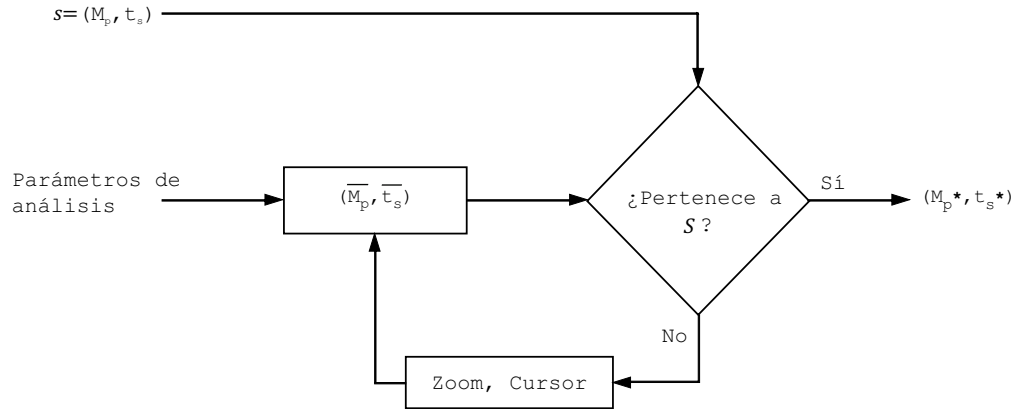


Figura 10. Representación de segundo nivel de partición para subproceso de *Elección de punto admisible en (M_p, t_s)*

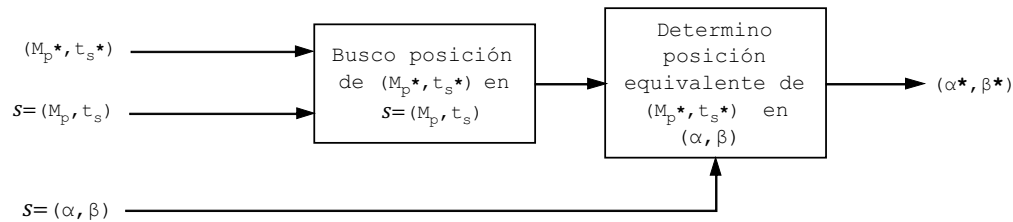


Figura 11. Representación de segundo nivel de partición para subproceso de *Conversión punto (M_p^*, t_s^*) a punto (α, β) dentro de \mathcal{S}*

interfaz de software requerida.

Mas aún, MATLAB posee además de la consola de comandos y el entorno de programación gráfico SIMULINK, un entorno para el desarrollo de interfaces de usuario denominado GUIDE (Graphical User Interface Development Environment).

Tomando en cuenta lo anterior, se selecciona MATLAB *vR2017a* para construir la interfaz de usuario que satisface los requerimientos de diseño ilustrados en los diagramas de nivel de partición previamente presentados.

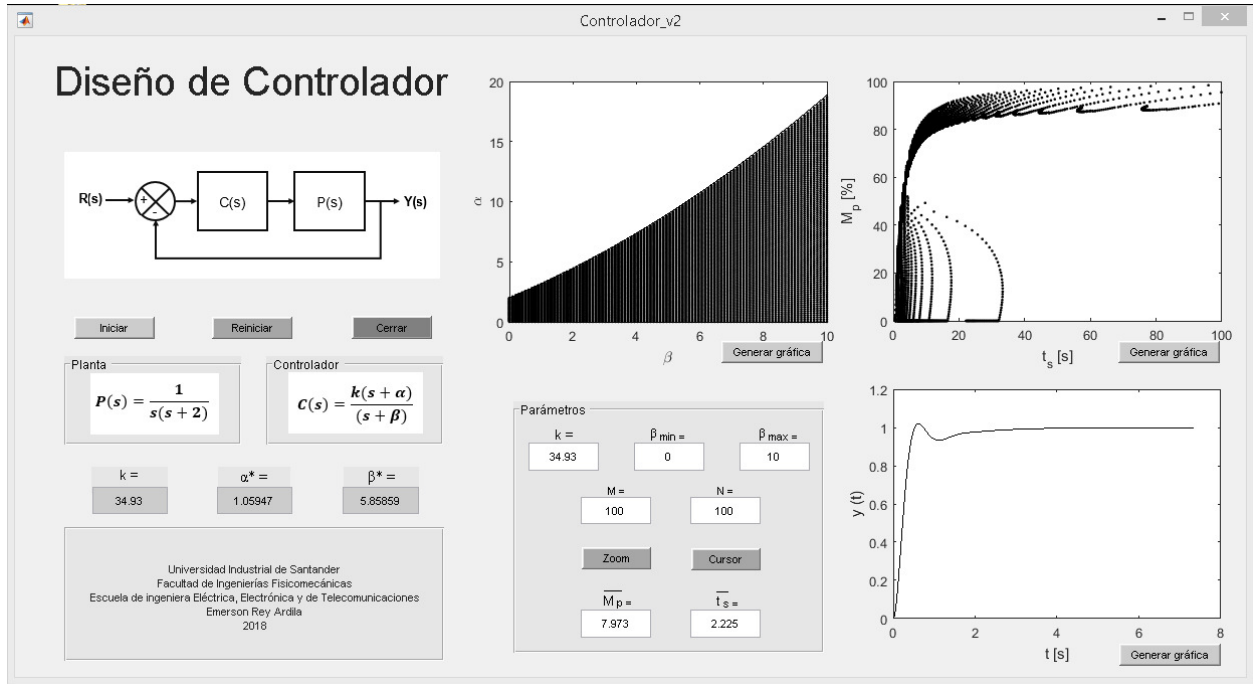


Figura 12. Presentación final para interfaz desarrollada

2.3.3. Descripción de interfaz diseñada. Procediendo con el diseño, se realiza codificación en MATLAB para la combinación de los diagramas de bloques de las Figs. 7-11, asumiendo las siguientes *variables de entrada*:

- Parámetros de simulación: $[\beta_{min}, \beta_{max}, M, N]$;
- Parámetros del sistema: $[k, P(s), \text{estructura para } C(s)]$;
- Parámetros de análisis: $[\bar{M}_p, \bar{t}_s]$,

y de salida:

- Representación de \mathcal{S} en (α, β) : $[\mathcal{S} = (\alpha, \beta)]$;
- Representación de \mathcal{S} en (M_p, t_s) : $[\mathcal{S} = (M_p, t_s)]$;

- Controlador admisible seleccionado: $[(\alpha^*, \beta^*)]$;
- Respuesta temporal controlador seleccionado: $[y^*(t)]$.

Todo lo anterior fue adecuado como se presenta en la Fig. 12, ilustrando la presentación final de la interfaz desarrollada.

3. Modelado matemático del dron

En el presente Capítulo se formula el conjunto de ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento dinámico del *dron*; es decir, su modelo matemático. Partiendo de principios físicos y trigonométricos fundamentales, se estudia el movimiento de la partícula en el espacio a partir de simulación numérica de modelos efectuada en MATLAB. Esta información del comportamiento temporal del sistema, será base para el diseño de estrategias de control abordadas en Capítulos posteriores.

3.1. Vehículos aéreos no tripulados

La siguiente descripción general de vehículos aéreos no tripulados (UAV del inglés unmanned aerial vehicles) del tipo cuadrotor, es una adaptación de los contenidos reportados a manera de revisión en (Gupte et al., 2012).

Los cuadricópteros o cuadrotores (ver Fig. 13), son un tipo único de UAV que posee la habilidad de despegue y aterrizaje vertical. Este tipo de vehículo se considera un sistema subactuado, debido a que posee menos entradas que salidas, lo cual lo hace un reto desde el punto de vista del control de su dinámica. Históricamente los UAV fueron concebidos para la industria militar. Sin embargo, actualmente el abaratamiento de costos y desarrollo de materiales han permitido masificar su uso en aplicaciones civiles con popularidad en aumento.

3.1.1. Mecanismo de vuelo. La mayor diferencia entre un cuadrotor y un helicóptero tradicional está en su modo de propulsión de rotor fijo, en el cual la dirección de navegación

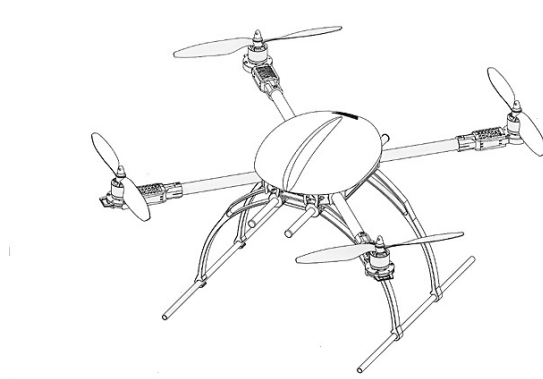


Figura 13. Vehículo aéreo no tripulado tipo *dron* cuadrotor

en cualquiera de sus ejes puede variar con sólo modificar la propulsión a partir de una cierta combinación de velocidad en sus motores. La distribución de los cuatro motores puede realizarse en forma de x o de $+$, teniendo cada una sus respectivas ventajas.

3.1.2. Control del sistema. Con el aumento de posibilidades de uso de vehículos UAV tipo cuadrotor, se han verificado progresos en los algoritmos orientados a una mayor maniobrabilidad y efectividad en aplicaciones cada vez más complejas. En la literatura técnica se reportan técnicas de control aplicadas en cuadrotores que van desde control PID elemental hasta controladores basados en redes neuronales. Asimismo, ha sido interesante la comparación realizada entre el comportamiento de especies de la naturaleza y este tipo de vehículo, en la búsqueda por sincronizar operación colaborativa explotando su versatilidad y velocidad de respuesta.

3.1.3. Sensórica. A nivel de tecnología, desarrollos en materiales y miniaturización electrónica han permitido dotar cuadrotores con dispositivos como sistemas microelectromecánicos (MEMs), unidades de medida inercial (IMUs) y sistemas de posicionamiento geoestacionario (GPS). Algunas aplicaciones también adicionan sistemas de visión y localización basada en ra-

diofrecuencia. A pesar de ello, la precisión en las trayectorias del dispositivo y la estabilidad ante condiciones adversas de operación (principalmente de tipo climático) aún imponen restricciones en la operación del sistema.

3.1.4. Aplicaciones. Una aeronave tripulada está limitada por las habilidades y la fatiga del piloto. Desde ese punto de vista, la automatización de un cuadrotor permite emplearlos en aplicaciones donde sea latente el riesgo o se perjudique la integridad humana. Piense por ejemplo en una expedición al cráter de un volcán o el sobrevuelo de un área contaminada por radioactividad. El potencial para este tipo de aplicaciones depende del entendimiento de la operación del sistema a través de la formulación de modelos matemáticos adecuados, tal y como se describe a continuación.

3.2. Coordenadas en el espacio de movimiento

Formular las ecuaciones que describen el modelo dinámico del *dron* implica definir sus coordenadas en el espacio de movimiento. Cuando un objeto gira alrededor de un eje, el análisis del movimiento puede simplificarse si se considera un cuerpo rígido; es decir, formado por varias partículas puntuales que guardan distancias constantes entre si (Sears et al., 2005).

Por tanto, asumiendo que el *dron* de la Fig. 13 es un cuerpo rígido, su dinámica se describe en el espacio de movimiento a través de tres cantidades principales ilustradas en la Fig. 14, correspondientes con los ángulos de: 1) balanceo ϕ (roll), 2) cabeceo θ (pitch) y 3) guiñada ψ (yaw). Estos ángulos se miden en un sistema de referencia fijo con respecto a la tierra (o inercial), denotado como O y definido con base en los ejes coordenados $(\vec{x}_O, \vec{y}_O, \vec{z}_O)$. A su vez, se considera

un sistema variante en el tiempo alineado con el cuerpo del *dron* y denotado como B en la Fig. 14, con centro de masa en el origen de sus ejes coordenados $(\vec{x}_B, \vec{y}_B, \vec{z}_B)$.

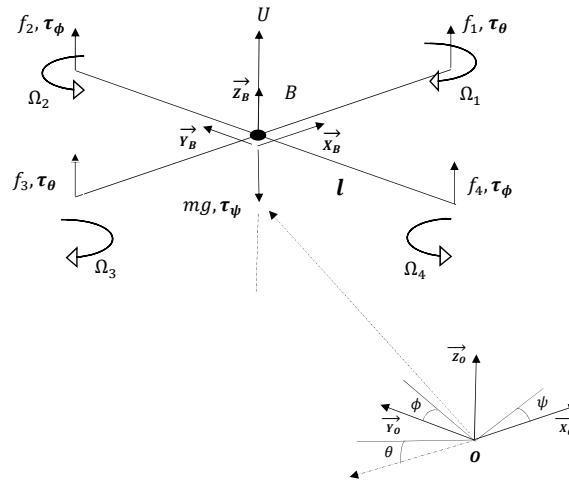


Figura 14. Diagrama de cuerpo libre del *dron* cuadroto. Adaptado de (Vianna Raffo, 2007)

Para transformar las coordenadas de un punto entre el marco de referencia del cuerpo y el

marco de referencia inercial, se utiliza la expresión:

$$\begin{bmatrix} x_O \\ y_O \\ z_O \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix}, \quad (13)$$

donde (Spong and Vidyasagar, 2008):

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}.$$

Asimismo, es posible definir una relación entre el vector de velocidades angulares en el marco de referencia del cuerpo:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix},$$

con respecto a la variación temporal de los ángulos en el marco de referencia inercial:

$$\eta = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix},$$

a partir de la siguiente expresión:

$$v = \mathbf{W}\eta, \quad (14)$$

siendo (Spong and Vidyasagar, 2008):

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Las matrices de transformación de coordenadas \mathbf{R} y \mathbf{W} son ortogonales; es decir, son matrices cuadradas cuya matriz inversa coincide con su matriz transpuesta (Grossman, 1993). Dicha matriz transpuesta (o inversa) corresponde por tanto con la transformación inversa del sistema de coordenadas. Para el caso particular de la matriz \mathbf{W} la inversa se define sólo si $\theta \neq (2k-1)\phi/2 \forall k \in \mathbb{Z}$ (Luukkonen, 2011).

Finalmente, el movimiento traslacional puede expresarse en términos de las velocidades

lineales para el marco inercial:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{x}_O \\ \dot{y}_O \\ \dot{z}_O \end{bmatrix},$$

y para el marco de referencia del cuerpo:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \\ \dot{z}_B \end{bmatrix},$$

relacionadas entre si a través de la expresión (Vianna Raffo, 2007):

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{V}.$$

3.3. Ecuaciones del movimiento

A continuación, se determinarán las ecuaciones para la dinámica del *dron* empleando la formulación de Newton-Euler (Sears et al., 2005).

3.3.1. Movimiento de traslación. Se considera inicialmente la segunda ley de Newton aplicada al movimiento de traslación, con respecto al marco de referencia del cuerpo en el diagrama

de la Fig. 14. A partir de ello se obtiene:

$$\sum F = m\dot{\mathbf{V}} + (\mathbf{v} \times m\mathbf{V}), \quad (15)$$

siendo $m\dot{\mathbf{V}}$ el vector de fuerza debida a la velocidad en la dirección del movimiento y $(\mathbf{v} \times m\mathbf{V})$ la fuerza centrífuga que afecta cualquier movimiento no inercial.

En la mecánica clásica, la fuerza centrífuga es una fuerza ficticia que aparece cuando se describe el movimiento de un cuerpo en un sistema de referencia en rotación, o equivalentemente la fuerza aparente que percibe un observador no inercial que se encuentra en un sistema de referencia rotatorio (Sears et al., 2005).

La masa total del *dron* se asume concentrada en la cantidad m . Por tanto, considerando como fuerzas externas de traslación a los estímulos $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ producidos por los motores (ver Fig. 14) y el peso del *dron*, es posible escribir:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^4 f_i \end{bmatrix} - m\mathbf{R}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix},$$

siendo g la constante de gravitación universal, cuyo vector de fuerza afecta el eje z en el

marco de referencia inercial, o equivalentemente los tres ejes del marco de referencia del cuerpo a través de la matriz de rotación \mathbf{R} .

Asimismo, la fuerza de estímulo de cada motor se asume proporcional al cuadrado de su velocidad angular Ω por un factor de amortiguamiento viscoso b , permitiendo reescribir la expresión anterior en la forma:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^4 b\Omega_i^2 \end{bmatrix} - m\mathbf{R}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}.$$

También, es posible definir un vector de fuerzas de perturbación al movimiento de traslación, correspondientes con efectos aerodinámicos debidos a fricción de aire en oposición al desplazamiento. Dichas fuerzas aerodinámicas, se consideran proporcionales a la velocidad de traslación

inercial mediante coeficientes constantes, es decir:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_d &= \mathbf{R}^{-1} \begin{bmatrix} A_x & 0 & 0 \\ 0 & A_y & 0 \\ 0 & 0 & A_z \end{bmatrix} \mathbf{v} \\ &= \mathbf{R}^{-1} \begin{bmatrix} A_x \dot{x}_O \\ A_y \dot{y}_O \\ A_z \dot{z}_O \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Todo lo anterior, permite obtener la siguiente expresión para la dinámica de traslación en el marco de referencia del cuerpo:

$$m\dot{\mathbf{V}} + (\mathbf{v} \times m\mathbf{V}) = \mathbf{F} - \mathbf{F}_d, \quad (16)$$

con correspondiente expresión equivalente en el marco de referencia inercial dada por:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}m\dot{\mathbf{V}} &= \mathbf{R}\mathbf{F} - \mathbf{R}\mathbf{F}_d \\
 \dot{\mathbf{v}} &= \frac{1}{m}(\mathbf{R}\mathbf{F} - \mathbf{R}\mathbf{F}_d) \\
 \begin{bmatrix} \ddot{x}_O \\ \ddot{y}_O \\ \ddot{z}_O \end{bmatrix} &= \frac{1}{m}\mathbf{R} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^4 b\Omega_i^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} - \frac{1}{m} \begin{bmatrix} A_x\dot{x}_O \\ A_y\dot{y}_O \\ A_z\dot{z}_O \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \ddot{x}_O \\ \ddot{y}_O \\ \ddot{z}_O \end{bmatrix} &= \frac{U}{m} \begin{bmatrix} \cos\psi \sin\theta \cos\phi + \sin\psi \sin\phi \\ \sin\psi \sin\theta \cos\phi - \cos\psi \sin\phi \\ \cos\theta \cos\phi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} - \frac{1}{m} \begin{bmatrix} A_x\dot{x}_O \\ A_y\dot{y}_O \\ A_z\dot{z}_O \end{bmatrix}, \quad (17)
 \end{aligned}$$

tras anularse el efecto de la fuerza centrífuga y para

$$U = \sum_{i=1}^4 b\Omega_i^2,$$

definiendo la fuerza de empuje.

3.3.2. Movimiento de rotación. De manera equivalente, la segunda ley de Newton de rotación con respecto al marco de referencia del cuerpo en el diagrama de la Fig. 14 permite obtener:

$$\sum \tau = \mathbf{J}\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} \times \mathbf{J}\mathbf{v}), \quad (18)$$

donde $\mathbf{J}\dot{\mathbf{v}}$ y $(\mathbf{v} \times \mathbf{J}\mathbf{v})$ son respectivamente, el vector de torques debidos a la velocidad angular en la dirección del ángulo de movimiento y su fuerza centrífuga correspondiente.

Siendo el *dron* un cuerpo rígido, se asume que su momento de inercia se distribuye a través de una estructura simétrica, expresada en términos de una matriz diagonal de contribuciones de momento de inercia en cada eje:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}.$$

Como fuerzas externas de rotación, se consideran los torques $\{\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi\}$ generados por la rotación de las hélices de los motores. Por tanto, tomando como referencia la convención empleada en el sentido de giro para las velocidades angulares de la Fig 14, se hacen válidas las siguientes combinaciones:

$$\begin{aligned} \tau_\phi &= bl(\Omega_2^2 - \Omega_4^2); \\ \tau_\theta &= bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2); \\ \tau_\psi &= k_\tau(\Omega_1^2 + \Omega_3^2 - \Omega_2^2 - \Omega_4^2), \end{aligned} \quad (19)$$

siendo l la distancia del centro de masa a cada rotor y k_τ un coeficiente ponderando el par de arrastre.

A su vez, se considera un par de fuerza inercial τ_G debido al efecto giroscópico y definido en el modo siguiente:

$$\begin{aligned}\tau_G &= \mathbf{v} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_G \Omega \end{bmatrix} \\ &= J_G \Omega \begin{bmatrix} q \\ -p \\ 0 \end{bmatrix},\end{aligned}\tag{20}$$

siendo J_G el momento de inercia total de los rotores y

$$\Omega = \Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4$$

la velocidad de precesión. En el Anexo A se realiza una breve reflexión acerca del efecto giroscópico y las fuerzas inerciales, así como un repaso de las operaciones de producto vectorial empleadas para el cálculo presentado en (20).

De esta manera, es posible reescribir (18) como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} - \tau_G &= \mathbf{J}\dot{\mathbf{v}} + \left(\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \right) \right) \\
 \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} - J_G \Omega \begin{bmatrix} q \\ -p \\ 0 \end{bmatrix} &= \mathbf{J}\dot{\mathbf{v}} + \left(\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{xx}p \\ I_{yy}q \\ I_{zz}r \end{bmatrix} \right) \\
 \begin{bmatrix} \tau_\phi - qJ_G\Omega \\ \tau_\theta + pJ_G\Omega \\ \tau_\psi \end{bmatrix} &= \mathbf{J}\dot{\mathbf{v}} + \begin{bmatrix} qr(I_{zz} - I_{yy}) \\ pr(I_{xx} - I_{zz}) \\ pq(I_{yy} - I_{xx}) \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \tau_\phi - qJ_G\Omega \\ \tau_\theta + pJ_G\Omega \\ \tau_\psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} qr(I_{zz} - I_{yy}) \\ pr(I_{xx} - I_{zz}) \\ pq(I_{yy} - I_{xx}) \end{bmatrix} &= \mathbf{J}\dot{\mathbf{v}} \\
 \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \tau_\phi - qJ_G\Omega + qr(I_{yy} - I_{zz}) \\ \tau_\theta + pJ_G\Omega + pr(I_{zz} - I_{xx}) \\ \tau_\psi + pq(I_{xx} - I_{yy}) \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\tau_\phi - qJ_G\Omega + qr(I_{yy} - I_{zz})}{I_{xx}} \\ \frac{\tau_\theta + pJ_G\Omega + pr(I_{zz} - I_{xx})}{I_{yy}} \\ \frac{\tau_\psi + pq(I_{xx} - I_{yy})}{I_{zz}} \end{bmatrix}, \tag{21}
 \end{aligned}$$

representando la dinámica de los ángulos del *dron* con respecto al marco de referencia del cuerpo.

En la práctica, se obtienen medidas para esta clase de vehículos empleando sensores inerciales (o IMU de su sigla en inglés: *Inertial Measurement Unit*) y por tanto, conviene relacionar la expresión (21) con los ángulos (medibles) del sistema de referencia inercial, empleando la relación dada en (14); es decir:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} &= \frac{d}{dt} \left(\mathbf{W}^{-1} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

3.3.3. Simplificaciones del modelo. Las expresiones (17) y (22) resumen la dinámica del sistema. Sin embargo, si se observa con detalle se puede notar que estas expresiones son altamente no lineales. Por tanto, se asume una operación para pequeños valores de los ángulos ψ , θ y ϕ cercana al punto de equilibrio (es decir, para los tres ángulos en cero).

Bajo estas condiciones:

$$\cos(\psi) = \cos(\theta) = \cos(\phi) \approx 1; \quad \sin(\psi) = \sin(\theta) = \sin(\phi) \approx 0,$$

y así, las expresiones dinámicas en el marco de referencia inercial se reducen a lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_O \\ \ddot{y}_O \\ \ddot{z}_O \end{bmatrix} = \frac{U}{m} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} - \frac{1}{m} \begin{bmatrix} A_x \dot{x}_O \\ A_y \dot{y}_O \\ A_z \dot{z}_O \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \right) \\ = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

3.4. Análisis del comportamiento en lazo abierto

Para verificar el comportamiento del sistema constituido por las expresiones (23)-(24), se realizó integración numérica en MATLAB® empleando la función *ode45* (ver Anexo B) junto con los valores de parámetro incluidos en la Tabla 1, tomados de (Tayebi and Mcgilvray, 2006).

Tabla 1

Parámetros empleados para simulación del modelo

Parámetros ¹	Valor	Unidades
g	9.81	m/s^2
m	0.468	kg
l	0.225	m
k_τ	2.980×10^{-6}	$kg\,m^2/rad^2$
b	1.140×10^{-7}	$kg\,m/rad^2$
J_G	3.357×10^{-5}	$kg\,m^2$
I_{xx}	4.856×10^{-3}	$kg\,m^2$
I_{yy}	4.856×10^{-3}	$kg\,m^2$
I_{zz}	8.801×10^{-3}	$kg\,m^2$
A_z	0.25	kg/s

¹ Nota explicativa de la tabla, en caso de requerirlo.

Los análisis de simulación se realizaron considerando translación únicamente en la coordenada z_O ; es decir, para $\dot{x}_O = \dot{y}_O = 0$. De esta manera (23) puede reducirse a lo siguiente:

$$\ddot{z}_O = \frac{U}{m} - g - \frac{1}{m}A_z\dot{z}_O. \quad (25)$$

Por tanto, considerando como vector de estados:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_O \\ \dot{z}_O \\ \phi \\ \dot{\phi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

la dinámica del sistema puede ser expresada como sigue:

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} y_2 \\ \frac{U}{m} - g - \frac{1}{m}A_z y_2 \\ y_4 \\ \frac{\tau_\phi - y_6 J_G \Omega + y_6 y_8 (I_{yy} - I_{zz})}{I_{xx}} \\ y_6 \\ \frac{\tau_\theta + y_4 J_G \Omega + y_4 y_8 (I_{zz} - I_{xx})}{I_{yy}} \\ y_8 \\ \frac{\tau_\psi + y_4 y_6 (I_{xx} - I_{yy})}{I_{zz}} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Para determinar los valores de equilibrio en las variables del sistema, se iguala a cero el lado izquierdo de (27), obteniendo:

$$\begin{aligned} \bar{y}_2 &= 0 \\ \bar{y}_4 &= 0 \\ \bar{y}_6 &= 0 \\ \bar{y}_8 &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Asimismo:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\bar{U}}{m} - g - \frac{1}{m} A_z \bar{y}_2 \\
 &= \frac{\bar{U}}{m} - g \\
 \bar{U} &= mg,
 \end{aligned}$$

corresponde con el impulso de propulsión nominal para la condición de equilibrio.

Un razonamiento similar permite obtener:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\bar{\tau}_\phi - \bar{y}_6 J_G \Omega + \bar{y}_6 \bar{y}_8 (I_{yy} - I_{zz})}{I_{xx}} \\
 &= \frac{\bar{\tau}_\phi}{I_{xx}} \\
 \bar{\tau}_\phi &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\bar{\tau}_\theta + \bar{y}_4 J_G \Omega + \bar{y}_4 \bar{y}_8 (I_{zz} - I_{xx})}{I_{yy}} \\
 &= \frac{\bar{\tau}_\theta}{I_{xx}} \\
 \bar{\tau}_\theta &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\bar{\tau}_\psi + \bar{y}_4 \bar{y}_6 (I_{xx} - I_{yy})}{I_{zz}} \\
&= \frac{\bar{\tau}_\psi}{I_{xx}} \\
\bar{\tau}_\psi &= 0,
\end{aligned}$$

como los valores de torque aplicado por los motores en las direcciones angulares correspondientes, durante la condición de equilibrio.

La Fig. 15 muestra resultados de simulación para el sistema de ecuaciones (27) empleando condiciones de equilibrio y despreciando los efectos de la fuerza giroscópica (es decir, para $\tau_G = [0 \ 0 \ 0]^T$).

Como se observa en la Fig. 15(a), la condición inicial para z tomada como 10 m es desplazada a una posición diferente hasta alcanzar un valor cercano a 12 m , debido a una velocidad \dot{z} no nula. Como se muestra en la Fig. 15(b) esta velocidad posee un valor inicial de 1 m/s que se desvanece rápidamente hacia cero en alrededor de 10 s , periodo de coincide con el transitorio en z antes de alcanzar un nuevo valor constante. Con respecto a los ángulos, se observa que tanto posiciones como velocidades angulares se mantienen invariantes desde una condición inicial cero. Todo este comportamiento es consistente con las características esperadas para el sistema, pues se considera como entrada la propulsión nominal \bar{U} .

Una situación diferente se verifica a partir de $t = 30s$, instante en el cual se aplica un desbalance en la fuerza f_4 siendo reducido su valor nominal en un 1 %. Como se observa en la Fig. 15(a) esto ocasiona un desplazamiento lineal en la dirección z con velocidad constante negativa (ver Fig. 15(b)). Dicho desbalance afecta también a los ángulos ϕ y ψ (Figs. 15(c) y 15(g)) junto con sus respectivas derivadas (Figs. 15(d) y 15(h)) debido a la influencia de f_4 en τ_ϕ y τ_ψ a través de Ω_4 , según evidenciado en (19). La influencia sobre ψ es cuadrática (Fig. 15(g)) y por consiguiente el incremento de su velocidad es lineal (Fig. 15(h)). En el caso de ϕ (Fig. 15(c)) el ángulo tiende a establecerse en un cierto valor de manera altamente oscilatoria aunque amortiguada. Existe establecimiento debido a que la velocidad angular $\dot{\phi}$ oscila alrededor de cero (Fig. 15(d)).

La razón por la cual la dinámica de ϕ no se comporta igual a la dinámica de ψ se explica por el término de acoplamiento en (27), que se anula para ψ dado que $I_{xx} = I_{yy}$ (ver Tabla 1). Esta dinámica de acoplamiento también causa alteración en el comportamiento del ángulo θ y su derivada $\dot{\theta}$ según se aprecia en las Figs. 15(e) y 15(f), respectivamente.

De otro lado, la Fig. 16 permite realizar observaciones similares para el caso en que se consideran los efectos de la fuerza giroscópica τ_G , a partir de lo cual se reproduce el escenario para las dinámicas de z y ψ . Con respecto al comportamiento de ϕ y θ no es posible realizar conclusiones debido al acople dinámico mencionado.

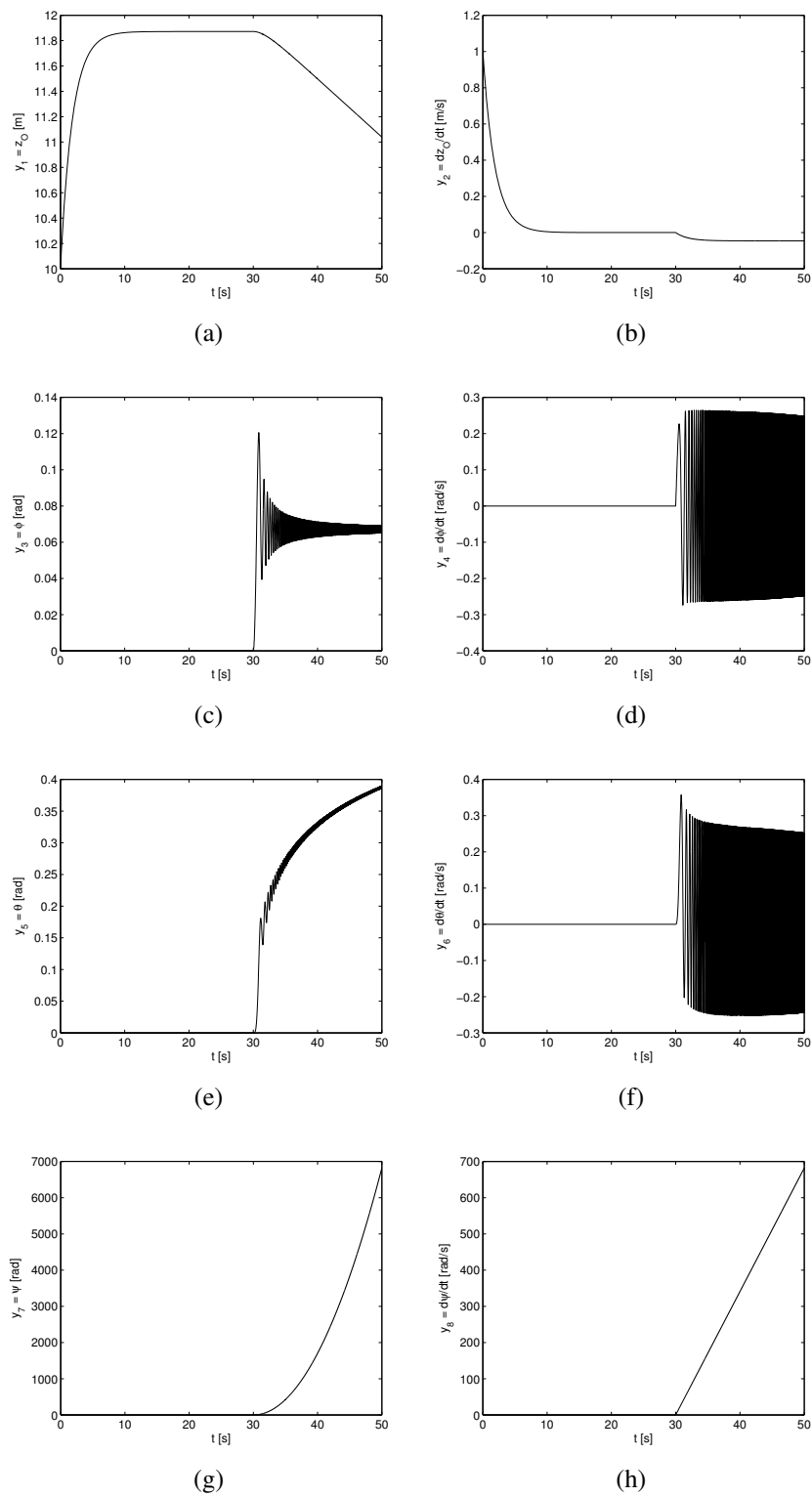


Figura 15. Simulación del sistema ante condiciones de equilibrio perturbado: (a) $z(t)$, (b) $\dot{z}(t)$, (c) $\phi(t)$, (d) $\dot{\phi}(t)$, (e) $\theta(t)$, (f) $\dot{\theta}(t)$, (g) $\psi(t)$ y (h) $\dot{\psi}(t)$

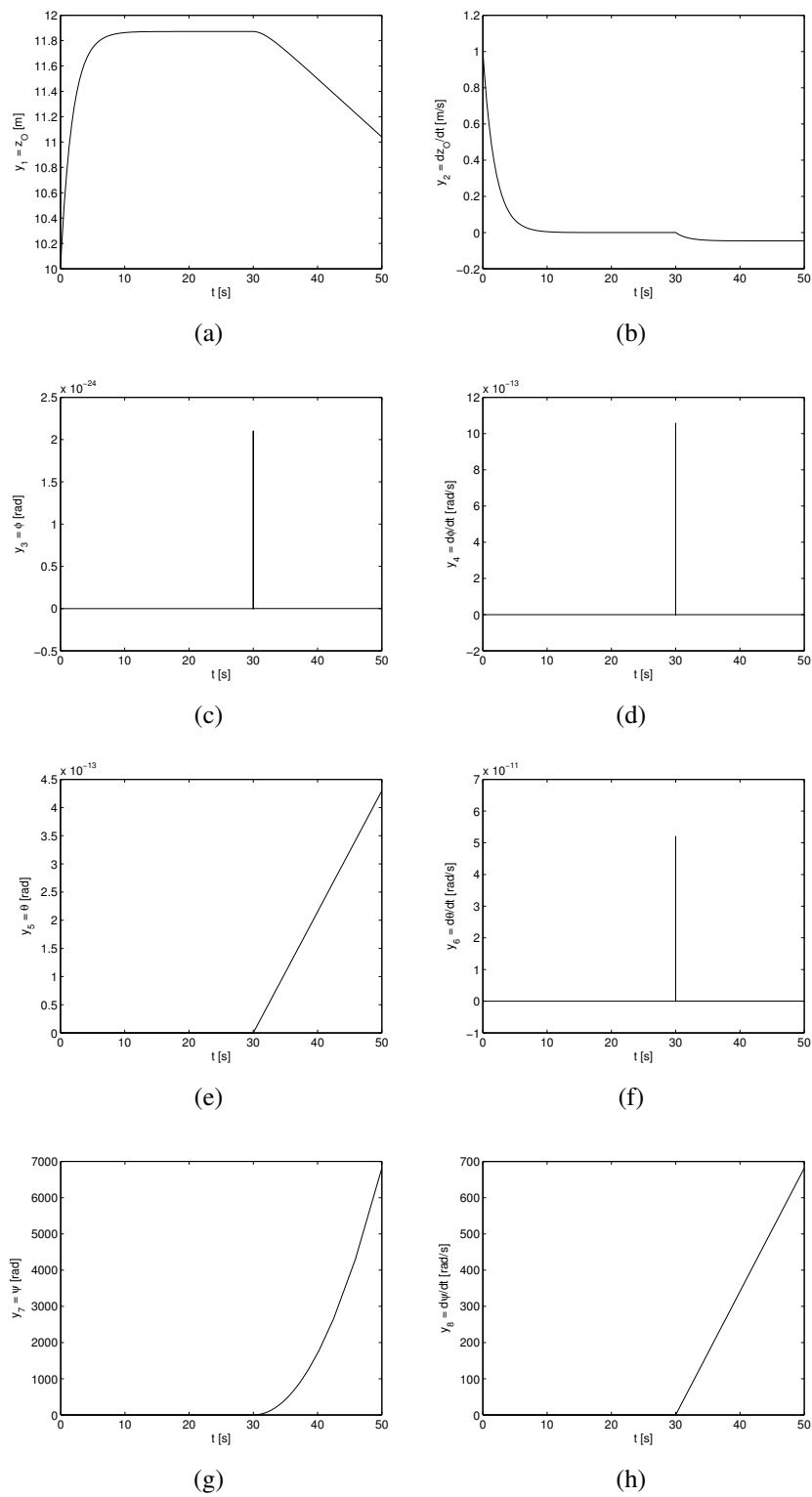


Figura 16. Simulación del sistema ante condiciones de equilibrio perturbado con efecto giroscópico: (a) $z(t)$, (b) $\dot{z}(t)$, (c) $\phi(t)$, (d) $\dot{\phi}(t)$, (e) $\theta(t)$, (f) $\dot{\theta}(t)$, (g) $\psi(t)$ y (h) $\dot{\psi}(t)$

4. Controladores PI y su conjunto estabilizante

Como complemento a los desarrollos presentados en el capítulo anterior, se analiza a continuación la incidencia de conjuntos estabilizantes en controladores clásicos del tipo proporcional/integral (más conocidos como PI), sintonizados empleando las reglas de *Ziegler & Nichols*. La manera de abordar el problema involucra una revisión general de conceptos, el cálculo de \mathcal{S} para un caso de estudio y la definición de una métrica para valorar la *fragilidad* del controlador diseñado.

4.1. Controladores PID

La acción de control proporcional/integral/derivativo (o simplemente PID), constituye la estrategia de control más empleada en automatización de procesos industriales (Astrom and Hagglund, 1995).

Entre las razones por las cuales se prefiere el uso de controladores PID, se incluye la simplicidad de su estructura que con tan sólo 3 términos permite asegurar rechazo ante perturbaciones, velocidades de respuesta apropiadas y la eliminación de errores en estado estacionario. Lo anterior, facilita el cálculo de parámetros de control al igual que su operación y mantenimiento (Díaz and Bhattacharyya, 2016) (Díaz, 2017) (Méndez et al., 2008).

Fundamentalmente, la estructura de una acción PID está constituida de una parte *proporcional al error*:

$$u_P = k_P e(t),$$

siendo $e(t)$ el error de medida y k_P la ganancia proporcional; una parte *proporcional a la historia del error* (a partir del operador de memoria integral en el tiempo):

$$u_I = k_I \int_0^t e(t) dt,$$

con ganancia integral k_I y finalmente, una parte *proporcional al cambio reciente del error* (a partir del operador anticipativo derivada temporal):

$$u_D = k_D \frac{d}{dt} e(t),$$

con ganancia derivativa k_D . La superposición de las tres acciones anteriores permite constituir la siguiente expresión para el esfuerzo de control:

$$u_{PID}(t) = u_P + u_I + u_D \quad (29)$$

$$= k_P e(t) + k_I \int_0^t e(t) dt + k_D \frac{d}{dt} e(t) \quad (30)$$

$$= k_P \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt + T_D \frac{d}{dt} e(t) \right), \quad (31)$$

siendo T_I el tiempo integral y T_D el tiempo derivativo. El esquema general para la realización de un controlador PID en forma paralela, se presenta en la Fig. 17.

4.1.1. Reglas de sintonización. La determinación de los parámetros del controlador (k_P , T_I y T_D), que satisfagan condiciones deseadas de desempeño para el sistema controlado, se deno-

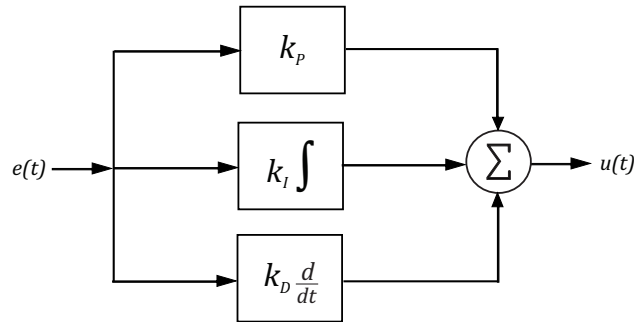


Figura 17. Controlador PID en forma de realización paralela

mina *procedimiento de sintonización*.

Existen fundamentalmente dos grandes tipos de métodos de diseño o sintonización de controladores PID: 1) los *métodos analíticos* basados en el modelo y 2) los *métodos empíricos* o experimentales basados en datos reales del proceso.

Dentro del primer grupo, se encuentran los métodos clásicos en el dominio de la frecuencia como el lugar de las raíces o la respuesta en frecuencia mediante diagramas de *Bode* y de *Nyquist*. Sin embargo, estos métodos requieren el conocimiento de un modelo matemático suficientemente apropiado para la dinámica de la planta.

En ocasiones sin embargo este modelo de la planta no se encuentra disponible o simplemente su determinación es inviable, por ejemplo por falta de información de la constitución interna del sistema. Ante esta situación los métodos de control basados en datos (*data-driven control* (Safonov and Tsao, 1997)) adquieren particular relevancia.

A nivel de técnicas de sintonización de controladores PID basadas en datos se destaca el trabajo clásico desarrollado por *Ziegler & Nichols* en 1942 (Ziegler and Nichlos, 1942), el cuál ha sido la base hasta nuestros días de métodos de sintonización para controladores que operan en aplicaciones industriales de diferente naturaleza.

Métodos adicionales de sintonización para controladores PID incluyen: el de *sintonización de relé* (Díaz, 2017); el *Cohen-Coon* (Alfaro, 2002) y otros más modernos involucrando optimización de márgenes de estabilidad a partir de herramientas computacionales (Alzate and Oliveira, 2016) (Díaz and Bhattacharyya, 2016) (Fung et al., 1998) (Ho et al., 1995) (Toscano, 2005).

Para una revisión detallada de métodos de sintonización para controladores PID, se recomienda al lector interesado consultar (Correa et al., 2008).

4.2. Análisis de estabilidad para un controlador PI

A pesar que un controlador PID concentra en una misma estructura las acciones de control necesarias para asegurar una forma de onda adecuada en la respuesta del sistema controlado, la acción derivativa se considera nociva en términos de amplificación de ruidos.

Por esta razón, el controlador proporcional/integral o simplemente PI es una estructura todavía más simple, que concentra los mayores beneficios de simpleza y utilidad práctica en aplicaciones. La función de transferencia para un controlador PI (o PID con acción derivativa nula) viene

dada por:

$$\begin{aligned} C(s) &= k_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) \\ &= \frac{k_P s + k_I}{s}. \end{aligned} \quad (32)$$

4.2.1. Sintonización PI por Ziegler & Nichols. Considere el sistema dado por:

$$P(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{s(s+1)(s+5)}, \quad (33)$$

y proceda a calcular los parámetros de un controlador PI para el mismo empleando las reglas de *Ziegler & Nichols*.

Inicialmente, se recuerda que existen dos posibles métodos (Ogata, 2010):

- *Lazo cerrado*: donde para una acción proporcional pura en el sistema realimentado, se aplican cambios de tipo escalón en la referencia buscando identificar el valor de k_P para el cual el sistema oscila con amplitud sostenida. Este valor de ganancia se denomina ganancia crítica k_{cr} y al periodo de oscilación correspondiente periodo crítico P_{cr} ;
- *Lazo abierto*: cuando no existe un valor k_{cr} que produzca oscilaciones sostenidas, se recurre a aplicar un estímulo de tipo escalón al sistema en lazo abierto buscando obtener una respuesta en forma de s tal y como la ilustrada en la Fig. 18, siendo T y L las cantidades a ser tomadas en cuenta.

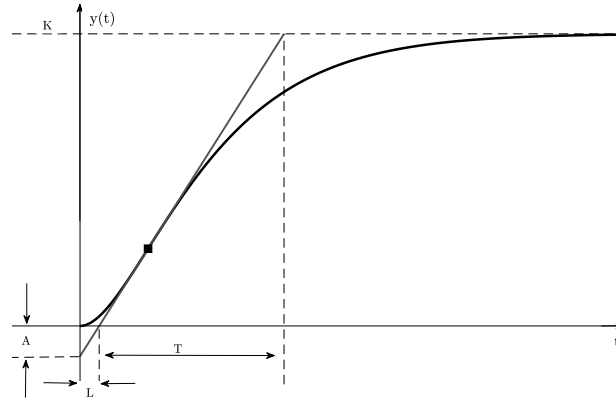


Figura 18. Respuesta escalón en forma de s del método en lazo abierto

Una vez obtenidos los valores importantes para cada caso, los parámetros del controlador PI (i.e. ganancia proporcional k_p y tiempo integral T_I) se determinan con base en las equivalencias presentadas en la Tabla 2.

Tabla 2

Equivalencias cálculo controlador PI para métodos de Ziegler & Nichols

Método	k_p	T_I
Lazo abierto	$0.45k_{cr}$	$\frac{1}{1.2}P_{cr}$
Lazo cerrado	$0.9\frac{T}{L}$	$\frac{L}{0.3}$

Nota: Adaptado de (Ogata, 2010).

En el caso particular de una configuración realimentada como la presentada en la Fig. 1 para la combinación de planta y controlador dada respectivamente por las expresiones (33) y (32), es posible mostrar que el lugar geométrico de las raíces para el sistema realimentado cruza el eje imaginario cuando $k_p = k_{cr} = 30$, con oscilaciones sostenidas de periodo $P_{cr} = 2.81$ [s].

De esta manera, el controlador diseñado corresponde con $k_P = 13.50$; $T_I = 2.34$; es decir:

$$\begin{aligned} C(s) &= 13.50 \left(1 + \frac{1}{2.34s} \right) \\ &= \frac{13.50s + 5.76}{s}. \end{aligned} \quad (34)$$

Los parámetros de respuesta para el sistema compensado empleando dicho controlador, corresponden con:

$$Mp = 104.05 [\%]; \quad t_s = 249.54 [s],$$

según ilustrado en la respuesta escalón de la Fig. 19.

Esta respuesta dinámica a pesar de ser estable, no representa un resultado satisfactorio en términos de velocidad de convergencia hacia el valor de estado estacionario, dadas las evidentes oscilaciones del régimen transitorio y el prolongado tiempo de establecimiento. Dicha condición es susceptible de mejora a través de un *ajuste fino*. Nótese sin embargo, que la acción de control es simple (PI) y la planta es de un orden significativo (tercero).

4.2.2. Conjunto estabilizante para sistema ante control PI. Empleando un tratamiento similar al utilizado para el análisis del conjunto estabilizante de la *Sección 2.1*, es posible deducir que la combinación de planta + controlador definida en (33) y (32), permite delimitar una región

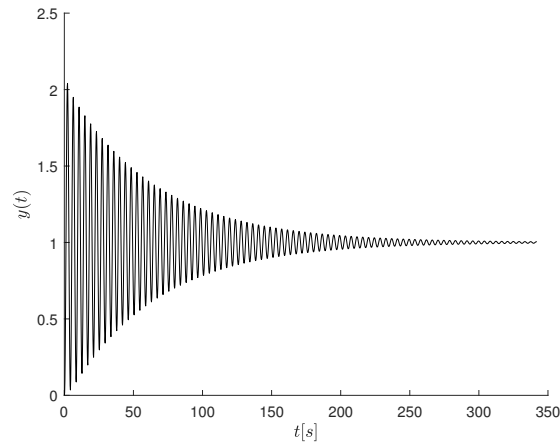


Figura 19. Respuesta escalón del sistema compensado

de estabilidad en el plano (k_P, k_I) dada por:

$$0 < k_P < 30; \quad (35)$$

$$0 < k_I < \frac{-k_P^2 + 30k_P}{36}, \quad (36)$$

definiendo a su vez el siguiente conjunto estabilizante:

$$\mathcal{S} = \{(k_P, k_I) : (35) \text{ y } (36) \text{ se satisfagan simultáneamente}\}. \quad (37)$$

La Fig. 20 ilustra el conjunto estabilizante (37), resaltando en su interior mediante un asterisco el punto correspondiente al controlador diseñado y definido en (34).

Como se observa, el controlador analizado en la Fig.19 se encuentra cerca de los límites de estabilidad, justificando la alta oscilación de su respuesta dinámica.



Figura 20. Conjunto estabilizante en el plano (k_P, k_I)

La siguiente *Sección* realizará un análisis alrededor de la *fragilidad* del controlador PI.

4.3. Fragilidad de controladores PI

Los métodos de *Ziegler & Nichols* para la sintonización de controladores PI y PID han sido la referencia empleada por ingenieros en diversos campos de aplicación desde su aparición en 1942. Sin embargo, como se observó en el ejemplo presentado en la *Sección* anterior, no siempre se logra una respuesta dinámica adecuada a las exigencias de una respuesta deseada, aunque la misma sea estable.

La forma tradicional de corregir esta situación, es considerar que los parámetros del controlador PI o PID obtenidos por el método de *Ziegler & Nichols* son el valor inicial de un proceso iterativo denominado *ajuste fino*, que permitirá eventualmente obtener una respuesta mejorada en términos de *nuevos valores sintonizados*.

El objetivo de la presente *Sección* no es discutir el proceso de sintonía fina de parámetros en los métodos de Ziegler & Nichols, sino evaluar la *fragilidad del controlador* diseñado con dicho método, en términos de su conjunto estabilizante.

En (Keel and Bhattacharyya, 1997) Bhattacharyya define la *fragilidad de un controlador* como aquel fenómeno que implica para el mismo márgenes de estabilidad extremadamente pequeños. Otra manera de entender el concepto es a través de la más pequeña perturbación admisible en los parámetros de un controlador tal que el sistema realimentado pierda su estabilidad. La fragilidad es un concepto muy cercano a la robustez, y por tanto conviene enfatizar en que la primera estudia la manera en que alteraciones leves en los valores de parámetro de un controlador afectan la estabilidad del sistema realimentado, mientras que la segunda realiza el estudio independiente de donde hayan ocurrido las variaciones paramétricas.

4.3.1. Geometría para márgenes de estabilidad en un controlador PI. Una interpretación geométrica del margen de fase para un sistema realimentado ante un control PI, se propone en (Alzate and Oliveira, 2016). El desarrollo presentado en el presente numeral se basa en el trabajo referenciado y sugiere la manera de aplicar el mismo resultado en términos del margen de ganancia del sistema.

Para ello, asuma $P(j\omega)$ y $C(j\omega)$ como la respuesta frecuencial de la planta y el controlador PI definidos en (33) y (32), respectivamente. En el sistema realimentado estable que se obtiene a

partir de esta combinación *planta + controlador*, los márgenes de ganancia A_m y fase θ_m se pueden determinar analíticamente a partir de las condiciones de magnitud y fase:

$$|P(j\omega_g)||C(j\omega_g)| = 1, \quad (38)$$

$$\angle P(j\omega_\theta) + \angle C(j\omega_\theta) = \pi n; \quad n = \pm 1, 3, 5 \dots \quad (39)$$

de manera que:

$$A_m = \frac{1}{|P(j\omega_\theta)||C(j\omega_\theta)|}, \quad (40)$$

$$\theta_m = \angle P(j\omega_g) + \angle C(j\omega_g) - \pi, \quad (41)$$

siendo w_g y w_θ las frecuencias de cruce de ganancia y fase, respectivamente.

Alternativamente, estos márgenes de estabilidad pueden obtenerse a partir de una relación geométrica en el plano de parámetros (k_P, k_I) de un controlador PI, con respecto al conjunto estabilizante \mathcal{S} de la planta bajo esta acción de control.

Así entonces, tomando en cuenta que:

$$\begin{aligned} C(j\omega) &= k_P + \frac{k_I}{j\omega} \\ &= k_P - \frac{k_I}{\omega}j, \end{aligned} \quad (42)$$

la fase del controlador PI puede expresarse como:

$$\angle C(j\omega) = \arctan\left(\frac{-k_I}{\omega k_P}\right), \quad (43)$$

o equivalentemente:

$$-\omega k_P \tan(\angle C(j\omega)) = k_I. \quad (44)$$

Si en la expresión anterior se asume $\omega = \omega_g$, la fase del controlador $\angle C(j\omega_g)$ debe satisfacer un margen de fase θ_m ante una respuesta frecuencial $P(j\omega)$ conocida para la planta, según definido en (41). Por tanto, ante esta situación la expresión (44) define una línea recta en el plano (k_P, k_I) con pendiente $-\omega \tan(\angle C(j\omega))$, cuyos puntos satisfacen dichas restricciones.

Asimismo, a partir de la condición de magnitud del controlador se tiene:

$$|C(j\omega)|^2 = k_P^2 + \frac{k_I^2}{\omega^2}, \quad (45)$$

o equivalentemente:

$$\frac{k_P^2}{|C(j\omega)|^2} + \frac{k_I^2}{|C(j\omega)|^2 \omega^2} = 1. \quad (46)$$

Bajo la misma suposición de $\omega = \omega_g$, la expresión anterior representará una elipse en el plano (k_P, k_I) , que intersecta a la recta (44) según ilustrado en el diagrama de la Fig. 21.

El punto de intersección, dará la coordenada (k_P, k_I) del controlador PI que satisface θ_m y ω_g , representando un método gráfico para el diseño de controladores.

Al respecto del método se resaltan los siguientes detalles adicionales:

- La intersección entre la elipse y la linea recta se da para dos puntos del plano. Sin embargo, puede observarse de la Fig. 21 que sólo uno de ellos tiene sentido práctico por encontrarse al interior del conjunto estabilizante \mathcal{S} ;
- La magnitud para $C(j\omega_g)$ se deja como un parámetro libre de diseño y de este depende la amplitud (i.e. radio mayor y radio menor) de la elipse en el plano;
- El margen de ganancia no se involucra explícitamente en el método sugerido, aunque se entiende que la elección arbitraria para $|C(j\omega_g)|$ influencia dicho valor. La Sección siguiente abordará con mayor detalle este aspecto;
- El procedimiento sugerido puede abordarse explícitamente desde el margen de ganancia,

seleccionando $\omega = \omega_\theta$ y forzando de (40) a la magnitud del controlador $|C(j\omega_\theta)|$ a satisfacer un margen de ganancia A_m ante una respuesta frecuencial $P(j\omega)$ conocida para la planta. Ante esta situación, el punto de intersección en el plano (k_P, k_I) para la elipse y la línea recta representará la coordenada (k_P, k_I) del controlador PI que satisface A_m y ω_θ , dejando como parámetro libre a la pendiente de la recta y a través de ella, al margen de fase para el sistema controlado.

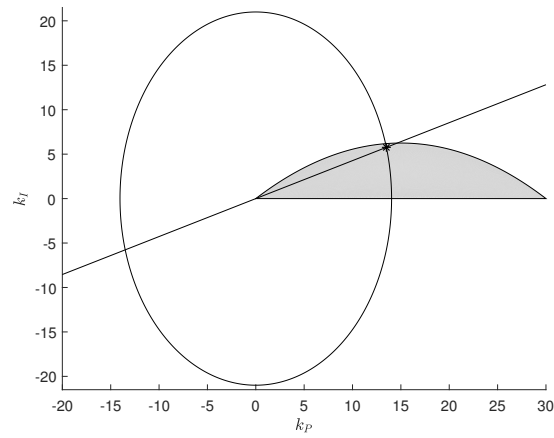
4.3.2. Definición de métrica para calcular distancia a inestabilidad. Como ya definido al principio de la presente *Sección*, un buen diseño para un controlador debe ir más allá de la simple respuesta dinámica del sistema controlado y por tanto, debe además garantizar la estabilidad para el lazo de control aún ante leves variaciones en sus parámetros.

Complementando las ideas de *Bhattacharyya* y *Keel* en (Keel and Bhattacharyya, 1997), se empleará la visión geométrica propuesta por *Morarescu et al* adaptada en el presente documento para el caso de lazos PI sin retardo (Méndez et al., 2008) (Morarescu et al., 2010).

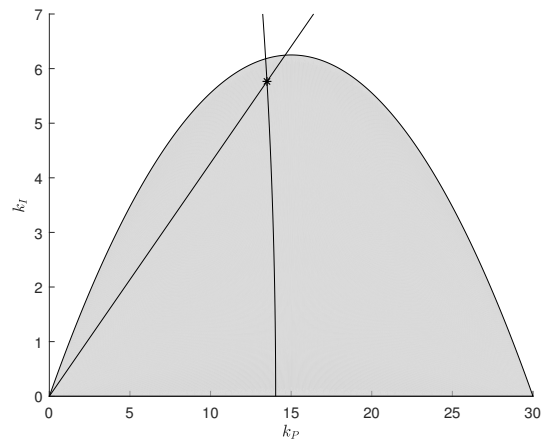
Para ello, se define la distancia euclídea:

$$d = \sqrt{(k_P^* - k_P)^2 + (k_I^* - k_I)^2}, \quad (47)$$

siendo (k_P^*, k_I^*) las coordenadas para un controlador en el límite del conjunto estabilizante \mathcal{S} y ortogonal a (k_P, k_I) , que define el radio para una circunferencia de puntos que representan un rango



(a)



(b)

Figura 21. Intersección en el plano (k_P, k_I) para línea recta y elipse, dados $\omega = \omega_g$ y θ_m , ilustrando: (a) panorámica general de la intersección y (b) detalle del punto de intersección

o margen de estabilidad.

A partir de lo anterior, dado un controlador PI al interior de \mathcal{S} es posible cuantificar su *fragilidad* a través de esta métrica, al menos en un modo relativo; es decir, dados dos controladores estables será más *frágil* aquel para el cual se obtenga el menor d .

Sin embargo, no es claro el significado de *fragilidad* para un valor d en un contexto absoluto.

En cualquier caso, el cálculo para d en (47) implica conocer las coordenadas del punto (k_p^*, k_I^*) . Dichas coordenadas representan un valor en la frontera de \mathcal{S} , que conecta con el punto de análisis (k_p, k_I) a través de una línea recta y por tanto, en teoría habrá una solución para (k_p^*, k_I^*) en cada dirección posible de proyección para el vector $(k_p^* - k_p, k_I^* - k_I)$ en el plano. En (Méndez et al., 2008) (Moraescu et al., 2010) por ejemplo, los resultados presentados se realizan a partir de una proyección sobre la vertical. Una solución más general implica el mínimo valor para d en un barrido de 360 lo cual no es trivial, al menos analíticamente, si se piensa en que la descripción para la frontera de \mathcal{S} corresponde con funciones definidas por tramos (es decir, con transiciones condicionadas).

Como alternativa, se presenta en el presente apartado una forma de calcular dicho punto límite a partir del enfoque geométrico discutido en la *Sección 4.3.1*. Para ello, considere el problema

de cuantificar la fragilidad del controlador PI calculado en (34).

Dicho controlador representa un punto en el conjunto estabilizante \mathcal{S} en (37) y a su vez, la intersección entre una línea recta y una elipse dadas respectivamente por (44) y (46), con los siguientes parámetros: $\omega_g = 1.49 \text{ rad/s}$ y $\theta_m = 1.18$ (el cálculo para dichos parámetros fue realizado empleando la función *allmargins(.)* de MATLAB).

En términos prácticos, la regla de diseño indica que un buen margen de fase es alrededor de 60 (Ho et al., 1995). Como se observa el margen de fase θ_m obtenido por *Ziegler & Nichols* es muy cercano a la inestabilidad y por tanto sugiere *fragilidad*.

Para determinar los valores límite (k_P^*, k_I^*) , se mantiene constante la pendiente de la recta (44) a la misma frecuencia $\omega = \omega_g = 1.49 \text{ rad/s}$ y se incrementa la amplitud de la elipse (46) a partir del parámetro $|C(j\omega_g)|$ (ver Fig.22(a)).

Ante estas condiciones, el margen de ganancia A_m del sistema puede determinarse mediante el cociente entre las distancias euclídeas correspondientes a los puntos (k_P, k_I) y (k_P^*, k_I^*) ; es decir

(Díaz and Bhattacharyya, 2016):

$$\begin{aligned}
 A_m &= \frac{\sqrt{(k_P^*)^2 + (k_I^*)^2}}{\sqrt{(k_P)^2 + (k_I)^2}} \\
 &= \frac{\sqrt{(k_P^*)^2 + (-\omega k_P^* \tan(\angle C(j\omega)))^2}}{\sqrt{(k_P)^2 + (-\omega k_P \tan(\angle C(j\omega)))^2}} \\
 &= \frac{k_P^* \sqrt{1 + (-\omega \tan(\angle C(j\omega)))^2}}{k_P \sqrt{1 + (-\omega \tan(\angle C(j\omega)))^2}} \\
 &= \frac{k_P^*}{k_P} \\
 &= \frac{k_I^*}{k_I}.
 \end{aligned} \tag{48}$$

De este resultado se observa que si (k_P, k_I) se encuentra en la frontera de \mathcal{S} entonces $A_m = 1$; si (k_P, k_I) se encuentra fuera de \mathcal{S} entonces $A_m < 1$ y si (k_P, k_I) se encuentra dentro de \mathcal{S} entonces $A_m > 1$, lo cual coincide con el comportamiento esperado según la teoría para dicho margen en términos de la estabilidad del sistema.

De esta manera, igualando (44) para k_I con la condición de frontera dada por (36), se obtie-

ne:

$$\begin{aligned}
 -\omega_g k_P^* \tan(\angle C(j\omega_g)) &= \frac{-(k_P^*)^2 + 30k_P^*}{36} \\
 (k_P^*)^2 - 30k_P^* - 36\omega_g k_P^* \tan(\angle C(j\omega_g)) &= 0 \\
 (k_P^*)^2 - 30k_P^* - 53.64k_P^* \tan(-0.2789) &= 0 \\
 (k_P^*)^2 - 30k_P^* + 15.36k_P^* &= 0 \\
 k_P^* (k_P^* - 14.64) &= 0,
 \end{aligned} \tag{49}$$

tras reemplazar los valores conocidos para ω_g , k_P y k_I . A partir de ello, $k_P^* = 14.64$ corresponde con la solución válida en el conjunto estabilizante \mathcal{S} mostrado previamente en la Fig.20. Dicho valor evaluado en:

$$\begin{aligned}
 k_I^* &= -\omega_g k_P^* \tan(\angle C(j\omega_g)) \\
 &= 6.24,
 \end{aligned} \tag{50}$$

permite obtener como coordenada de frontera: $(k_P^*, k_I^*) = (14.64, 6.24)$ y por ende, un margen de ganancia:

$$\begin{aligned}
 A_m &= \frac{14.64}{13.50} \\
 &= \frac{6.24}{5.76} \\
 &= 1.08,
 \end{aligned}$$

para el controlador (34), que a su vez representa una distancia (ver Fig.23):

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(14.64 - 13.50)^2 + (6.24 - 5.76)^2} \\ &= 1.2369. \end{aligned}$$

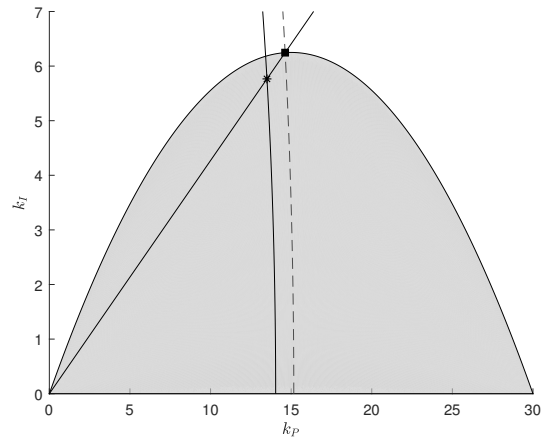
Como se observa, el valor de d por sí solo no es tan diciente como los márgenes de estabilidad A_m y θ_m obtenidos, ambos de valor muy pequeño.

Una formulación similar podría haberse realizado calculando a partir de (34) el valor de A_m y ω_θ , y con base en ello determinar los valores límite (k_p^*, k_I^*) tras mantener constante la amplitud de la elipse modificando la pendiente de la recta hasta alcanzar la frontera del conjunto estabilizante \mathcal{S} , y a través de ello el margen de fase θ_m para el sistema (ver Fig.22(b)).

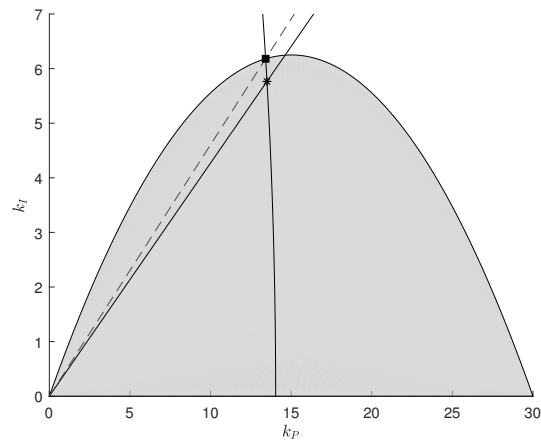
Finalmente, se debe mencionar que la interfaz desarrollada en la *Sección 2.3* fue complementada incorporando el cálculo gráfico para controladores PI, junto con una determinación para sus márgenes de estabilidad y para la distancia d , como medida de su *fragilidad*.

5. Recomendaciones

Al momento de ejecutar la interfaz desarrollada es importante que el usuario tenga una noción respecto al rango de valores que desea visualizar, pues esto hace más fino el detalle de los puntos sobre los cuales se calcula el conjunto estabilizante y por ende, la exploración de los valores

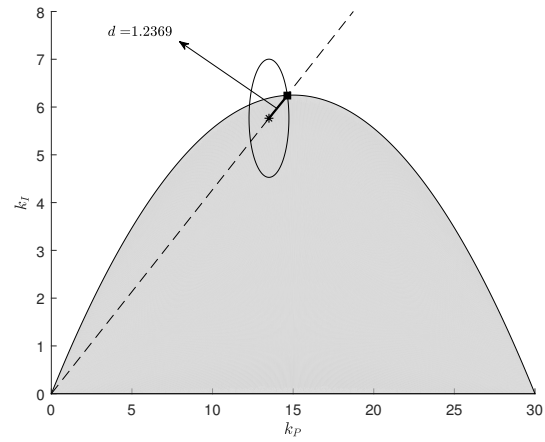


(a)

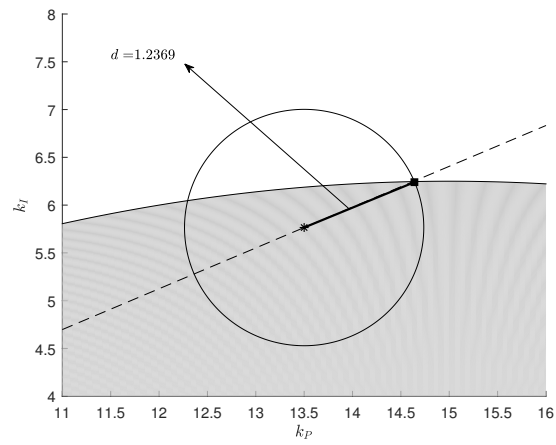


(b)

Figura 22. Representación geométrica en el plano (k_P, k_I) para márgenes de estabilidad: (a) A_m manteniendo fija la recta y variando la elipse; (b) θ_m manteniendo fija la elipse y variando la recta



(a)



(b)

Figura 23. Distancia a la inestabilidad ilustrando: (a) panorámica general de la métrica y (b) detalle de la métrica

admisibles para el control en la práctica.

6. Trabajo futuro

Actividades complementarias a los desarrollos presentados, incluyen el cálculo automático para conjuntos estabilizantes en plantas arbitrarias empleando el *método de la signatura* desarrollado por Keel y Bhattacharyya en (Keel and Bhattacharyya, 2008).

Asimismo es importante explorar otras topologías de compensador y controladores PID, en sus versiones de tiempo continuo y discreto.

7. Conclusiones

A partir de los desarrollos presentados y los resultados obtenidos en el presente trabajo de grado, es posible enunciar la siguiente conclusión general:

Se analizaron las condiciones de estabilidad del conjunto de parámetros PI calculados empleando el método de diseño de controladores de *Ziegler & Nichols*. Fue posible definir una métrica para la inestabilidad del sistema controlado en el plano de parámetros (k_P, k_I) , a partir de una interpretación geométrica de los márgenes de estabilidad del sistema. A partir de lo anterior fue posible valorar la *fragilidad* del controlador PI diseñado.

De manera más puntual:

Se interpretaron las tablas de diseño de parámetros PI de *Ziegler & Nichols* en términos de conjuntos estabilizantes. Tal y como fue abordado en la *Sección 4.2*, se ilustró el diseño de un compensador PI para una planta y posteriormente se analizó la posición de dicho punto en el plano (k_P, k_I) de controladores factibles con base en su conjunto estabilizante. A partir de ello, es claro que el método de *Ziegler & Nichols* siempre dará como resultado un controlador estable, tomando en cuenta su carácter empírico. Sin embargo, a partir de la definición de una métrica en la *Sección 4.3.2*, fue posible mostrar a través de una cuantificación para su *fragilidad* que no necesariamente el controlador calculado es estable ante ligeras variaciones en sus valores de parámetro. De otro lado, la definición de conjunto estabilizante fue ampliamente abordada en la *Sección 2.2* y posteriormente aplicada al caso PI en la *Sección 4.2*.

Se desarrolló un algoritmo que permitió verificar las condiciones de estabilidad para controladores PI diseñados mediante el método de *Ziegler & Nichols*. Inicialmente, se realizó una discusión general de conjuntos estabilizantes en la *Sección 2.2*, posteriormente complementada en la *Sección 4.2.2* con medidas de inestabilidad a través de una métrica basada en la interpretación geométrica para márgenes de estabilidad en un lazo de control sometido a control PI. El método (o algoritmo) consistió fundamentalmente en calcular el conjunto estabilizante en el plano de parámetros del controlador, para posteriormente transformar las especificaciones de controladores viables a cantidades igualmente viables en el dominio del tiempo. Posteriormente un usuario podría seleccionar el controlador deseado a partir de un

punto en el conjunto de parámetros admisible, para el cual se provee además indicación de sus márgenes de estabilidad como medida de *fragilidad*. El procedimiento anterior se desarrolló para los casos de un compensador de 3 parámetros (uno de ellos conocido) y un controlador PI.

Se implementó una interfaz para cálculo de controladores PI a partir de selección de parámetros en el dominio del tiempo, admisibles respecto al conjunto estabilizante correspondiente. El algoritmo descrito en el ítem anterior fue codificado en una interfaz en MATLAB según se describe en la *Sección 2.3*, empleando una metodología de diseño del tipo *top-down*.

Referencias Bibliográficas

- Alfaro, V. M. (2002). Métodos de sintonización de controladores PID que operan como reguladores. *Ingeniería*, 12(1,2):21–36.
- Alzate, R. and Oliveira, V. A. (2016). Multiobjective design of PI controllers with applications. *Control Applications (CCA), IEEE Conference on*, pages 203–214.
- Astrom, K. and Hagglund, T. (1995). *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*. ISA: The Instrumentation, Systems, and Automation Society.
- Chapra, S. C. and Canale, R. P. (2007). *Métodos Numéricos para Ingenieros*. Mc-Graw Hill.
- Correa, R., Villamizar, R., and Quiroz, J. (2008). *De La Sintonización De Controladores*. División de Publicaciones UIS.
- Data, A. and Bhattacharyya, S. P. (2000). *Structure and synthesis of PID controllers*. Springer.
- Díaz, I. (2017). *Modern design of classical controllers*. PhD thesis, Texas A&M University, USA.
- Díaz, I. and Bhattacharyya, S. P. (2016). PI controller design in the achievable gain-phase margin plane. In *Decision and Control (CDC), 2016 IEEE 55th Conference on*, pages 4919–4924.
- Elizondo, C., López, M., and Posadas, C. (2013). Conjunto de controladores PID para sistemas LTI con incertidumbre paramétrica. In *Congreso Nacional de Control Automático AMCA, 2013 México*, pages 797–801.

- Farkh, R., Laabidi, K., and Ksouri, M. (2014). Stabilizing sets of PI/PID controllers for unstable second order delay system. *International Journal of Automation and Computing*, 11(9):210–222.
- Fernandez da Silva, A. (2008). Obtenção de conjuntos estabilizantes de controladores PID para sistemas com atraso utilizando o teorema de Hermite-Biehler. Tesis de maestría (magister en ingeniería eléctrica), Universidad de São Paulo, Brasil.
- Fung, H. W., Wang, Q. G., and Lee, T. H. (1998). PI tuning in terms of gain and phase margin. *Automática*, 34(9):1145–1149.
- Grossman, S. I. (1993). *Algebra Lineal con aplicaciones*. McGraw-Hill.
- Gupte, S., Mohandas, P., and Conrad, J. M. (2012). A survey of quadrotor unmanned aerial vehicles. In *Southeastcon, 2012 Proceedings of IEEE*, pages 1–6.
- Ho, M., Datta, A., and Bhattacharyya, S. P. (1999). Generalizations of the Hermite-Biehler theorem. *Linear Algebra and its Applications*, 302-303:135–153.
- Ho, W., Hang, C., and Cao, L. (1995). Tuning of PI controller based on gain and phase margin specifications. *Automatica*, 31(3):497–502.
- Keel, L. H. and Bhattacharyya, S. P. (1994). Robust control: The parametric approach. *IFAC Proceedings Volumes*, 27:49–52.

- Keel, L. H. and Bhattacharyya, S. P. (1997). Robust, fragile or optimal? *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(8):1098–1105.
- Keel, L. H. and Bhattacharyya, S. P. (2008). Controller synthesis free of analytical models: Three term controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(6):1353–136.
- Loera, R., Melchor, R., and Morales, D. (2014). Análisis de estabilidad de controladores PI para un regulador conmutado boost. In *Congreso Latinoamericano de Control Automático CLCA, 2014 México*, pages 1465–1470.
- Luukkonen, T. (2011). Modelling and control of quadcopter. Independent research project in applied mathematics, Aalto University, Finland.
- Méndez, C., Niculescu, S., Morarescu, C., and Gu, K. (2008). On the fragility of PI controllers for time-delay SISO systems. In *Mediterranean Conference on control and automation*, pages 529–534.
- Morarescu, I. C., Niculescu, S. I., and Gu, K. (2010). The geometry of stability crossing curves of PI controllers for SISO systems I/O delays. *Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 55(4):297–313.
- Ogata, K. (2010). *Ingeniería de control Moderna*. Pearson Education.
- Oliveira, V., Teixeira, M., and Cossi, L. (2003). Stabilizing a class of time delay systems using the Hermite-Biehler theorem. *Linear Algebra and its Applications*, 369:203–216.

- Roa Cano, Gustavo y Ayala Ortiz, A. S. (2016). Control en espacio de estados para un dron tipo cuadrotor. Trabajo de grado (ingeniero electrónico), Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga - Colombia.
- Safonov, M. G. and Tsao, T.-C. (1997). The unfalsified control concept and learning. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(6):843–847.
- Sears, F. W., Ford, A. L., and Freedman, R. A. (2005). *Física universitaria: con física moderna*, volume 2. Pearson Educación.
- Silva, G., Datta, A., and Bhattacharyya, S. P. (2002). New results on the synthesis of PID controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(2):241–252.
- Spong, M. W. and Vidyasagar, M. (2008). *Robot dynamics and control*. John Wiley & Sons.
- Tayebi, A. and Mcgilvray, S. (2006). Attitude stabilization of a vtol quadrotor aircraft. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 14(3):562–571.
- Toscano, R. (2005). A simple robust PI/PID controller design via numerical optimization approach. *Journal of process control*, 15:81–88.
- Vianna Raffo, G. (2007). Modelado y control de un helicóptero quadrotor. Tesis de maestría (magister en automática, robótica y telemática), Universidad de Sevilla, España.
- Ziegler, J. G. and Nichols, N. B. (1942). Optimum settings for automatic controllers. *Transactions of the ASME*, 64:759–768.

Apéndices

Apéndice A. Fundamentos de sólidos rígidos

Un sólido rígido, es un cuerpo formado por varias partículas puntuales que guardan distancias constantes entre sí (Sears et al., 2005).

Una operación fundamental para definir cantidades en el espacio de movimiento de un sólido rígido es el producto vectorial (también denominado producto cruz (Grossman, 1993)), el cual produce un vector perpendicular (normal) al plano formado por otros dos vectores que se multiplican.

Sean dos vectores \vec{a} y \vec{b} definidos en \mathbb{R}^3 . El producto vectorial entre \vec{a} y \vec{b} (denotado $\vec{a} \times \vec{b}$) es otro vector (digamos $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$) cuyo cálculo puede ser efectuado a través de determinantes como sigue:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_j & a_k \\ b_j & b_k \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_i & a_k \\ b_i & b_k \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} k \quad (51)$$

De esta manera, siendo $\vec{a} = (1, -1, 2)$ y $\vec{b} = (3, -4, 5)$ se obtiene:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} k = 3i - j - k \quad (52)$$

La Fig. 24 ilustra esta operación gráficamente en el espacio tridimensional.

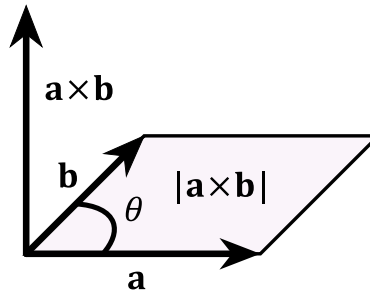


Figura 24. Ilustración gráfica para producto vectorial

Condición de rigidez

Considere el sólido rígido presentado en la Fig. 25. Para cada pareja de puntos (P_i, P_j) pertenecientes al sólido, se cumple:

$$\frac{d}{dt}[|r_i - r_j|] = \frac{d}{dt}[|r_{ij}|] = 0, \quad (53)$$

lo cual significa que la distancia entre puntos de un sólido rígido se mantiene invariante. Esto último se conoce como la *condición de rigidez*.

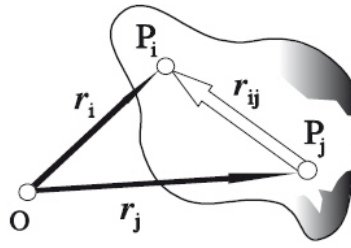


Figura 25. Sólido rígido

Asimismo, a partir de (53) se obtiene:

$$\frac{d}{dt}[|r_i - r_j|] = |\dot{r}_i - \dot{r}_j| = 0, \quad (54)$$

y por tanto, sabiendo que \vec{r} es el vector velocidad \vec{v} para un punto del sólido visto desde el observador, es posible escribir:

$$|v_i| = |v_j|, \quad (55)$$

con lo cual la velocidad de traslación para cualquier punto del sólido será la misma, y así, una vez definido el movimiento de un punto cualquiera del cuerpo rígido que se traslada en el espacio, es posible definir la totalidad de su movimiento.

Movimiento de rotación

En la Fig. 26 se ilustra un punto que rota alrededor de un eje fijo, localizado en el cuerpo del sólido.

A partir de ello, es posible definir la velocidad angular que experimenta el punto P alrededor

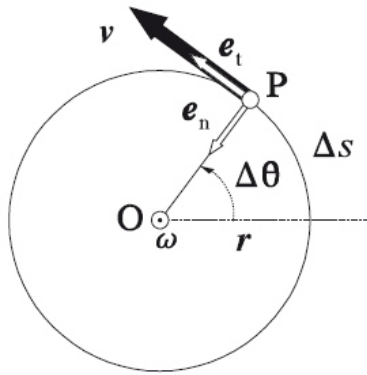


Figura 26. Rotación de un punto del sólido alrededor de un eje fijo

del eje de rotación, en el modo siguiente:

$$\omega = \frac{d}{dt} \theta \quad (56)$$

También, puede escribirse del diagrama la velocidad tangencial v del punto mediante:

$$\vec{v} = \vec{r} \times \vec{\omega}, \quad (57)$$

siendo \vec{r} el vector que marca la distancia del punto P al eje de rotación O .

Por tanto, el vector de aceleración puede ser formulado como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{v} &= \frac{d}{dt} [\vec{r} \times \vec{\omega}] \\ &= \left(\frac{d}{dt} \vec{r} \times \vec{\omega} \right) + \left(\vec{r} \times \frac{d}{dt} \vec{\omega} \right) \\ \vec{a} &= \vec{r} \times \vec{\alpha}, \end{aligned} \quad (58)$$

con \vec{a} y $\vec{\alpha}$ representando, respectivamente, los vectores de aceleración lineal y angular. Note que se asume $\frac{d}{dt}\vec{r} = 0$ debido a que el eje de rotación es fijo.

Conservación del momento angular

En un movimiento traslacional, el principio de conservación del momento lineal establece:

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}m\vec{v} = 0, \quad (59)$$

a partir de lo cual el momento \vec{p} será constante en ausencia de fuerzas externas.

De manera similar, es posible definir el momento angular \vec{L} de una partícula de masa puntual que rota alrededor de un eje fijo, en el modo siguiente:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad (60)$$

siendo \vec{r} el vector de distancia a la masa desde el centro de rotación.

Por tanto, el principio de conservación del momento angular puede establecerse como sigue:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{L}} &= \frac{d}{dt} [\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}] \\
 &= \frac{d}{dt} [\vec{\mathbf{r}} \times m\vec{\mathbf{v}}] \\
 &= m \frac{d}{dt} [\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}] \\
 &= m \left([\vec{\mathbf{r}} \times \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{v}}] + [\frac{d}{dt} \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}] \right) \\
 &= m ([\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{a}}] + [\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{v}}]) \\
 &= \vec{\mathbf{r}} \times m\vec{\mathbf{a}} \\
 &= \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} \\
 &= \boldsymbol{\tau},
 \end{aligned}$$

siendo $\boldsymbol{\tau}$ el torque neto aplicado.

Empleando (58) puede relacionarse este torque con la aceleración angular $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$, a partir de:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\tau} &= \vec{\mathbf{r}} \times m\vec{\mathbf{a}} \\
 &= \vec{\mathbf{r}} \times m(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\boldsymbol{\alpha}}) \\
 &= m(\vec{\mathbf{r}} \times (\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\boldsymbol{\alpha}}))
 \end{aligned}$$

donde, si $\vec{\mathbf{r}}$ es perpendicular a $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$, entonces el producto vectorial se reduce al producto de las mag-

nitudes:

$$\begin{aligned}\tau &= mr^2\alpha \\ &= I\alpha,\end{aligned}\tag{61}$$

siendo I el momento de inercia de las partes rotativas del cuerpo rígido.

La expresión (61) es la segunda ley de Newton de rotación, y podrá ser definida siempre que sea válido un I constante. Dicha situación no siempre es posible, principalmente si se asume que el eje de rotación puede variar en el tiempo. En tal caso, \vec{r} en la Fig. 26 no es constante y por tanto no es válida la solución propuesta para \vec{a} en (58), resultando en la siguiente definición alternativa para τ :

$$\begin{aligned}\tau &= \vec{r} \times m\vec{a} \\ &= \vec{r} \times m \left(\left(\frac{d}{dt} \vec{r} \times \vec{\omega} \right) + \left(\vec{r} \times \frac{d}{dt} \vec{\omega} \right) \right) \\ &= m \left(\left[\vec{r} \times \left(\frac{d}{dt} \vec{r} \times \vec{\omega} \right) \right] + [\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\alpha})] \right) \\ &= m \left(\left[\vec{r} \times \left(\frac{d}{dt} \vec{r} \times \vec{\omega} \right) \right] \right) + I\alpha.\end{aligned}$$

El término

$$m \left(\left[\vec{r} \times \left(\frac{d}{dt} \vec{r} \times \vec{\omega} \right) \right] \right),$$

representa los efectos (torques) debidos a las variaciones del eje de rotación, que evidentemente

también representan variaciones del vector de momento angular \vec{L} . Dichos efectos se denominan *fuerzas inerciales*, puesto que tienen sentido en un marco de referencia de un cuerpo en rotación. Los tipos más representativos de fuerza inercial son los efectos giroscópicos y la fuerza de Coriolis (Sears et al., 2005).

Apéndice B. Función *ode45* de MATLAB

La función *ode45* está basada en un algoritmo de tipo Runge-Kutta, que se desarrolló a partir del método de Euler mejorado (Chapra and Canale, 2007). La función recibe tres parámetros esenciales: $f(t)$ dentro de un *script* en el que se define la ecuación diferencial acompañado por un símbolo @, el vector de límites de tiempo $[t_0 \quad t_f]$ y el vector de condiciones iniciales y_0 . En otras palabras el prototipo básico para usar *ode45* es el siguiente:

$$[t, y] = \text{ode45}(@f(t), [t_0 \quad t_f], y_0); \quad (62)$$

En este caso la solución numérica se almacenará en el vector y para cada uno de los instantes de tiempo presentes en el vector t .

La función *ode45*, resuelve ecuaciones del tipo $\dot{y} = f(t, y)$, por tanto si se desea resolver ecuaciones de orden superior estas deben escribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

A manera de ejemplo, se ilustrará la forma de resolver la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{x} - \mu (1 - x^2) \dot{x} + x = 0, \quad (63)$$

donde $\mu > 0$ es un parámetro escalar.

Por tanto, definiendo

$$y_1 = x; \quad y_2 = \dot{x}$$

la expresión (63) puede ser reescrita como

$$\dot{y}_2 = \mu (1 - y_1^2) y_2 + y_1$$

es decir, transformando la ecuación diferencial original de segundo orden y una variable, en una ecuación diferencial equivalente de primer orden y dos variables. Así entonces, es posible construir el vector

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

cuya dinámica viene representada por

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} f_1(t, y) \\ f_2(t, y) \end{bmatrix}$$

siendo

$$f_1(t, y) = y_2; \quad f_2(t, y) = \mu (1 - y_1^2) y_2 + y_1$$

De esta manera, evaluar la expresión (62) permite obtener una matriz de salida y con filas representando los vectores solución para y_1 e y_2 como función de t .

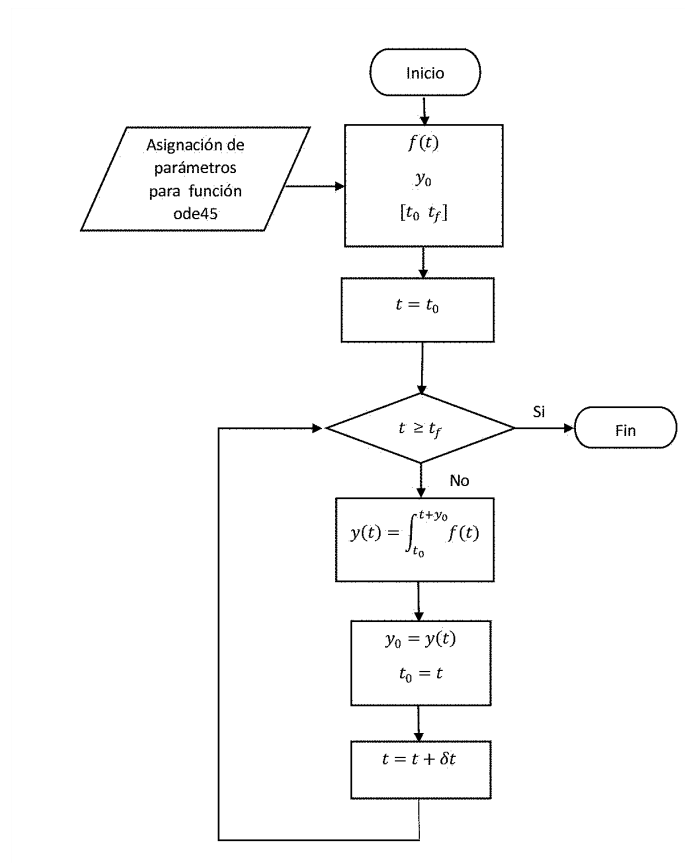


Figura 27. Diagrama de flujo para algoritmo de integración numérica de la función *ode45* de MATLAB

En la Fig. 27 se ilustra el diagrama de flujo del algoritmo empleado para hallar la solución de una ecuación diferencial mediante integración numérica empleando la función *ode45* de MATLAB.

Inicialmente, se deben asignar los parámetros definidos en la ecuación (62).

Posteriormente, un bucle interno hace llamado iterativo a la función $f(t)$ evaluada para valores de tiempo entre t_0 y t_f a partir de las condiciones iniciales y_0 . Para cada ciclo la condición inicial se recalcula siendo la condición final del ciclo anterior. El tiempo se incrementa en un tamaño de paso δt de forma adaptativa, si no se especifica lo contrario. Tras alcanzarse el tiempo final t_f , el bucle interno termina y entrega como resultado el vector de puntos de la trayectoria solución $y(t)$ al igual que el vector de tiempos t .

Apéndice C. Interfaz de animación de la dinámica del sistema

En ausencia de un prototipo real para verificar el comportamiento dinámico del sistema controlado, se optó por construir una animación que permitiera recrear el movimiento del *dron* de una manera cercana al comportamiento físico real. A continuación se presentan las etapas importantes para este desarrollo.

Descripción general de requerimientos

Se requiere construir una interfaz de software que permita visualizar el comportamiento del dron en el espacio de movimiento, como aproximación a la operación real del sistema para diferentes condiciones de simulación (lazo abierto, lazo cerrado controlado PID y por realimentación de estados) ante la presencia de perturbaciones. La interfaz deberá permitir modificar parámetros del sistema y los parámetros de simulación, así como también entregar información de las trayectorias de variables con respecto al tiempo.

Nivel superior de detalle. Posterior a tener una descripción, en palabras, acerca de los requerimientos del sistema (interfaz) a desarrollar, el paso siguiente es crear un diagrama general de entradas y salidas a manera de nivel superior de detalle. Dicho diagrama se presenta en la Fig. 28.

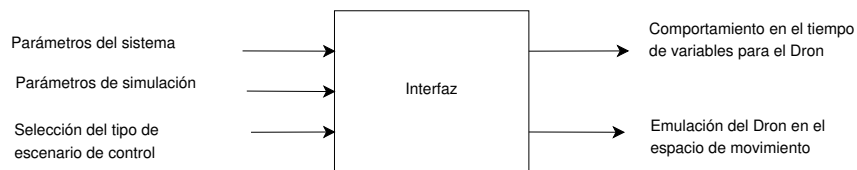


Figura 28. Representación de nivel superior de detalle para desarrollo de interfaz

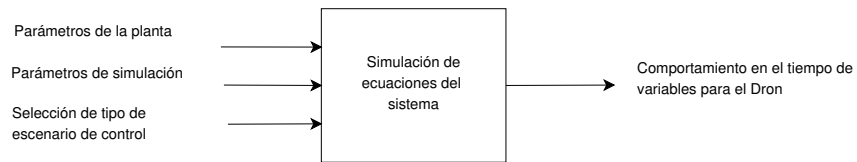


Figura 29. Representación de primer nivel de partición para subproceso de simulación

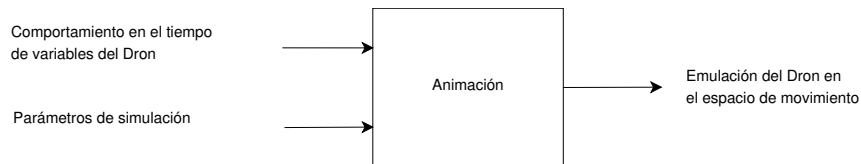


Figura 30. Representación de primer nivel de partición para subproceso de animación

Partición de primer nivel. Una primera partición se logra incorporando el bloque que realiza la solución numérica de las ecuaciones del sistema, a partir de los parámetros de entrada en el modelo y los valores que configuran la simulación, según se muestra en la Fig. 29.

Asimismo, los resultados de este simulador serán la entrada de un nuevo bloque encargado de construir una animación para emular el comportamiento del *dron* en el espacio de movimiento. Una ilustración para este segundo bloque se presenta en la Fig. 30 donde se observa también que será necesario configurar algunas opciones de simulación incorporadas como señal de entrada.

Finalmente, este primer nivel de partición se completa uniendo los dos subprocesos tal y como se ilustra en la Fig. 31.

Partición de segundo nivel. A su vez, es posible abrir el bloque correspondiente a la simulación de las ecuaciones del sistema (según se observa en la Fig. 32) para permitir incorporar la selección del escenario de control que define una configuración importante como lo es la forzante

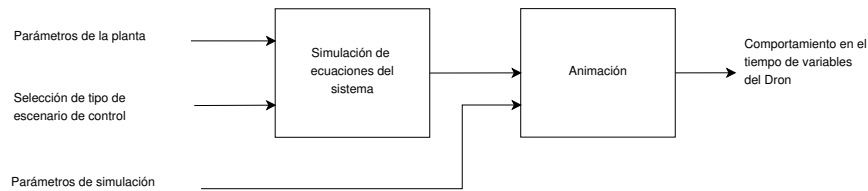


Figura 31. Representación de primer nivel de partición para desarrollo de interfaz

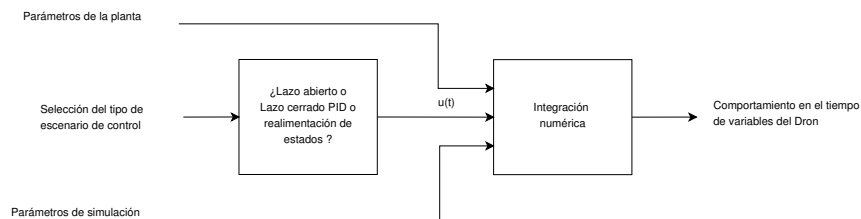


Figura 32. Representación de segundo nivel de partición para subproceso de simulación

de entrada $\Delta\tau(t)$ en el modelo. De manera similar, el bloque que realiza la solución en el tiempo para las ecuaciones del sistema es un integrador numérico.

Por tanto, en la Fig. 33 se muestra el diagrama de bloques resultante para este segundo y definitivo nivel de detalle.

Selección de herramienta para implementación. A partir del diagrama obtenido en la Fig. 33, es claro que el corazón de la interfaz a ser diseñada es el integrador numérico que resuelve las ecuaciones del sistema. Como ya ilustrado en el Anexo 2, este integrador numérico ha sido codificado empleando la función *ode45* de MATLAB. Por tanto, con el objetivo de facilitar la utilización de los desarrollos numéricos a disposición, se presenta a MATLAB como la primera opción para desarrollar la herramienta de software requerida.

Ahora bien, el segundo elemento importante de la interfaz es la animación que permite emu-

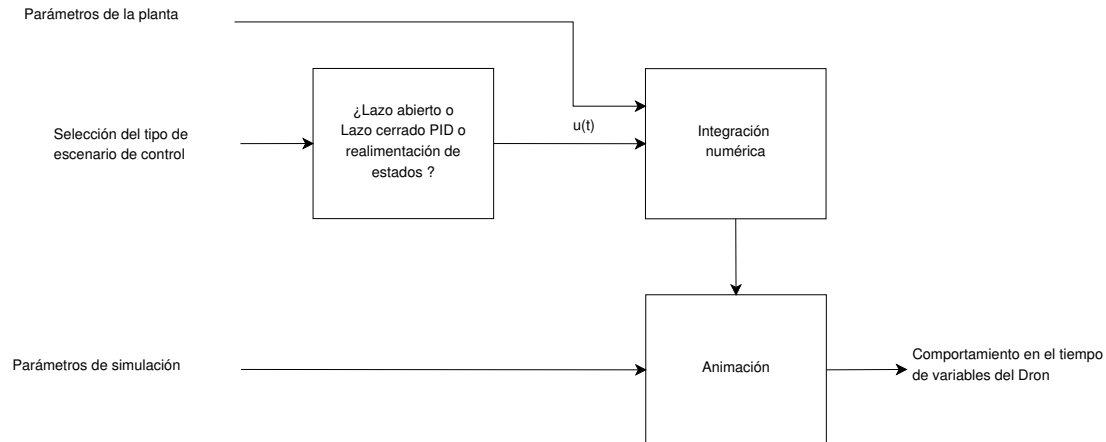


Figura 33. Diagrama de interconexión de subsistemas que conforman la interfaz de animación de la planta

lar el comportamiento del *dron* en el espacio de movimiento. Por tanto, aunque no es restricción que ambas componentes de la interfaz (simulador y bloque de animación) sean desarrollados en el mismo lenguaje de programación, sí se considera conveniente esta opción por motivos ligados principalmente a la reducción en tiempos de desarrollo y a una mayor compatibilidad entre componentes.

Adicional a esto, se recuerda que MATLAB posee además de la consola de comandos y el entorno de programación gráfico SIMULINK, un entorno para el desarrollo de interfaces de usuario denominado GUIDE (Graphical User Interface Development Environment).

Tomando en consideración todo lo anterior, se selecciona MATLAB *vR2014a* para construir la interfaz de usuario que satisface los requerimientos de diseño ilustrados en el diagrama de nivel de partición presentado en la Fig. 33.

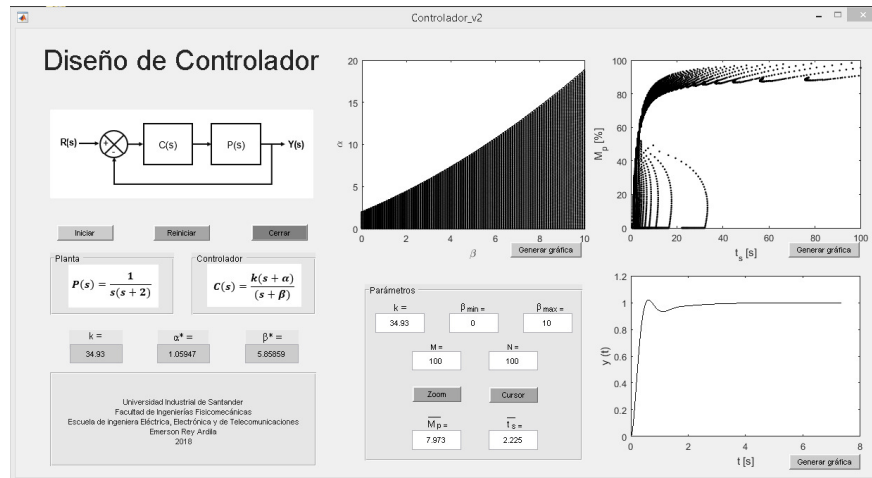


Figura 34. Presentación final para interfaz desarrollada

Descripción de interfaz diseñada. Procediendo con el diseño, se realiza codificación en MATLAB para el diagrama de bloques de la Fig. 33, asumiendo las siguientes variables de entrada:

- Parámetros de la planta: $[g, m, l, k_{\tau}, b, J_G, I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, A_z]$;
- Selección del tipo de escenario de control: [lazo abierto, lazo cerrado, PID, regulado espacio de estados, seguimiento espacio de estados];
- Parámetros de simulación: [tiempo de simulación, tiempo de perturbación, amplitud de perturbación],

y de salida:

- Comportamiento en el tiempo de variables para sistema *dron*: [posición en eje z ; ángulos de balanceo ϕ , cabeceo θ y guiñada ψ ; vector de velocidades de traslación \mathbf{v} ; vector de velocidades angulares $\boldsymbol{\eta}$; vector de forzantes de control $\Delta\boldsymbol{\tau}$].

Asimismo, se requieren los comandos de control de interfaz siguientes:

- Reset: para reiniciar las variables del programa;
- Tipo de visualización: para seleccionar el gráfico de salida a visualizar;
- Simular: para llamar el inicio de una simulación;
- Salida: para terminar el programa.

Todo lo anterior fue adecuado como se presenta en la Fig. 34, ilustrando la presentación final de la interfaz desarrollada.