Fundamentos de la Matemática

Carlos Uzcátegui Aylwin
Escuela de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Industrial de Santander

25 de septiembre de 2019

ÍNDICE GENERAL

1

PRÓLOGO

En estas notas presentamos algunos de los conceptos y herramientas básicas que necesitará un estudiante de matemáticas durante todos sus estudios de pregrado. Creemos que, a pesar de la naturaleza abstracta de las matemáticas y de su parafernalia simbólica, sus ideas fundamentales se pueden presentar de tal manera de convencer al estudiante que la matemática no es sólo una larga cadena de teoremas entrelazados entre sí.

El libro consta de 5 capítulos. En el primero estudiamos los rudimentos de la lógica simbólica. Introduciremos la jerga especial que usamos en matemáticas para expresarnos con precisión: proposiciones lógicamente equivalentes, contrarrecíproca, implicaciones, contradicciones, condicionales, premisas, conclusiones, etc. El capítulo 2 contiene las nociones básicas de la teoría de conjuntos que serán usados en prácticamente todos los estudios de matemáticas. Haremos especial énfasis sobre la analogía entre las propiedades de la lógica y las del álgebra booleana. En el capítulo 3 trataremos la inducción matemática. En este método de demostración se conjugan tres temas fundamentales de la matemáticas: la lógica, los conjuntos y los números. En el capítulo 4 presentamos las nociones básicas sobre las relaciones binarias como preparación para el capítulo que le sigue sobre funciones. Daremos un tratamiento muy elemental e introductorio al tema de las funciones.

Este libro se base en otro que escribí para ser usado en la Universidad de Los Andes (Mérida, Venezuela) [10]. Cuando comencé a trabajar, en el año 2015, en la Universidad Industrial de Santander (Bucaramanga, Colombia) me dí cuenta que a pesar de que los contenidos de aquel libro eran similares al curso dictado en la UIS, resultaría mas útil para los estudiantes y profesores que dictaran el curso, tener a su disposicián un libro texto mas adaptado al programa. Escribir otro libro fue una oportunidad excelente para revisar aquel texto, corregirle algunas deficiencias e incorporarle nuevos ejercicios. La versión que presentamos ha sido usada en la UIS durante varios años y por eso he tenido la suerte de recibir numerosas observaciones y sugerencias. En especial quiero agradecer a los profesores Rafael Isaacs, Javier Camargo y Wilson Olaya por sus comentarios. Finalmente, quiero también agradecer, como siempre lo hago en estas circunstancias, a los estudiantes que detectaron errores y me hicieron preguntas que muchas veces se convirtieron en ejercicios del texto. En varios momentos de su elaboración hemos consultado los libros [1, 4, 7, 8, 13, 15, 11].

Carlos Uzcátegui Aylwin.
Bucaramanga, Marzo de 2019.

CAPÍTULO 2

LÓGICA SIMBÓLICA

La lógica es la disciplina que se ocupa del estudio de los razonamientos, deducciones e inferencias. Por "razonamiento" entendemos un proceso en el cual se concluye una afirmación a partir de un conjunto de afirmaciones. Diremos que el razonamiento es "correcto" si cada vez que las afirmaciones iniciales son verdaderas, también lo es la afirmación inferida. Una parte importante de la lógica está dedicada al estudio de los razonamientos correctos. Los razonamientos en matemáticas deben ser de ese tipo y solamente de ellos hablaremos en este libro.

En este capítulo, lo primero que haremos es precisar qué tipo de afirmaciones podemos usar en los razonamientos y después veremos cuáles son las reglas que permiten inferir una afirmación a partir de otras. Esencialmente nos ocuparemos de la parte de la lógica llamada **lógica proposicional**, que trata de la propiedades formales de las proposiciones y de las reglas de inferencia, todo esto con el fin de facilitar el aprendizaje de métodos para hacer demostraciones que son una herramienta imprescindible para el estudio de las matemáticas. El lector interesado en profundizar el estudio de la lógica puede consultar los libros [12, 14, 15].

2.1. Proposiciones y tablas de verdad

Ya hemos dicho que para entender cuáles razonamientos son correctos debemos en primer lugar determinar el tipo de afirmaciones permitidas en los razonamientos. Ese es el objetivo de esta sección.

Una **proposición** es una afirmación de la que podemos decir, sin ambigüedad, que es verdadera o falsa. Las proposiciones corresponden a las oraciones declarativas del lenguaje español.

Ejemplos 2.1. Las siguientes afirmaciones son proposiciones:

1. Mérida es el nombre de una ciudad andina.

2. $1+1=2$.

3. $1+1=3$.

4. $2^{1245} < 3^{1001}$.

5. El día 15 de julio de 2008 llovió en la ciudad de Mérida (Venezuela).

6. El cuadrado de todo número par también es par.

7. Todo entero par mayor que 4 es la suma de dos números primos.

La oración 5 es una proposición, pues, obviamente, es verdadera o falsa, aunque lo más probable es que ninguno de los lectores pueda decir si es o no verdadera. La oración 6 es una proposición, pues uno acepta, al menos intuitivamente, que lo que dice debe ser verdadero o falso, aunque en este momento no veamos cómo decidir cuál de las dos alternativas se cumple. De hecho, esta proposición es verdadera. Por otra parte, cualquiera que entienda lo que dice la oración 7 debería aceptar que es verdadera o falsa. Sin embargo, hasta hoy no se sabe si es verdadera. Esta proposición se conoce como la conjetura de Goldbach (matemático prusiano que en 1742 propuso este problema).

$\square$

El símbolo $\square$ lo usaremos para indicar que hemos completado el enunciado de una definición, o terminado una demostración o la presentación de un ejemplo.

Ejemplos 2.2. Las siguientes oraciones no son proposiciones:

1. Espérame!

2. ¿Por qué estudias matemáticas?

3. $x+y=x$

4. ¡A estudiar!

5. El es un estudiante.

La oración 3 no es una proposición, pues no hemos especificado el significado de los símbolos x e y y por eso no podemos decir si es verdadera o falsa. Si dijéramos que

$$x+y=x \text{ para algún } x,y\in\mathbb{Z},$$

entonces esa afirmación es una proposición verdadera. Pues vemos que escogiendo apropiadamente los valores de x y y la ecuación es correcta. Por ejemplo, si $x=1$ y $y=0$, se cumple que $x+y=x$. La oración 5 tampoco es una proposición, pues no se sabe a quién se refiere el pronombre “El”. $\square$

2.1.1. Conectivos lógicos

Las proposiciones se pueden combinar para obtener otras proposiciones utilizando los *conectivos lógicos* (también llamados *enlaces*). Los conectivos son los siguientes:

Negación: *"**No** tengo frío"*.
Disyunción: *"El carro es de color rojo **o** blanco"*.
Conjunción: "$5 < 8$ ***y*** $13 < 27$".
Condicional: *"**Si** llueve, **entonces** no voy al cine "*.
Bicondicional: *"Voy al cine **si, y sólo si**, no llueve"*.

Una proposición que no contenga ningún conectivo se dice que es una **proposición simple**, también se les llama **proposiciones atómicas**. Por ejemplo, la afirmación " 3^4 *es menor que* 100" es una proposición simple. Las proposiciones que contengan algún conectivo se llaman **proposiciones compuestas**. Un ejemplo de proposición compuesta es " 3 *es un número impar y* 28 *es par*".

En general, la oración declarativa con que se expresa una proposición puede ser larga y compleja y por esto es conveniente, para simplificar su presentación y manipulación, sustituirla por un letra. Usaremos las letras P, Q, $R \cdots$ para simbolizar proposiciones. De igual manera, los conectivos serán representados en forma simbólica de la siguiente manera:

$\neg$	para la negación
$\vee$	para la disyunción
$\wedge$	para la conjunción
$\rightarrow$	para el condicional
$\leftrightarrow$	para el bicondicional

Al usar los conectivos para combinar proposiciones obtenemos:

$\neg P$	se lee	"no P"
$P \vee Q$	se lee	P ó Q
$P \wedge Q$	se lee	P y Q
$P \rightarrow Q$	se lee	Si P, entonces Q
$P \leftrightarrow Q$	se lee	P si, y sólo si Q

Ejemplo 2.3. Considere las siguiente propocisiones:

$$\begin{aligned} P &= \text{"está lloviendo"} \\ Q &= \text{"el Sol está brillando"} \\ R &= \text{"hay nubes en el cielo"} \end{aligned}$$

Con estas tres proposiciones simples podemos construir varias proposiciones compuestas como se ilustra a continuación.

Está lloviendo y el Sol está brillando	$P \wedge Q$
Si está lloviendo, entonces hay nubes en el cielo	$P \to R$
Si no está lloviendo, entonces el Sol no está brillando y hay nubes en el cielo	$\neg P \to (\neg Q \wedge R)$
El Sol está brillando si, y sólo si, no está lloviendo	$Q \leftrightarrow \neg P$
Si no hay nubes en el cielo, entonces el Sol está brillando	$\neg R \to Q$

□

Ejemplo 2.4. Sean P, Q y R como en el Ejemplo 2.3. Considere las siguientes proposiciones compuestas.

1. $(P \wedge Q) \to R$
2. $\neg P \leftrightarrow (Q \vee R)$
3. $\neg(P \vee Q) \wedge R$
4. $(P \to R) \to Q$
5. $\neg(P \leftrightarrow (Q \vee R))$

La primera de ellas dice “Si está lloviendo y el sol está brillando, entonces hay nubes en el cielo”. La tercera podría traducirse como: “no es el caso que esté lloviendo o el sol esté brillando, pero hay nubes en el cielo”. Se recurrió a la frase “pero...” en lugar de “y...” para indicar que la frase que seguía no estaba afectada por la expresión “no es el caso”. Dejamos a cargo del lector traducir las otras proposiciones a oraciones en español. Tenga presente que al hacerlo puede obtener oraciones que no son de uso frecuente en español.

□

Existen dos tipos de disyunción: La inclusiva y la exclusiva. Un ejemplo de disyunción exclusiva se encuentra en la frase *“O corre o se encarama”*. En cambio la “o” en su sentido inclusivo, la encontramos en la frase *“Los que estén hablando o estén de pie”*. La disyunción inclusiva se usa cuando ambas alternativas son posibles (o permitidas). En cambio, se usa la disyunción exclusiva cuando sólo una de las alternativas es posible. En matemáticas usaremos únicamente la disyunción en su sentido inclusivo. [1]

Las proposiciones que tienen la forma

“Si P, entonces Q”

se llaman **proposiciones condicionales**. P se llama *antecedente* y Q *consecuente*. Usando la notación simbólica, las proposiciones condicionales se denotan por $P \to Q$.

[1]El símbolo $\vee$ para la disyunción viene de la palabra latina *vel* que significa “o” [12].

La **recíproca** de una proposición condicional $P \to Q$ es la proposición

$$Q \to P.$$

La **contrarrecíproca** (también llamada **contrapositiva**) de una proposición condicional $P \to Q$ es la proposición

$$\neg Q \to \neg P$$

Ejemplo 2.5. Considere la proposición

Si está lloviendo, entonces hay nubes en el cielo.

Usando la notación del Ejemplo 2.3 podemos expresar simbólicamente esta proposición por $P \to R$. La recíproca expresada simbólicamente es $R \to P$ y dice

Si hay nubes en el cielo, entonces está lloviendo

En cambio la contrapositiva, que simbólicamente se escribe $\neg R \to \neg P$, dice

Si no hay nubes en el cielo, entonces no está lloviendo.

□

Ejemplo 2.6. En este ejemplo calcularemos la negación de algunas proposiciones. Usaremos las proposiciones presentadas en el Ejemplo 2.3.

1. La negación de

   Está lloviendo y el Sol está brillando

   es

   No está lloviendo o el Sol no está brillando.

   Es decir, la negación de una proposición de la forma $P \wedge Q$ dice lo mismo que la siguiente proposición

   $$\neg P \vee \neg Q.$$

2. La negación de

   Está lloviendo o el Sol está brillando

   es

   No está lloviendo y el Sol no está brillando.

   Pero usualmente decimos: *Ni está lloviendo, ni el sol está brillando.*

   Es decir, la negación de una proposición de la forma $P \vee Q$ dice lo mismo que la proposición siguiente

   $$\neg P \wedge \neg Q.$$

3. La negación de

   Si está lloviendo, entonces hay nubes en el cielo

   es

   Está lloviendo y no hay nubes en el cielo.

   La negación de un proposición condicional $P \to Q$ dice lo mismo que la proposición

$$P \wedge \neg Q.$$

$\square$

Por último, queremos hacer un comentario sobre la expresión

"P si, y sólo si, Q".

Aquí tenemos la conjunción de dos expresiones. La primera es

"P, si Q".

La cual expresa lo mismo que la condicional " si Q, entonces P". La segunda expresión es

"P, sólo si Q".

Esta proposición dice que P ocurre *solamente si* Q ocurre. Por eso decimos que Q es una **condición necesaria** para que P ocurra. En otras palabras, cada vez que P se cumple, necesariamente Q también. Por eso esa expresión equivale a decir que "Si P, entonces Q". Por ejemplo, la proposición " Iré a la playa sólo si Gabriela me acompaña" se interpreta como " Si voy a la playa, entonces Gabriela me acompaña". Pues si realmente fuí a la playa, necesariamente Gabriela me acompañó.

En resumen, el significado de $P \leftrightarrow Q$ es el mismo que la conjunción de $P \to Q$ y $Q \to P$.

Ejercicios 2.1.1

1. ¿Cuáles de las siguientes son proposiciones? En caso que sea una proposición, diga si es verdadera o falsa.
   a) $5 + 2 = 7$.
   b) $2^4 < 3^2$.
   c) El Presidente actuó en contra de la Ley.
   d) Tu voto es tu opinión.
   e) ¿Te duele?
   f) Me duele.
   g) El polo norte es frío y el polo sur es caliente.
   h) Perro que ladra no muerde.
   i) Si llueve el miércoles, no saldremos de paseo.
   j) Si Venezuela gana el campeonato, entonces Colombia pierde.

2. Sean P, Q y R las proposiciones siguientes:

$$\begin{array}{rcl} P & = & \text{“Juan llega demasiado pronto”} \\ Q & = & \text{“María llega demasiado tarde”} \\ R & = & \text{“El jefe se molesta”} \end{array}$$

   Traduzca las siguientes oraciones a notación lógica utilizando las letras P, Q, R y los conectivos lógicos.
   a) Si Juan llega demasiado pronto ó María demasiado tarde, entonces el jefe se molesta.
   b) Si María llega demasiado tarde, entonces Juan no llega demasiado pronto.
   c) O el jefe se molesta ó María no llega demasiado tarde.
   d) María llega demasiado tarde, Juan llega demasiado pronto y el jefe se molesta.
   e) Si el jefe no se molesta, entonces Juan no llega demasiado pronto y María no llega demasiado tarde.
   f) O María no llega demasiado tarde o Juan llega demasiado pronto.
   g) Si María no llega demasiado tarde y Juan no llega demasiado pronto, entonces el jefe no se molesta.

3. Traduzca cada una de las siguientes oraciones a notación lógica de manera análoga a lo hecho en el ejercicio 2 (introduzca las letras que haga falta).
   a) El número de cédula de Genaro es menor que 5 millones o es mayor que seis millones.

  b) Alejandra está comiendo, bebiendo y divirtiéndose.
  c) El gordo Alberto vive para comer y come para vivir.
  d) O yo estoy equivocado, o la pregunta número uno es cierta y la pregunta número dos es falsa.
  e) Si el libro cuesta más de 20.000 pesos, entonces Ramón no podrá comprarlo.
  f) Si el número en la pantalla es menor que cuatro o mayor que diez, entonces no es igual a seis.

4. Niegue las siguientes proposiciones:
  a) Ganaremos el primer partido o el segundo.
  b) $5 \geq 3$.
  c) Las rosas son rojas y las margaritas amarillas.
  d) Alejandra quiere comer fruta pero no helado.
  e) Si $2^{10} < 3^5$, entonces $10^{10} < 15^5$.

5. Proporcione la recíproca y la contrapositiva de cada una de las siguientes proposiciones.
  a) Si soy listo, entonces soy rico.
  b) Si $2 + 2 = 4$, entonces $2 + 4 = 8$.
  c) Si Juan llega demasiado pronto ó María demasiado tarde, entonces el jefe se molesta.

6. Considere la proposición "si a es un número real y $a > 0$, entonces $a^2 > 0$ ".
  a) Proporcione la recíproca y la contrapositiva de esa proposición.
  b) ¿Cuál (o cuáles) de estas proposiciones es verdadera: la proposición original, la recíproca o la contrapositiva?

2.1.2. Tablas de verdad

En la introducción de este capítulo dijimos que para razonar correctamente debemos garantizar que a partir de proposiciones verdaderas se infiera otra proposición verdadera. Por eso es fundamental poder decidir cuando una proposición es verdadera. Dijimos que una proposición es una afirmación que es verdadera o falsa, no puede ser ambigüa. Ahora bien, las proposiciones compuestas pueden ser complejas. Por ejemplo, considere una proposición que tenga la siguiente forma

$$((P \to Q) \ \wedge \ (Q \to R)) \to (P \to R).$$

Aun sabiendo cuales de las proposiciones P, Q y R son verdaderas, no es del todo claro cómo decidir si la proposición de arriba es verdadera o no. Este es el problema que analizaremos en esta sección.

Comenzaremos con un ejemplo relativamente sencillo. Considere las siguientes proposiciones:

$$\begin{aligned} P &= \text{“ } 2^5 < 3^3 \text{ ”} \\ Q &= \text{“ } 3 < 16 \text{ ”} \\ R &= \text{“ } 2^{2999} < 12^{1000} \text{ ”}. \end{aligned}$$

¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas (y en consecuencia, cuáles son falsas)?

$$P \vee Q,\ P \wedge Q,\ P \to Q,\ \neg P,\ R \to Q,\ R \wedge P.$$

Antes de dar respuesta a estas preguntas, debemos saber cuáles de las proposiciones P, Q y R son verdaderas. Un cálculo sencillo nos muestra que P es falsa, pues $2^5 = 32$ y $3^3 = 27$. Q es verdadera. Es claro que R es una proposición, pues, necesariamente, alguna de las siguientes dos alternativas se cumple: (i) $2^{2999} < 12^{1000}$ o (ii) $2^{2999} \not< 12^{1000}$. Dejaremos al lector averiguar cuál de las dos alternativas se cumple.

(i) Podemos concluir que $P \vee Q$ es verdadera, pues al menos Q lo es. Note que también podemos afirmar que $Q \vee R$ es verdadera, aun cuando no sabemos si R es verdadera o no.

(ii) La proposición $P \wedge Q$ es falsa, pues P es falsa. Lo mismo ocurre con $P \wedge R$. ¿Qué podemos decir acerca de $Q \wedge R$? Hasta tanto no resolvamos si R es verdadera o no, no podemos decir nada.

(iii) La proposición $\neg P$ es verdadera, pues P es falsa.

(iv) Un momento de reflexión debería convencer al lector de que una proposición condicional *“Si S, entonces T”*, solamente puede ser falsa cuando S es verdadera y T no lo es. En todos los otros casos, necesariamente, es verdadera (pues no hay otra alternativa). Por eso $Q \to P$ es falsa, pues Q es verdadera y P no lo es. Por la misma razón tenemos que $R \to Q$ es verdadera, independientemente de si R es o no verdadera.

Los **valores de verdad** son las dos alternativas que tenemos para una proposición: ser verdadera o ser falsa. Serán denotados respectivamente con las letras V y F. Si una proposición es verdadera diremos que su valor de verdad es V, y si es falsa, diremos que es F.

Ahora veremos algo fundamental para todo lo que sigue en este capítulo. Volvamos al ejemplo al comienzo de esta sección. Si en lugar de las proposiciones P y Q usamos las siguientes (P' se lee P *prima*).

$$\begin{aligned} P' &= \text{“ } 2^4 < 3^2 \text{ ”} \\ Q' &= \text{“ } 5 < 10 \text{ ”} \end{aligned}$$

Entonces P y P' son ambas falsas y Q y Q' son ambas verdaderas. Debería ser claro que al igual que antes tenemos que $P' \vee Q'$ es verdadera; $P' \wedge Q'$ es falsa; $\neg P'$ es verdadera y $Q' \to P'$ es falsa. Lo mismo es válido si en lugar de P usamos cualquier otra proposición que sea falsa y en lugar de Q usamos cualquier otra proposición que sea verdadera.

En resumen tenemos que:

> El valor de verdad de una proposición compuesta depende *exclusivamente* de los valores de verdad de las proposiciones atómicas que aparecen en ella.

Por lo dicho arriba, en el estudio de la lógica proposicional no trabajaremos con proposiciones concretas; en su lugar usaremos simplemente letras que llamaremos **variables proposicionales** (a veces también las llaman letras proposicionales). Con estas variables y los conectivos lógicos se construyen las **fórmulas proposicionales** de la misma manera que se construyeron las proposiciones compuestas. Usaremos letras minúsculas p, q, r, etc. para denotar las variables o fórmulas proposicionales y dejaremos las mayúsculas para denotar proposiciones.

Si cada una de las variables que aparecen en una fórmula proposicional se sustituye por una proposición se obtiene una proposición (compuesta). El ejemplo que sigue ilustra lo que acabamos de decir.

Ejemplo 2.7. Considere la fórmula proposicional

$$(p \wedge q) \to r.$$

Sustituiremos p por la proposición " $3^7 < 4^8$ ", q por la proposición " $4^8 < 3^{15}$ y r por la proposición " $3^7 < 3^{15}$. Obtenemos la proposición que dice:

$$\text{“}\textit{Si}\ \ 3^7 < 4^8\ \ \textit{y}\ \ 4^8 < 3^{15},\ \textit{entonces}\ \ 3^7 < 3^{15}\text{”}.$$

Ejemplo 2.8. A continuación presentamos algunos ejemplos de fórmulas proposicionales.

$(p \wedge q) \to r$

$\neg p \leftrightarrow (q \vee r)$

$\neg(p \vee q) \wedge r$

$(p \to r) \to q$

$\neg(p \leftrightarrow (q \vee r))$

$(p \wedge q) \vee \neg(p \to q)$

$((p \to q)\ \wedge\ (q \to r)) \to (p \to r)$

De ahora en adelante, simplemente diremos fórmula en lugar de fórmula proposicional. También es usual denotar las fórmulas con letras del alfabeto griego, α, β, ϕ, ψ, ρ que se leen respectivamente *"alfa"*, *"beta" "fi "*, *"si"* (como en la palabra psicología) y *" ro "*. Usaremos la misma terminología que usamos para las proposiciones. Por ejemplo, si ϕ y ψ son fórmulas, entonces la negación de ϕ es $\neg\phi$, la recíproca de $\phi \to \psi$ es $\psi \to \phi$ y la contrarrecíproca es $\neg\psi \to \neg\phi$.

El comportamiento de los conectivos lógicos en relación con el valor de verdad es muy sencillo de establecer y se hace a través de las *tablas de verdad* que veremos a continuación[2]. Comenzaremos con la tabla de verdad para la negación $\neg$. Es claro que $\neg p$ debe ser verdadera exactamente cuando p no lo es. Por eso la tabla de verdad para la negación es la siguiente:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Una disjunción es verdadera cuando al menos una de las proposiciones es verdadera. La tabla de la disyunción es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Estas tablas se leen horizontalmente. Por ejemplo, la primera línea dice que si p es verdadera y q es verdadera, entonces $p \vee q$ también es verdadera. La tercera línea dice que si p es falsa y q es verdadera, entonces $p \vee q$ es verdadera etc.

Las tablas de verdad para los otros conectivos son:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A cada fórmula le asociamos una *tabla de verdad*. Construiremos la tabla de verdad para la fórmula

$$(p \wedge q) \vee \neg(p \to q).$$

Las primeras columnas de la tabla serán ocupadas por las variables involucradas, en este caso p y q. Observe que tendremos 4 filas que corresponden al número de posibles combinaciones distintas de los valores de verdad de p y q.

[2]Las tablas de verdad en forma tabular aparecen en 1918 con los trabajos de Lukasiewicz, Post y Wittgenstein (ver [5, pag. 87]).

p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$(p \wedge q) \vee \neg(p \rightarrow q)$
F	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	V
V	V	V	V	F	V

Un hecho importante, que se deduce de la tabla de verdad de una fórmula, es el siguiente. La tabla nos indica el valor de verdad que tiene la proposición obtenida cuando cada variable de la fórmula se sustituye por una proposición. Por ejemplo, si en la fórmula $(p \wedge q) \vee \neg(p \rightarrow q)$ sustituimos p por una proposición verdadera y q por una falsa, entonces la proposición obtenida es verdadera (pues su valor viene dado por la tercera fila de la tabla de $(p \wedge q) \vee \neg(p \rightarrow q)$).

Ejemplo 2.9. Hay una manera más simple de presentar las tablas de verdad. En la última fila indicaremos a cuál paso del procedimiento corresponde esa columna.

	p	q	$p \wedge q$	$\vee$	$\neg$	$(p \rightarrow q)$
	F	F	F	F	F	V
	F	V	F	F	F	V
	V	F	F	V	V	F
	V	V	V	V	F	V
paso	1	1	2	4	3	2

Los valores en la columna 4 nos dan la tabla de verdad de la fórmula original.

□

Algunas fórmula tienen la propiedad de recibir sólo el valor V. Es decir, en su tabla de verdad, la última columna sólo contiene V. Un ejemplo es la fórmula $p \vee \neg p$. Este tipo de fórmulas reciben el nombre de **tautologías**. Las tautologías forman una clase muy importante de fórmulas.

Ejemplos 2.10. 1. $p \rightarrow p$ es una tautología.

p	$p \rightarrow p$
V	V
F	V

2. $[p \ \wedge \ (p \rightarrow q)] \rightarrow q$ es una tautología.

p	q	$p \rightarrow q$	$p \ \wedge \ (p \rightarrow q)$	$[p \ \wedge \ (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

□

Un fórmula que reciba F en cada una de las filas de su tabla de verdad se dice que es una **contradicción**. Note que una fórmula es una contradicción si, y sólo si, su negación es una tautología. La contradicción más simple es $p \wedge \neg p$.

Ejercicios 2.1.2

1. Considere las siguientes fórmulas:

$$p \to q, \qquad \neg p \to \neg q, \qquad q \to p, \qquad \neg q \to \neg p,$$

$$p \to (q \wedge r), \quad \neg p \to (q \vee r), \quad (p \vee q) \to \neg r, \quad (p \wedge \neg q) \to r$$

   Para cada una de ellas, responda las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuál es la recíproca?

   b) ¿Cuál es la contrapositiva?

2. Construya la tabla de verdad de cada una de la fórmulas dadas en el Ejemplo 2.8.

3. Considere las fórmulas $p \wedge q \wedge r \wedge s$ y $p \vee \neg q \vee r \vee \neg s$. Sin hacer las tablas de verdad de esas fórmulas, determine cuáles filas obtienen V y cuáles F.

4. Muestre que las siguientes fórmulas son tautologías.

   a) $p \to (p \vee q)$.

   b) $(p \wedge q) \to q$.

   c) $(\,(p \vee q) \wedge \neg p)\, \to q$.

   d) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$.

5. Cada una de las tarjetas indicadas tiene en un lado un número y en el otro una letra.

$$\boxed{\text{E}} \quad \boxed{\text{K}} \quad \boxed{4} \quad \boxed{7}$$

   Alguien afirmó: *Todas las tarjetas que tienen una vocal en una cara tienen un número par en la otra.* ¿Cuál es la menor cantidad de tarjetas que hay que voltear para verificar si tal afirmación es verdadera? ¿Cuáles hay que voltear?

6. Rodolfo y Margarita están hablando. Rodolfo dice: (1) *¿Qué iremos a comer hoy?* Margarita, que parece molesta, le responde: (2) *Si quieres comer, o preparas tu comida o comes lo que sobró de anoche.* Y Rodolfo responde: (3) *Uhm....Como que no tengo hambre.* Observe que (2) y (3) pueden ser ambas verdaderas y de esta manera Rodolfo no contradice lo dicho por Margarita y no tiene que cocinar y ni comer recalentado!

7. José está mirando una fotografía de un hombre. Alguien llega y le pregunta: *¿Quién es la persona que aparece en la foto?* José responde diciendo: *No tengo hermanos ni hermanas. Pero el padre del hombre de la foto es el hijo de mi padre.* ¿Quién es la persona que aparece en la foto? (a) El abuelo de José. (b) El padre de José. (c) José. (d) El hijo de José. (e) Ninguna de las anteriores.

8. En un pueblo sus habitantes siempre dicen la verdad o siempre dicen mentiras. El grupo $\mathbb{V}$ está formado por aquellos que dicen siempre la verdad y el grupo $\mathbb{M}$ por aquellos que siempre dicen mentiras. Tres habitantes P, Q y R del pueblo estaban conversando en la plaza. Una persona que caminaba por la plaza le preguntó a P: ¿Eres del grupo $\mathbb{V}$ o del grupo $\mathbb{M}$? Como no pudo escuchar la respuesta de P, entonces le preguntó a Q: ¿Qué fué lo que dijo P? Y Q respondió: "P dijo que él era del grupo $\mathbb{M}$". En este momento R habló y dijo: "No le creas a Q, él está mintiendo" ¿A qué grupo pertenecen Q y R?

2.1.3. Otras expresiones formales

En Matemáticas, con frecuencia trabajamos con expresiones que no son necesariamente proposiciones, pues contienen variables no especificadas (llamadas *variables libres*). Esto ocurre con expresiones algebraicas como las siguientes

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad x^3 + z^4 \geq y^3 - x.$$

Observe que una vez que las variables se sustituyen por números obtenemos una proposición. Por ejemplo, colocando $x = 3$, $y = 4$ y $z = 5$ obtenemos

$$3^2 + 4^2 = 5^2, \quad 3^3 + 5^4 \geq 4^3 - 3.$$

Ambas, en este caso, son verdaderas. Pero si sustituimos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 1$, entonces obtenemos en la primera $0 = 1$ que es falsa y en la segunda $1 \geq 0$ que es verdadera. Lo que queremos decir es que una expresión como $x^2 + y^2 = z^2$ no es ni verdadera ni falsa hasta tanto no se le den valores a las variables x, y y z. Esto es exactamente lo que ocurre con las fórmulas proposicionales. No son ni verdaderas ni falsas hasta tanto cada variable proposicional se sustituya por una proposición (o lo que es lo mismo, hasta tanto se le asigne a cada variable alguno de los valores V o F).

Por otra parte, aun cuando las fórmulas algebraicas no son proposiciones, podemos manipularlas como si lo fueran. En el ejemplo de arriba, podemos negarlas y obtener

$$x^2 + y^2 \neq z^2, \quad x^3 + z^4 \not\geq y^3 - x.$$

Podemos también formar expresiones más complejas. Por ejemplo

$$\text{Si } x \geq 5 \text{ y } y \leq 8, \text{ entonces } y^2 - x^2 \leq 39.$$

Y así podemos hablar de la recíproca o de la contrarrecíproca de estas expresiones. En este ejemplo tenemos que la recíproca es:

$$\text{Si } y^2 - x^2 \leq 39, \text{ entonces } x \geq 5 \text{ y } y \leq 8;$$

y la contrarrecíproca es:

$$\text{Si } y^2 - x^2 \not\leq 39, \text{ entonces } x \not\geq 5 \text{ o } y \not\leq 8.$$

Ejercicios 2.1.3

1. Proporcione la recíproca y la contrapositiva de cada una de las siguientes expresiones.
   a) Si $x + y = 1$, entonces $x^2 + y^2 \geq 1$,
   b) Si $x^2 = x$, entonces $x = 0$ ó $x = 1$.

2.2. Cálculo proposicional

Recordemos que un razonamiento es un conjunto de proposiciones, llamadas **premisas** o **hipótesis**, y otra llamada **conclusión** o **tesis**. Ahora comenzaremos el estudio de las reglas de inferencia, es decir, los métodos para inferir una conclusión a partir de unas premisas. Por supuesto, la reglas que nos interesan son aquellas que garaticen que la conclusión es verdadera cada vez que todas las premisas sean verdaderas. Es decir, aquellas reglas de inferencia que produzcan razonamiento correctos.

Así como existe una teoría para hacer cálculos con números (la aritmética) ó con objetos más complejos como en el cálculo diferencial e integral, también hay reglas precisas para manejar fórmulas proposicionales. En esta sección introduciremos los rudimentos del cálculo con proposiciones, o, como usualmente se dice, cálculo proposicional.

2.2.1. Implicación lógica

En esta sección analizaremos los razonamientos que tienen como punto de partida una sola premisa. En la sección 2.2.2 veremos el caso general con más de una premisa.

Diremos que una fórmula ϕ **implica lógicamente** a otra fórmula ψ si " ψ es verdadera cada vez que ϕ lo sea". Más precisamente, en las tablas de verdad de ϕ y de ψ, las filas donde ϕ tiene una V, también ψ tiene una V. Note que sólo nos interesa las filas donde ϕ tiene valor V.

Usaremos la siguiente notación para la implicación lógica

$$\phi \Rightarrow \psi.$$

Usaremos $\phi \not\Rightarrow \psi$ para indicar que ϕ no implica lógicamente a ψ.

Otra maneras equivalentes de leer $\phi \Rightarrow \psi$ son las siguientes:

(1) ϕ es una **condición suficiente** para ψ. Pues es suficiente que ϕ sea verdadera (o que lo que ϕ afirma se cumpla) para que ψ también lo sea.

(2) ψ es una **condición necesaria** para ϕ. Pues cada vez que ϕ se cumple (es verdadera), necesariamente ψ también se cumple.

Veamos un ejemplo sencillo.

Si Ud. está inscrito en el registro electoral, entonces es mayor de edad.

En este caso, que alguien esté inscrito en el registro electoral es *suficiente* información para concluir que esa persona es mayor de edad. Por otra parte, ser mayor de edad es una condición *necesaria* para poder inscribirse en el registro electoral.

Observemos que pedir que $\phi \Rightarrow \psi$ es exactamente lo mismo que pedir que $\phi \rightarrow \psi$ es una tautología.

Ejemplo 2.11. La proposición "Los perros ladran y muerden" lógicamente implica cada una de las siguientes proposiciones: "Los perros ladran" y "Los perros muerden". Aquí hemos usado el siguiente hecho

$$(p \wedge q) \Rightarrow q.$$

Esto puede fácilmente verificarse usando tablas de verdad. En efecto, observemos que la única línea de la tabla de verdad de $p \wedge q$ que recibe una V es cuando p y q reciben también V.

Observe también que $p \not\Rightarrow (p \wedge q)$. Pues, por ejemplo, cuando p recibe valor V y q valor F, se tiene que $p \wedge q$ recibe valor F y p valor V.

□

Ejemplo 2.12. La proposición "Los estudiantes son competentes" implica lógicamente la siguiente proposición: "Los estudiantes son competentes o los profesores son injustos". El lector verificará que este argumento ilustra la siguiente afirmación:

$$p \Rightarrow (p \vee q)$$

El lector deberá hacer las tablas de verdad correspondientes y verificar esta última afirmación. Observe que también tenemos que

$$(p \vee q) \not\Rightarrow p$$

□

Ejemplo 2.13. Considere las proposiciones "Juan compró la entrada para el cine", denotémosla con la letra P, y "Juan tiene derecho a entrar al cine", que denotaremos con la letra Q. La proposición $P \rightarrow Q$ dice que "si Juan compró la entrada, entonces tiene derecho a entrar al cine". Si aceptamos las proposiciones P y $P \rightarrow Q$, entonces podemos lógicamente concluir Q, es decir, "Juan tiene derecho a entrar al cine".

El ejemplo anterior es un caso particular de una regla general. Considere las fórmulas $[p \;\wedge\; (p \rightarrow q)]$ y q. Mostraremos que

$$[p \;\wedge\; (p \rightarrow q)] \Rightarrow q$$

A continuación presentamos la tabla de verdad de $p \;\wedge\; (p \rightarrow q)$:

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F

Comparando las columnas 1 y 4 vemos que en efecto $[p \wedge (p \to q)] \Rightarrow q$. El lector puede fácilmente verificar que la fórmula $[p \wedge (p \to q)] \to q$ es una tautología, es decir, la columna final de su tabla de verdad solo contiene el valor V.

Notemos que $q \not\Rightarrow [p \wedge (p \to q)]$. Pues en la fila 3 tenemos que q tiene valor V pero $[p \wedge (p \to q)]$ recibe valor F.

□

Ejemplo 2.14. Considere las proposiciones "Si llueve, entonces voy al cine" y "No voy al cine". Si aceptamos ambas proposiciones, entonces podemos lógicamente concluir la proposición "No llueve". La regla general detrás de este argumento es la siguiente. Considere las fórmulas $(p \to q)$ y $\neg q$. Tenemos que

$$[(p \to q) \wedge \neg q\,] \Rightarrow \neg p$$

□

Ejemplo 2.15. Considere las proposiciones "Voy al cine o a dormir" y "No voy al cine". Si aceptamos ambas proposiciones, entonces podemos lógicamente concluir la proposición "Voy a dormir". La regla general detrás de este argumento es la siguiente. Considere las fórmulas $(p \vee q)$ y $\neg q$. Tenemos que

$$[(p \vee q) \wedge \neg q\,] \Rightarrow p$$

□

Ejemplo 2.16. "Si el lunes voy a clase, no iré al banco" y "Si no voy al banco el lunes, entonces no podré comprar el disco". Si aceptamos ambas proposiciones, entonces podemos lógicamente concluir que "Si el lunes voy a clase, no podré comprar el disco". La regla general detrás de este argumento es la siguiente:

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)\,] \Rightarrow (p \to r)$$

□

Ejemplo 2.17. "Si Rodrigo viene, iré al cine" y "Si Isabel viene, iré al cine". Si aceptamos ambas proposiciones, entonces podemos lógicamente concluir que "Si Rodrigo o Isabel vienen, iré al cine". La regla general detrás de este argumento es la siguiente:

$$[(p \to r) \wedge (q \to r)\,] \Rightarrow (p \vee q) \to r$$

□

Implicaciones lógicas

$p \;\Rightarrow\; (p \vee q)$	adición
$(p \wedge q) \;\Rightarrow\; p$	simplificación
$[\, p \;\wedge\; (p \rightarrow q)\,] \;\Rightarrow\; q$	*Modus Ponens*
$[\, \neg q \;\wedge\; (p \rightarrow q)\,] \;\Rightarrow\; \neg p$	*Modus Tollens*
$[\,(p \vee q) \;\wedge \neg q\,] \;\Rightarrow\; p$	silogismo disyuntivo
$[\,(p \rightarrow q) \;\wedge\; (q \rightarrow r)\,] \;\Rightarrow\; (p \rightarrow r)$	silogismo hipotético
$[\,(p \rightarrow r) \;\wedge\; (q \rightarrow r)\,] \;\Rightarrow\; (p \vee q) \rightarrow r$	prueba por casos

Tabla 2.1:

La Tabla 2.1 resume algunas implicaciones lógicas. Dejamos a cargo del lector hacer las correspondientes tablas de verdad.

En latín, la palabra *Modus* significa “modo” o “procedimiento”, *Ponens* proviene de la palabra “ponere”, que significa “afirmar”, y *Tollens* viene de “tollere”, que significa “negar”. La terminología completa para la regla *Modus Ponens* es *Modus Ponendo Ponens*, que significa un procedimiento que afirma (“ponens”) el consecuente de una condicional afirmando (“ponendo”) el antecedente. De igual forma, *Modus Tollendo Tollens* significa el procedimiento que niega el antecedente de una condicional negando el consecuente.

Ejercicios 2.2.1

1. Demuestre las implicaciones lógicas de la tabla 2.1, es decir, compare las correspondientes tablas de verdad.

2. Determine si las siguientes afirmaciones son válidas:

   a) $(p \to q) \Rightarrow (p \to (p \wedge q))$.

   b) $(p \to q) \wedge (p \to r) \Rightarrow (p \to (q \wedge r))$.

   c) $((p \to q) \wedge q) \Rightarrow p$.

2.2.2. Razonamientos válidos

Ahora ya estamos listos para analizar los razonamientos correctos. Recordemos que por razonamiento se entiende un conjunto de proposiciones, llamadas premisas o hipótesis, y otra llamada conclusión o tesis. Ya hemos analizado en la sección 2.2.1 los razonamientos que tienen una sola premisa, es decir, si tenemos una fórmula ϕ (llamada premisa) y otra fórmula ψ (llamada conclusión), entonces diremos que el razonamiento que a partir de ϕ se infiere ψ es correcto si $\phi \Rightarrow \psi$. ¿Qué podemos decir si en lugar de una premisa tenemos dos, por ejemplo, ϕ y ρ? ¿Cuándo podemos decir que una fórmula ψ se infiere correctamente a partir de ϕ y ρ? Un momento de reflexión debería convencer al lector de que lo que debemos pedir es que $\phi \wedge \rho$ implique lógicamente a ψ. Esa es precisamente la definición que usaremos de razonamiento válido o correcto.

Un **razonamiento** es **válido** cuando la conjunción de las premisas lógicamente implica la conclusión.

Antes de precisar esta noción recordemos el Ejemplo 2.14 donde mostramos que de las premisas:

"Si llueve, entonces voy al cine", "No voy al cine",

se concluye lógicamente la proposición

"No llueve".

En otras palabras, si aceptamos como verdaderas las premisas, necesariamente debemos aceptar como verdadera la conclusión; y es precisamente por eso que nuestro razonamiento es correcto.

Denotaremos un razonamiento que tenga como premisas las fórmulas $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ y como conclusión la fórmula ψ de la siguiente manera:

Premisas:	$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$.
Conclusión:	ψ.

La siguiente notación también es usada en los textos de lógica:

$$\begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \\ \hline \psi \end{array}$$

Un razonamiento con premisas $\phi_1, \cdots, \phi_n$ y conclusión ψ es **válido** si

$$(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_n) \Rightarrow \psi.$$

En decir, si " ψ es una consecuencia lógica de $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n$". En este caso, también se acostumbra decir que "ψ se **deduce** a partir de $\phi_1, \cdots, \phi_n$".

En esta sección veremos un método para verificar que un razonamiento es correcto. Comencemos con un ejemplo.

Ejemplo 2.18. Considere el siguiente conjunto de premisas: "Juan tiene trabajo", "Si Juan tiene trabajo, entonces debe ser licenciado", "Si Juan es licenciado, entonces debió estudiar en la universidad". Como veremos a continuación, de este conjunto de premisas podemos lógicamente concluir que "Juan debió estudiar en la universidad". Usaremos letras para denotar las proposiciones.

(P) Juan tiene trabajo

(Q) Juan es licenciado

(R) Juan estudió en la universidad

En forma simbólica tenemos que las premisas y la conclusión son las siguientes:

Premisas: p, $p \to q$, $q \to r$.
Conclusión: r.

Para justificar que este razonamiento es válido haremos una **deducción** o **derivación**.

		Justificación
(1)	p	Premisa
(2)	$p \to q$	Premisa
(3)	q	De (1) y (2) por Modus Ponens
(4)	$q \to r$	Premisa
(5)	r	De (3) y (4) por Modus Ponens

El argumento anterior es válido pues en cada paso de la derivación hemos incluido una fórmula que es una de las premisas o una fórmula que es lógicamente implicada por algunas de las anteriores. Y la última línea de la deducción contiene precisamente r, que es la conclusión de nuestro argumento.

□

Reglas de inferencia

Adición	$\dfrac{\alpha}{\alpha \vee \beta}$	Simplificación	$\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$
Modus Ponens	$\dfrac{\begin{array}{c}\alpha \\ \alpha \to \beta\end{array}}{\beta}$	*Modus Tollens*	$\dfrac{\begin{array}{c}\neg\beta \\ \alpha \to \beta\end{array}}{\neg\alpha}$
Silogismo Disyuntivo	$\dfrac{\begin{array}{c}\alpha \vee \beta \\ \neg\beta\end{array}}{\alpha}$	Silogismo Hipotético	$\dfrac{\begin{array}{c}\alpha \to \beta \\ \beta \to \gamma\end{array}}{\alpha \to \gamma}$
Prueba por casos	$\dfrac{\begin{array}{c}\alpha \to \beta \\ \gamma \to \delta\end{array}}{(\alpha \vee \gamma) \to (\beta \vee \delta)}$	Conjunción	$\dfrac{\begin{array}{c}\alpha \\ \beta\end{array}}{\alpha \wedge \beta}$

Tabla 2.2:

La regla Modus Ponens puede verse como una derivación que tiene a p y $p \to q$ como premisas y tiene como conclusión a q. De manera similar, la regla Modus Tollens y los silogismos hipotético y disyuntivo son derivaciones con dos premisas. Por otra parte, las reglas de simplificación y de adición son derivaciones que tienen solamente una premisa. Estas derivaciones también suelen llamarse **reglas de inferencia**. En la tabla 2.2 indicamos algunas de las reglas de inferencia válidas más comunes. Como observará el lector, ellas provienen de las implicaciones lógicas que presentamos en la tabla 2.1.

El **silogismo** es un argumento en el que se infiere una conclusión a partir de dos premisas. El silogismo es una de las derivaciones más simples posibles. Lo interesante de las derivaciones es que, aunque cada paso de ellas es muy sencillo y fácil de justificar, el resultado final puede ser una fórmula muy compleja. Veremos en esta sección ejemplos de cómo se pueden usar las derivaciones para justificar la validez de algunos razonamientos.

Hay otro aspecto de la deducciones que queremos resaltar. El lector habrá observado que las deducciones están escritas con fórmulas proposicionales (recuerde nuestra convención de usar las letras mayúsculas para denotar proposiciones y las minúsculas para las variables proposicionales). La razón es que lo que hace válido a un razonamiento no es el contenido específico de las proposiciones involucradas, sino la forma que tiene. Las fórmulas precisamente nos dicen cuál es la forma que tiene una proposición. En el ejemplo anterior (2.18), la validez de ese razonamiento no se altera si en lugar de Juan hablamos de Rubén o si la proposición P es "Rubén tiene gripe", Q es "Ruben es Mesonero" y R "Ruben trabajó en París". Aunque en este caso lo que dice el razonamiento no tenga mucho sentido, es lógicamente correcto. Quizá la siguiente analogía aclare aun más lo que queremos decir. Cuando un ingeniero hace los cálculos para la construcción de una casa, no le interesa el color con el que pintarán las paredes ni el nombre de quienes la habitarán. Eso es irrelevante. Si el ingeniero hace bien su trabajo, la casa no se derrumba, pero si no lo hace bien, entonces se le caerá encima, ya sean blancas o amarillas las paredes o se llame Juan o Rubén la persona que la habite.

Ejemplo 2.19. Si llueve por la noche, entonces la grama del jardín amanece mojada. Veo que está mojada la grama. Por lo tanto llovió anoche. ¿Es válido este razonamiento? No lo es, pues la grama pudo amanecer mojada por otra razón. Veamos cuál es la forma de este razonamiento. Sea P la proposición "llueve por la noche" y Q la proposición "la grama está mojada".

Premisas: $p \to q,\ q.$
Conclusión: p

Así que la forma de este razonamiento es $(p \to q) \wedge q \ \Rightarrow\ p$. Sin embargo, esto no es correcto, pues

$$(p \to q) \wedge q \ \not\Rightarrow\ p$$

Dejamos al lector hacer las correspondientes tablas de verdad y verificar que cuando p es falso y q es verdadero, entonces $(p \to q) \wedge q$ es verdadero pero p es falso.

□

Antes de continuar con otros ejemplos de derivaciones tenemos que hacer unos comentarios sobre el papel que puede desempeñar una tautología en un razonamiento. Recordemos que una tautología es una fórmula cuya tabla de verdad en su última columna sólo tiene valor V. Esto dice que no importa qué valor de verdad se asigne a las variables, siempre obtendremos como resultado final el valor V. La tautología más sencilla es $p \vee \neg p$. En el curso de un razonamiento, uno puede afirmar cualquier tautología como parte del argumento y esto no altera la validez del argumento. Ilustraremos este afirmación con un ejemplo.

Imagínese que Ud. está discutiendo con alguien acerca del futuro de un equipo de fútbol. Suponga que Ud. dice que *"O bien Juan viene o no viene"*. Esta afirmación es una tautología y será aceptada por todos los participantes en la discusión. Por ejemplo, este argumento imaginario podría continuar de la siguiente manera. *Si Juan viene, entonces el equipo tiene más chance de ganar este partido.* Pero *si Juan no viene y no ganamos, entonces el próximo partido lo jugarán con el equipo de Valencia.* Por lo tanto, como *"O bien Juan viene o no viene"*, podemos concluir que *ganamos este partido o el próximo juego será con el Valencia.* En este argumento se usó la tautología $p \vee \neg p$ como una herramienta auxiliar para presentar el argumento de manera más convincente. Esto también se puede hacer en las derivaciones.

En conclusión, en cualquier paso de una derivación se puede incluir una tautología. En el ejemplo que sigue usaremos la tautología: $q \to (q \vee u)$. Dejaremos a cargo del lector convencerse de que esa es, en efecto, una tautología.

Ejemplo 2.20. Si gana Beatriz o Alicia, entonces pierden tanto Luisa como Carmen. Beatriz gana. Por lo tanto, pierde Carmen.

(P) Gana Beatriz
(Q) Gana Alicia
(R) Pierde Luisa
(S) Pierde Carmen

En forma simbólica, el razonamiento que estamos estudiando es

Premisas: $(p \vee q) \to (r \wedge s)$, p.
Conclusión: s.

		Justificación
(1)	p	Premisa
(2)	$p \vee q$	Adición en (1)
(3)	$(p \vee q) \to (r \wedge s)$	Premisa
(4)	$(r \wedge s)$	Modus Ponens con (2) y (3)
(5)	s	Simplificación en (4)

□

Ahora presentamos otro ejemplo un poco mas elaborado.

Ejemplo 2.21. Si compramos una parcela, entonces construimos una casa o esperamos para vender la parcela a un precio mayor. Si construimos una casa o compramos un apartamento, entonces compramos muebles. Si compramos muebles, entonces compramos un televisor. Si nos esperamos para vender la parcela, tendremos dinero suficiente para comprar un apartamento. Por lo tanto, si compramos una parcela, entonces compraremos un televisor. ¿Es este razonamiento válido?

(P) Compramos una parcela
(Q) Construimos una casa
(R) Compramos muebles
(S) Compramos un televisor
(T) Esperamos para vender la parcela más adelante a mejor precio
(U) Compramos un apartamento

En forma simbólica, el razonamiento que estamos estudiando es

Premisas: $p \to (q \vee t),\ (q \vee u) \to r,\ r \to s,\ t \to u.$
Conclusión: $p \to s.$

Observemos que bastaría mostrar que a partir de las premisas podemos deducir la siguiente fórmula:

$$(q \vee t) \to (q \vee u)$$

pues de esa forma obtendríamos la cadena:

$$p \to (q \vee t)\ ,\ (q \vee t) \to (q \vee u)\ ,\ (q \vee u) \to r\ ,\ r \to s.$$

y a partir de estas podemos obtener $p \to s$ usando repetidamente el silogismo hipotético. Usaremos esta idea para construir la derivación que presentamos a continuación.

		Justificación
(1)	$(q \vee u) \to r$	Premisa
(2)	$r \to s$	Premisa
(3)	$(q \vee u) \to s$	Silogismo hipotético en (1) y (2)
(4)	$q \to (q \vee u)$	Tautología
(5)	$u \to (q \vee u)$	Tautología
(6)	$t \to u$	Premisa
(7)	$t \to (q \vee u)$	Silogismo hipotético en (5) y (6)
(8)	$(q \vee t) \to (q \vee u)$	Prueba por casos en (4) y (7)
(9)	$(q \vee t) \to s$	Silogismo hipotético en (3) y (8)
(10)	$p \to (q \vee t)$	Premisa
(11)	$p \to s$	Silogismo hipotético en (9) y (10)

□

Otra manera de mostrar la validez del razonamiento en el último ejemplo es verificando la siguiente implicación lógica:

$$[\, (p \to (q \vee t)) \;\wedge\; ((q \vee u) \to r) \;\wedge\; (r \to s) \;\wedge\; (t \to u) \,] \;\Rightarrow\; (p \to s)$$

Para hacerlo usando una tabla de verdad tendríamos que hacer una tabla con $2^6 = 64$ filas, pues tenemos 6 variables proposicionales. Ahora debería quedar claro que el método de la derivación es mucho más corto que el de hacer tablas de verdad, pero requiere más ingenio para llevarlo a cabo.

En resumen, una derivación puede verse como una sucesión de fórmulas $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n$ que cumplen con las siguientes condiciones:

(i) ψ_1 es una de las premisas o es una tautología.

(ii) ψ_{k+1} es una premisa, es una tautología o se deduce a partir de $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_k$, es decir,

$$\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_k \Rightarrow \psi_{k+1}$$

Con frecuencia, ψ_{k+1} es la conclusión de una regla de inferencia cuyas premisas se escogen entre las fórmulas $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_k$.

(iii) ψ_n es la conclusión de la derivación.

Observación 2.22. La razón de por qué se puede incluir una tautología en cualquier paso de una derivación es que una tautología es una consecuencia lógica de cualquier fórmula. En efecto, suponga que ϕ es una fórmula cualquiera y ψ es una tautología. Dejaremos al lector la tarea de convencerse que $\phi \to \psi$ es una tautología. El lector interesado también comprobará que al ser $\phi \to \psi$ una tautología, entonces $\phi \Rightarrow \psi$. En palabras, una tautología es una consecuencia lógica de cualquier fórmula.

Ejercicios 2.2.2

1. Represente en forma simbólica los siguientes razonamientos y determine si son válidos. Si lo son, halle una derivación y en caso contrario explique por qué no hallando valores de verdad que hagan verdaderas todas las premisas pero falsa a la conclusión.

   a) Si gana Beatriz o Alicia, entonces pierden tanto Luisa como Carmen. Beatriz gana. Por lo tanto, pierde Juana.

   b) Si Bolívar fué asesinado, entonces Bolívar murió. Como Bolívar murió. Entonces, Bolívar fué asesinado.

   c) Cuando Pedro salió pudo haber ido hacia el norte o hacia el sur. Si Pedro fué al norte, entonces llegó a Trujillo. Cada vez que Pedro va a Trujillo visita a Ramón. Si se fué hacia el sur, entonces pasó por El Vigía. Cuando Pedro pasa por El Vigía continúa el viaje hasta San Cristobal o hasta Cúcuta. Pedro no llegó a San Cristobal y Ramón no vió a Pedro. Por lo tanto, Pedro está en Cúcuta.

   d) Si María termina pronto su trabajo, entonces se irá con Rosa a su casa. María se irá con Rosa a su casa ó se reunirá con Luisa. María terminó pronto su trabajo. Por lo tanto, María no se reunirá con Luisa.

   e) Si María no se equivoca, entonces Jaime está equivocado. Si Jaime está equivocado, entonces Luis también se equivoca. Si Luis está equivocado, entonces esta noche no es el espectáculo. Pero esta noche es el espectáculo o José se quedará trabajando. María no se equivoca. Por lo tanto, José se quedará trabajando.

   f) Si José es primo de Darío, entonces su edad es múltiplo de 3. Si la edad de José es múltiplo de 3, entonces el número 17 es múltiplo de 3. Pero el número 17 no es múltiplo de 3. Si Luis es primo de Darío, entonces vive entre Maracaibo y la Concepción. Si Luis vive en Maracaibo, entonces no vive entre Maracaibo y la Concepción. Luis vive en Maracaibo. Si José es primo de Darío, entonces o Luis o Alberto son primos de Darío. Por lo tanto, Alberto es primo de Darío.

   g) Si el cajero o el contador hubieran apretado el botón de alarma, la bóveda se habría cerrado automáticamente y la policía habría llegado en tres minutos. Si la policía hubiera llegado en tres minutos, habría podido alcanzar el automóvil de los ladrones. Pero no pudo alcanzar el automóvil de los ladrones. Por lo tanto, el cajero no apretó el botón de alarma.

2. Considere las siguientes deducciones que parecen una forma de simplificación. Determine cuál es válida y cuál no lo es. Halle una derivación de la que es válida y explique porqué la otra no lo es.

   a) $\dfrac{(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma}{\alpha \vee \gamma}$

   b) $\dfrac{(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma}{\alpha \wedge \gamma}$

3. Halle una derivación de la conclusión a partir de las premisas dadas.

   a) Premisas: $r \vee s,\ \neg p,\ q \vee \neg r,\ q \to p.$
   Conclusión: $s.$

   b) Premisas: $p \to (r \vee q),\ s \wedge \neg t,\ s \to p,\ q \to t.$
   Conclusión: $r.$

   c) Premisas: $s \wedge r,\ s \to p.$
   Conclusión: $p \vee q.$

   d) Premisas: $p \vee q,\ p \to s,\ q \to r.$
   Conclusión: $s \vee r.$

   e) Premisas: $(p \vee q) \to \neg r,\ s \to r,\ p.$
   Conclusión: $\neg s.$

4. Para cada una de las deducciones en el ejercicio anterior invente una historia que tenga esa estructura lógica (similares a los del ejercicio #1).

5. Sean ϕ and ψ fórmulas.

   a) Suponga que ψ es una tautología. Convénzase de que $\phi \to \psi$ es una tautología. Esto dice que $\phi \Rightarrow \psi$. En palabras, una tautología es una consecuencia lógica de cualquier fórmula.

   b) Suponga que ϕ es una contradicción. Convénzase de que $\phi \to \psi$ es una tautología. Esto dice que $\phi \Rightarrow \psi$. En palabras, cualquier fórmula se puede deducir de una contradicción.

6. Yoana, una niña de 7 años, acaba de conocer a Elena, hija de Carmen. Carmen dice que Yoana se parece bastante a su mamá y pregunta a Yoana: *¿A quién se parece Elena, a la mamá o al papá?* Aunque Yoana nunca ha visto al padre de Elena, dice que Elena se parece a su papá. ¿Cuál pudo ser el razonamiento usado por Yoana para concluir esto? ¿Qué premisas usó Yoana tácitamente?

7. Un prisionero debe hacer una elección entre dos puertas: detrás de una de ellas está una hermosa dama y detrás de la otra se halla un tigre hambriento. Suponga que cada una de las puertas tuviera un letrero y el prisionero sabe que *solamente* un letrero es verdadero. El letrero de la primera puerta dice:

   En este cuarto hay un dama y en el otro cuarto hay un tigre.

   El letrero de la segunda puerta dice:

   En uno de estos cuartos hay una dama y en uno de estos cuartos hay un tigre.

   Con esta información, el prisionero es capaz de elegir la puerta correcta (¿la del tigre?) Este problema es tomado de [2].

8. Supongamos que tenemos un número entero positivo menor que 14 y que satisface las siguientes condiciones: es divisible por 3 y al sumarle 2 se obtiene un número divisible por 4. Entonces ese número es el 6. Convénzase que este razonamiento es correcto. Exprese este razonamiento usando la lógica proposicional e indique cuáles son las reglas de inferencia usadas en la demostración.

2.2.3. Falacias

Una **falacia** es un argumento inválido que tiene la apariencia de ser correcto. En algunos casos, su aparente correctitud se debe a que es similar a uno que sí es correcto.

Ejemplo 2.23. Supongamos que alguien dice que "Si llueve, no iré a trotar" y sucedió que esa persona no fué a trotar. Entonces concluimos que llovió.

Premisas: "Si llueve, entonces no iré a trotar" y "No fué a trotar".
Conclusión: "Llueve"

Este argumento es incorrecto, pues como ya comentáramos en el ejemplo 2.19 tenemos que:

$$(p \to q) \wedge q \not\Rightarrow p$$

Sin embargo, la regla Modus Ponens nos asegura que

$$(p \to q) \wedge p \Rightarrow q.$$

Es decir, el siguiente argumento sí es correcto.

Premisas: "Si llueve, entonces no iré a trotar" y "Llueve".
Conclusión: "No iré a trotar".

□

Ejemplo 2.24. Considere el siguiente razonamiento:

Premisas: "Si llueve, entonces no iré a trotar" y "No llueve".
Conclusión: "Iré a trotar".

¿Es este argumento correcto? La respuesta es que no lo es, pues tenemos que

$$(p \to q) \wedge \neg p \not\Rightarrow \neg q$$

como lo puede verificar el lector interesado. Sin embargo, la regla Modus Tollens dice precisamente que

$$(p \to q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p.$$

Que correspondería al siguiente argumento válido:

Premisas: "Si llueve, entonces no iré a trotar" y "Voy a trotar".
Conclusión: "No llueve".

□

El lector interesado en conocer más sobre las falacias puede consultar [12].

2.2.4. Equivalencia lógica

Algunas fórmulas, aun siendo distintas, tienen la misma tabla de verdad. Considere por ejemplo las fórmulas $\neg(p \vee q)$ y $\neg p \wedge \neg q$. A continuación calcularemos simultánemente las tablas de verdad de estas fórmulas.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Observemos que las columnas 4 y 7 son idénticas. Es decir, independientemente de los valores de verdad que se le asigne a las variables p y q las proposiciones $\neg(p \vee q)$ y $\neg p \wedge \neg q$ reciben el mismo valor.

Para entender lo que esto significa notemos que $\neg(p \vee q)$ es verdadera exactamente cuando $p \vee q$ no lo es. Lo cual ocurre exactamente cuando ni p ni q es verdadera. Es decir, cuando p y q son falsas. Esto es, cuando $\neg p \wedge \neg q$ es verdadera. En otras palabras, desde el punto de vista de su veracidad, las fórmulas $\neg(p \vee q)$ y $\neg p \wedge \neg q$ dicen lo mismo (pero de manera diferente).

Veamos otro ejemplo. Considere ahora las fórmulas $p \rightarrow q$ y $\neg q \rightarrow \neg p$. La tabla de verdad de ellas (calculadas simultáneamente) es la siguiente:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V

De nuevo obtenemos que $p \rightarrow q$ y $\neg q \rightarrow \neg p$ tienen tablas de verdad idénticas. Esto muestra que una fórmula condicional y su contrarrecíproca son equivalentes en el sentido de que afirman lo mismo.

Dos fórmulas ϕ y ψ se dice que son **lógicamente equivalentes** si sus tablas de verdad son idénticas. Usaremos la siguiente notación para expresar que ϕ y ψ son lógicamente equivalentes:

$$\phi \Leftrightarrow \psi$$

La noción de equivalencia lógica está presente en el lenguaje natural cotidiano. Esto se observa cuando en el transcurso de una conversación o discusión se usa una expresión como “Bueno, en realidad estamos diciendo la misma cosa, pero cada uno lo dice a su manera”. La equivalencia lógica es de cierta forma una versión matemática de la noción común de “estar hablando de la misma cosa”.

Otra propiedad importante de la equivalencia lógica viene dada por las **reglas de sustitución** que veremos a continuación. Sean α, β, ϕ, y ψ fórmulas.

Reglas de sustitución

Suponga $\phi \Leftrightarrow \psi$ y $\alpha \Leftrightarrow \beta$. Entonces

S1	$\neg\phi$	$\Leftrightarrow$	$\neg\psi$
S2	$\alpha \wedge \phi$	$\Leftrightarrow$	$\beta \wedge \psi$
S3	$\alpha \vee \phi$	$\Leftrightarrow$	$\beta \vee \psi$

La primera afirmación es válida, pues la última columna de la tabla de verdad $\neg\phi$ se obtienen de la de ϕ sustituyendo V por F y viceversa. Y lo mismo ocurre con ψ y $\neg\psi$. Dejamos al lector la tarea de convencerse de las otras afirmaciones.

A través de equivalencias lógicas es posible transformar las fórmulas y obtener expresiones más simples. Ilustraremos con un ejemplo cómo simplificar un fórmula del tipo $\neg\phi$. Pero para hacerlo necesitaremos otra regla de sustitución: La transitividad.

Transitividad	Si $\phi \Leftrightarrow \psi$ y $\psi \Leftrightarrow \rho$, entonces $\phi \Leftrightarrow \rho$.

La tabla 2.3 muestra algunas equivalencias lógicas importantes. Dejamos a cargo del lector comprobar estas equivalencias haciendo las correspondientes tablas de verdad.

Ejemplo 2.25. Considere la siguiente fórmula:

$$\neg(p \to (q \vee r)) \tag{2.1}$$

Usaremos las equivalencias presentadas en la tabla de arriba junto con la propiedad que enunciamos justo después de la tabla para mostrar que esa fórmula es equivalente a

$$p \wedge (\neg q \wedge \neg r).$$

Seguiremos un procedimiento similar al de las derivaciones indicando en cada paso las reglas usadas.

				Justificación
(1)	$(p \to (q \vee r))$	$\Leftrightarrow$	$\neg p \vee (q \vee r)$	implicación
(2)	$\neg(p \to (q \vee r))$	$\Leftrightarrow$	$\neg((\neg p) \vee (q \vee r))$	sustitución S1, linea (1)
(3)	$\neg((\neg p) \vee (q \vee r))$	$\Leftrightarrow$	$\neg(\neg p) \wedge \neg(q \vee r)$	De Morgan
(4)	$\neg(\neg p)$	$\Leftrightarrow$	p	doble negación
(5)	$\neg(q \vee r)$	$\Leftrightarrow$	$\neg q \wedge \neg r$	De Morgan
(6)	$\neg(\neg p) \wedge \neg(q \vee r)$	$\Leftrightarrow$	$p \wedge (\neg q \wedge \neg r)$	sustitución S2, líneas (4) y (5)
(7)	$\neg(p \to (q \vee r))$	$\Leftrightarrow$	$\neg(\neg p) \wedge \neg(q \vee r)$	Transitividad, (2) y (3)
(8)	$\neg(p \to (q \vee r))$	$\Leftrightarrow$	$p \wedge (\neg q \wedge \neg r)$	Transitividad, (7) y (6)

Equivalencias lógicas

1	$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$	Doble negación
2a	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	Leyes conmutativas
2b	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	
3a	$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	Leyes asociativas
3b	$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$	
4a	$p \ \wedge \ (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \ \vee \ (p \wedge r)$	Leyes distributivas
4b	$p \ \vee \ (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \ \wedge \ (p \vee r)$	
5a	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$	Leyes de De Morgan
5b	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$	
6	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$	Contrapositiva
7	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$	Implicación

Tabla 2.3:

La línea (8) nos dice que la fórmula $\neg(p \to (q \vee r))$ es lógicamente equivalente a $p \wedge \neg q \wedge \neg r$, que es claramente mas simple que la primera.

Una vez que se tenga destreza con el manejo de las reglas de equivalencia uno puede resumir lo anterior de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\neg(p \to (q \vee r)) &\Leftrightarrow \neg((\neg p) \vee (q \vee r)) \\
&\Leftrightarrow \neg(\neg p) \wedge \neg(q \vee r) \\
&\Leftrightarrow p \wedge (\neg q \wedge \neg r)
\end{aligned}$$

□

Observación 2.26. Es importante que el lector note que $\phi \Leftrightarrow \psi$ ocurre cuando se cumplen simultáneamente que $\phi \Rightarrow \psi$ y también que $\psi \Rightarrow \phi$. Por esta razón, cuando se quiere establecer la equivalencia lógica entre dos proposiciones, uno puede hacerlo mostrando dos implicaciones lógicas.

De lo dicho anteriormente concluimos que las equivalencias lógicas que aparecen en la tabla 2.3 también pueden ser usadas como implicaciones lógicas y por lo tanto como reglas de inferencia. El próximo ejemplo ilustra eso, pues haremos uso de la regla que llamamos "contrapositiva":

$$(p \to q) \;\Leftrightarrow\; (\neg q \to \neg p).$$

En la práctica, esto significa que en cualquier momento de una deducción uno puede sustituir una fórmula del tipo $p \to q$ por $\neg q \to \neg p$.

Ejemplo 2.27. Mostraremos que el siguiente razonamiento es válido.

Premisas: $q \to r,\; p \to q,\; p \vee t,\; t \to s,\; \neg r.$
Conclusión: $s.$

		Justificación
(1)	$q \to r$	Premisa
(2)	$\neg r \to \neg q$	Contrapositiva de (1)
(3)	$\neg r$	Premisa
(4)	$\neg q$	Modus Ponens en (2) y (3)
(5)	$p \to q$	Premisa
(6)	$\neg q \to \neg p$	Contrapositiva de (5)
(7)	$\neg p$	Modus Ponens en (4) y (6)
(8)	$p \vee t$	Premisa
(9)	t	Silogismo Disyuntivo en (7) y (8)
(10)	$t \to s$	Premisa
(11)	s	Modus Ponens (9) y (10)

□

Ejercicios 2.2.4

1. Demuestre las equivalencias lógicas de la tabla dada en la sección 2.2.4. Es decir, compare las correspondientes tablas de verdad.
2. Simplifique las siguientes fórmulas siguiendo un procedimiento similar al usado en el ejemplo 2.25.
   a) $\neg(\neg p \to q)$
   b) $\neg((p \wedge q) \to r)$
   c) $\neg(p \to (q \vee r))$
   d) $\neg(p \to \neg(q \wedge r))$
   e) $\neg((p \wedge q) \to (r \vee s))$
   f) $\neg(\neg(\neg p \vee \neg q) \to (\neg r \vee \neg p))$
   g) $\neg(p \to (\neg(q \to \neg r) \to (r \to \neg s)))$
3. Halle una expresión equivalente a la fórmula dada que no use $\vee$.
   a) $q \vee (r \vee p)$
   b) $((r \vee \neg s) \vee q) \vee \neg p$
   c) $(p \vee q) \vee \neg(r \vee s)$.
   d) $p \to \neg(r \vee (q \to (q \vee r)))$.
4. Sean α y β dos fórmulas cualesquiera. Demuestre que
$$(\alpha \wedge \neg\alpha) \vee \beta \Leftrightarrow \beta.$$
5. Determine si las siguientes afirmaciones son válidas:
   a) $\neg(p \leftrightarrow (q \vee r)) \Leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow (\neg q \wedge \neg r))$
   b) $((\neg p \wedge \neg r) \to \neg q) \Leftrightarrow \neg((p \vee r) \to q)$
   c) $((p \to q) \to r) \Leftrightarrow (p \to (q \to r))$
   d) $((p \to q) \wedge (p \to r)) \Leftrightarrow (p \to (q \vee r))$
6. Determine si la siguientes deducciones son válidas.
   a) Premisas: $(p \vee q) \to \neg r,\ \ s \to r,\ \ p$.
   Conclusión: $\neg s$.
   b) Premisa: p.
   Conclusión: $q \to p$.
   c) Premisa: p.
   Conclusión: $q \to \neg p$.
   d) Premisa: $(p \vee q) \to r$.
   Conclusión: $(p \to r) \wedge (q \to r)$.

e) Premisas: $p \to q$, $p \to \neg q$.
Conclusión: $\neg p$.

f) Premisas: $\neg(s \wedge t)$, $\neg w \to t$.
Conclusión: $s \to w$.

g) Premisas: $\neg(\neg p \vee q)$, $\neg z \to \neg s$, $(p \wedge \neg q) \to s$, $\neg z \vee r$
Conclusión: r.

h) Premisas: $(\neg q \to \neg w)$, $(q \vee \neg w) \to z$, $\neg p \to \neg z$, $p \to (\neg r \vee \neg s)$
Conclusión: $\neg r \vee \neg s$.

7. Hemos visto varias formas de la implicación: $\to$ y $\Rightarrow$; y también del bicondicional: $\leftrightarrow$ y $\Leftrightarrow$. Este ejercicio debería aclarar la relación entre ellos.

   a) Muestre que afirmar que $\phi \Leftrightarrow \psi$ es equivalente a decir dos cosas: $\phi \Rightarrow \psi$ y $\psi \Rightarrow \phi$.

   b) Muestre que $\phi \Leftrightarrow \psi$ es equivalente a decir que $\phi \leftrightarrow \psi$ es una tautología.

   c) Muestre que $\phi \Rightarrow \psi$ es equivalente a decir que $\phi \to \psi$ es una tautología.

CAPÍTULO 3

CONJUNTOS

En este capítulo introduciremos el lenguaje de los conjuntos y estudiaremos sus propiedades haciendo uso de las herramientas de la lógica vistas en el capítulo 2. Enunciaremos las propiedades fundamentales de las operaciones entre conjuntos que constituyen lo que se conoce como **álgebra booleana** en honor al matemático irlandés George Boole (1815-1864), quien las introdujo en sus estudios de lógica. Pero fué a comienzos del siglo XX con los trabajos del matemático alemán Georg Cantor (1845-1918) cuando se inició el estudio sistemático de los conjuntos. Así que una parte importante de las matemáticas se desarrolló sin hacer uso de ellos. Sin embargo, hoy en día son imprescindibles. Se puede decir sin exagerar que todas las teorías matemáticas se pueden expresar en términos de la noción de conjunto.

En este capítulo comenzaremos a hacer *demostraciones*. Demostrar es una forma muy especial de justificar una afirmación. En una demostración se debe dar un razonamiento lógicamente correcto que tenga como conclusión la afirmación en cuestión. Las demostraciones son similares a las deducciones que estudiáramos en la sección 2.2.2. En matemáticas, las afirmaciones, para ser consideradas válidas deben ser demostradas. Está fuera de los objetivos de este texto el dar una definición precisa de esta noción, sin embargo, al final de este capítulo haremos una aproximación a una definición de la noción de demostración en matemáticas. Esperamos que los numerosos ejemplos de demostraciones que veremos den una idea al lector de cómo hacerlas.

3.1. Nociones básicas

Un conjunto es una colección de objetos. Usaremos letras mayúsculas como A, B, X para denotar conjuntos, y letras minúsculas como a, b, c, x para denotar los objetos. Un objeto a que pertenece a un conjunto X se dice que es un **miembro** o **elemento** de X. Escribiremos $a \in X$ para indicar que a es un elemento del conjunto X. En caso que a no pertenezca a X escribiremos $a \notin X$. La expresión $a \in X$ puede leerse de varias maneras equivalentes: *a pertenece a* X, *a es un elemento de* X, *a está en* X.

3.1.1. Definiciones por comprensión y por extensión

Comenzaremos esta sección presentando algunos ejemplos de conjuntos.

Ejemplos 3.1.

1. Consideremos el conjunto formado por los números 1,2,3 y 4. Denotaremos este conjunto con el símbolo
$$\{1, 2, 3, 4\}.$$
Las llaves { } se usarán siempre en las definiciones de conjuntos. Es indiferente el orden en que se escriban los elementos de un conjunto. El conjunto anterior es igual a
$$\{3, 1, 4, 2\}.$$
Cuando un conjunto se define dando la lista completa de todos sus miembros decimos que el conjunto está definido por **extensión**.

2. En muchos casos no es posible o no es fácil dar la lista completa de todos los elementos de un conjunto y en su lugar se da una propiedad que satisfacen única y exclusivamente los elementos del conjunto. Por ejemplo, consideremos el conjunto formado por todos los números naturales que dividen a 2346. Denotemos con la letra A este conjunto. Si quisiéramos, podríamos dar la lista completa de todos los elementos de A, pero nos tomaría algún tiempo hacerlo. Por ejemplo $2 \in A$, $6 \in A$, $7 \notin A$, $\frac{1}{4} \notin A$. Podemos expresar la definición de A de la manera siguiente
$$A = \{n : n \text{ es un número natural que divide a } 2346\}.$$
Este tipo de definiciones, muy frecuentes en matemáticas, se llaman definiciones por **comprensión**. Todas ellas tienen la siguiente forma
$$\{\ :\quad \}.$$
Antes de los dos puntos : (que se leen *tal que*) se pone una variable (por ejemplo n, x) que denota los objetos que forman al conjunto que estamos definiendo. Después de los dos puntos se escribe la propiedad que satisfacen única y exclusivamente los objetos que pertenecen al conjunto en cuestión.

3. Consideremos el conjunto de todos los números naturales que al dividirlos por 5 dan resto 2. Denotemos este conjunto con la letra A. Podemos verificar fácilmente que $7 \in A$ y $8 \notin A$. Si alguien nos dice un número, podemos, después de algunos cálculos sencillos, determinar si el número en cuestión pertenece o no al conjunto A. Sin embargo, no podemos dar la lista completa de los elementos de A, pues es infinita. Podemos expresar la definición de A de la manera siguiente
$$A = \{n : n \text{ es un número natural que al dividirlo por 5 da resto } 2\}.$$
Más adelante veremos otros ejemplos similares.

$\square$

Algunos conjuntos en matemáticas aparecen con tanta frecuencia y son de tal importancia que han recibido una notación especial. Veamos algunos de ellos: El conjunto de los **números naturales** se denota con el símbolo $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \cdots\}.$$

El conjunto de los **números enteros**

$$\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$$

que está formado por los números naturales junto con sus opuestos y lo denotamos con $\mathbb{Z}$. El conjunto de los **números racionales**, denotado con el símbolo $\mathbb{Q}$, consiste de los números fraccionarios, es decir, de las expresiones de la forma $\frac{n}{m}$ donde n y m son enteros y m es distinto de cero. Por ejemplo, los siguiente números son racionales

$$\frac{1}{2}, \frac{35}{6}, -\frac{3}{5}, \frac{12}{55}, \frac{3}{7}.$$

Los números racionales contienen a todos los enteros, pues la fracción de la forma $\frac{n}{1}$ representa al entero n. Por ejemplo, $\frac{2}{1}$ es el número 2 y $\frac{-5}{1}$ es el -5.

Los **números reales** se representan con expresiones decimales finitas e infinitas de la forma

$$3,141592653589 \cdots$$

$$1,414213562373095 \cdots$$

(por cierto, el primero es una aproximación del famoso número π que corresponde a la mitad de la longitud de una circunferencia de radio 1 y el segundo es una aproximación de $\sqrt{2}$). El conjunto de los números reales se denota por $\mathbb{R}$.

Teniendo estos conjuntos a nuestra disposición, ahora es más fácil definir otros conjuntos por comprensión.

Ejemplos 3.2. 1. El orden de los números enteros lo denotamos con el símbolo $<$. La expresión $n < m$ se lee *"n es menor que m"*. También escribiremos $m > n$ para indicar lo mismo que $n < m$. En general, también usará el símbolo $<$ para el orden entre los números reales. El símbolo $\leq$ se lee *"menor o igual que"*. Por ejemplo, $n \leq m$ indica que n es menor que m o que n es igual a m. Esto también se escribe $m \geq n$.

Podemos usar $<$ para definir conjuntos. Por ejemplo:

$$\{m : m \in \mathbb{Z} \text{ y } -4 < m\}$$

que consiste de todos los enteros mayores que -4. Observe que después de los dos puntos se escribe la condición que deben tener los elementos del conjunto que estamos definiendo. En este caso pedimos dos condiciones: que sean enteros y que sean mayores que -4.

2. Consideremos el siguiente conjunto
$$\{m : m \in \mathbb{Q} \text{ y } -4 < m\}.$$
Notemos la similitud de esta definición con la que aparece en el ejemplo anterior. Sin embargo, estos dos conjuntos no son iguales, pues $\frac{-7}{2}$ pertenece al que acabamos de definir pero no al que definimos en el ejemplo anterior (¿por qué?).
3. También es común usar la siguiente notación
$$\{m \in \mathbb{Z} : \ -4 < m\}$$
que de inmediato le indica al lector el tipo de objetos que forman el conjunto que se define, en este caso, el conjunto contiene sólo números enteros. Es importante que el lector comprenda que estas dos formas de describir los conjuntos son equivalentes. Es decir,
$$\{m : m \in \mathbb{Z} \text{ y } -4 < m\} = \{m \in \mathbb{Z} : \ -4 < m\}.$$
4. En general la forma de definir conjuntos por comprensión es la siguiente: Tenemos un conjunto X y una propiedad P. Definimos otro conjunto como sigue
$$\{x \in X : \ x \text{ tiene la propiedad } P\}.$$
Es decir, la definición por comprensión consiste en separar una parte del conjunto X por medio de una propiedad: La parte de X que contiene exactamente todos los elementos de X con la propiedad en cuestión.
5. El siguiente es otro ejemplo de un conjunto definido por compresión
$$\{x \in \mathbb{N} : \ 3 \leq x < 8\}.$$
En este caso es fácil dar una lista completa de sus elementos
$$\{3, 4, 5, 6, 7\}.$$
6. Recuerde que es irrelevante la letra usada para la variable en las definiciones por compresión. Por ejemplo
$$\{x \in \mathbb{N} : \ 3 \leq x < 8\} = \{n \in \mathbb{N} : \ 3 \leq n < 8\}.$$

□

Ejemplo 3.3. Considere el siguiente conjunto
$$A = \{x \in \mathbb{Z} : \ x = n^2 - n \text{ para algún } n \in \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

El conjunto A está definido por comprensión. Sin embargo, en este caso podemos también dar una descripción de A por extensión, es decir, podemos dar una lista completa de todos sus elementos:

n	$n^2 - n$
1	0
2	2
3	6
4	12

En resumen, tenemos que

$$A = \{0, 2, 6, 12\}.$$

Note que la frase *"para algún $n \in \{1, 2, 3, 4\}$"* indica que la variable n puede tomar cualquiera de los valores 1, 2, 3 o 4, y además, que para hacer la lista completa de los elementos de A debemos considerar todas esas alternativas. Una frase alternativa podría ser *"donde n es alguno de los números $1, 2, 3, 4$"*.

□

El primer conjunto definido en los ejemplos 3.2 también suele representarse de la siguiente manera

$$\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}.$$

Los 3 puntos $\cdots$ es la manera de decir *etcétera* en matemáticas. El contexto debe aclarar el significado de $\cdots$. Es importante tener presente que este tipo de notación para conjuntos es algo ambigua, pues presupone que el lector es capaz de inferir los otros elementos del conjunto.

Ilustraremos ahora otra manera de presentar los conjuntos definidos por comprensión. Considere el conjunto X de todos los números naturales que son el cuadrado de algún natural. Podemos expresar la definición de X de la siguiente forma:

$$X = \{n \in \mathbb{N} : \ n = m^2 \text{ para algún número natural } m\}.$$

Por ejemplo tenemos que $4 \in X$, $6 \notin X$, $9 \in X$, $7 \notin X$. Sin embargo, también se usa la siguiente notación para describir al conjunto X

$$X = \{m^2 : \ m \in \mathbb{N}\}.$$

Queremos resaltar que estas dos maneras de describir la colección de todos los cuadrados de números naturales son equivalentes, es decir,

$$\{n \in \mathbb{N} : \ n = m^2 \text{ para algún número natural } m\} = \{m^2 : \ m \in \mathbb{N}\}.$$

La ventaja que tiene la segunda descripción, aparte de ser más corta, es que señala explícitamente el procedimiento que debemos seguir para obtener todos los elementos del conjunto. En nuestro ejemplo, el procedimiento consiste en tomar el cuadrado de los números naturales. Podemos también describir al conjunto X usando la notación ambigua que mencionamos anteriormente

$$\{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \cdots\}.$$

Con esta notación ambigua uno espera que el lector adivine cuál es el procedimiento que debe seguirse para obtener todos los elementos del conjunto.

Veamos otros ejemplos que usaremos con frecuencia.

$$\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \cdots\} \qquad \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \cdots\}.$$

El lector reconoció seguramente que el primero es el conjunto de los números naturales **pares** y el segundo es el de los números **impares**. Si quisiéramos evitar la ambigüedad de los $\cdots$ podemos describir estos conjuntos de la manera siguiente:

$$\{2n : \ n \in \mathbb{N}\} \qquad \{2n + 1 : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

A veces se usa o mas bién se abusa del símbolo de igualdad y se describen conjuntos de la siguiente manera

$$\{2n : \ n = 0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Esta notación quiere indicar que la variable n puede tomar los valores 0, 1, 2, 3 ó 4. Tenemos entonces que

$$\{2n : \ n = 0, 1, 2, 3, 4\} = \{0, 2, 4, 6, 8\}.$$

Ejemplo 3.4. Considere el siguiente conjunto

$$A = \{6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, \cdots\}$$

Lo que observamos de los elementos que nos dan de A es que la diferencia entre dos consecutivos es 4. Por lo tanto, entre el primero 6 y el tercero 14, la diferencia es de $2 \cdot 4$. Esto sugiere lo siguiente:

$$A = \{4n + 2 : \ n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq 1\}$$

Insistimos que la última descripción del conjunto A es mejor que la primera.

3.1.2. Igualdad de conjuntos

Hemos usado el símbolo de igualdad entre conjuntos de manera intuitiva: dos conjuntos son iguales cuando tienen los mismos elementos. El concepto de igualdad de conjuntos es muy simple pero sumamente importante en matemáticas y por esta razón lo resaltamos a continuación.

Definición 3.5. *Dos conjuntos A y B son iguales si tienen los mismos elementos. Es decir $A = B$ si se cumplen las siguientes dos condiciones:*
(i) Todo elemento de A también pertenece a B.
(ii) Todo elemento de B también pertenece a A.

Dos conjuntos A y B no son iguales si existe un elemento de A que no pertenece a B ó si existe algún elemento de B que no pertenece a A. Por ejemplo, si A es el conjunto $\{1, 4, 5\}$ y B es el conjunto $\{4, 5\}$, entonces $A \neq B$, pues $1 \in A$ pero $1 \notin B$. Cuando dos conjuntos no son iguales escribimos $A \neq B$.

Ejemplos 3.6. 1. Considere los conjuntos A y B definidos a continuación

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{x \in \mathbb{N} : x = 2n^3 \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \text{ con } 0 \leq n \leq 3\} \\ B & = & \{2, 0, 16, 54\}\} \end{array}$$

Queremos saber si A es igual a B. Por la forma en que A está definido podemos dar una lista completa de sus elementos como lo hicimos en el ejemplo 3.3. Tenemos que

$$A = \{0, 2, 16, 54\}$$

Como A y B contienen los mismos elementos, entonces son iguales.

2. Considere ahora los siguientes conjuntos

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{1, 2\} \\ B & = & \{1, 2, 3\} \end{array}$$

Por inspección se obtiene que $3 \in B$, pero $3 \notin A$. En consecuencia, $A \neq B$.

Observe que para mostrar que dos conjuntos no son iguales, basta conseguir un elemento de uno de ellos que no pertenece al otro conjunto.

3.1.3. El conjunto vacío

Ahora introduciremos un conjunto muy especial. Consideremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{array}{ll} \{n \in \mathbb{N} : \ 1 < n < 2\} & \{r \in \mathbb{R} : \ r^2 < 0\} \\ \{q \in \mathbb{Q} : \ q < 0 \text{ y } q > 7\} & \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\} \end{array}$$

Estos cuatro conjuntos tienen una propiedad en común: no contienen elementos. Así que todos ellos son iguales (nótese que cada par de ellos satisfacen la definición de igualdad de conjuntos dada en la definición 3.5). Al conjunto que no tiene elementos se le llama **conjunto vacío** y se denota por $\emptyset$.

El conjunto vacío podría parecer inútil, pero no lo es. él cumple un papel tan importante en la teoría de conjuntos como el número cero en la aritmética.

3.1.4. Subconjuntos

Otro concepto que está muy relacionado con la igualdad de conjuntos es el de subconjunto.

Definición 3.7. *Sean A y B dos conjuntos, diremos que A es un* ***subconjunto*** *de B y escribiremos $A \subseteq B$ si todo elemento de A también pertenece a B.*

Simbólicamente, $A \subseteq B$ si para todo $x \in A$, se cumple que $x \in B$.

Ejemplos 3.8. 1. Por inspección se verifica que $\{1, 3, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2. Ya sabemos que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

3. Considere los conjuntos

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \; n(n-1)(n-2) = 0\}$$

$$B = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Para determinar si $A \subseteq B$ ó $B \subseteq A$ debemos primero conocer los elementos de A. Por simple inspección vemos que $0 \in A$, $1 \in A$ y $2 \in A$ ¿habrá otros? Para que un número natural n pertenezca a A, debe satisfacer la ecuación

$$n(n-1)(n-2) = 0.$$

Recordemos que el producto de varios enteros es igual a cero sólo cuando alguno de ellos es igual a cero. De esto obtenemos que $n(n-1)(n-2) = 0$, sólo si $n = 0$, $n - 1 = 0$ ó $n - 2 = 0$. Por lo tanto los únicos elementos de A son $0, 1$ y 2, es decir, $A = \{0, 1, 2\}$. Ahora es fácil verificar que $A \subseteq B$.

Por otra parte, como $4 \in B$ y $4 \notin A$, entonces B no es un subconjunto de A. Esto usualmente se escribe

$$B \not\subseteq A.$$

□

La relación de subconjunto satisface lo siguiente:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Para cualquier conjunto } A\text{:}\\[1em] \begin{array}{ccc}\emptyset & \subseteq & A\\ A & \subseteq & A\end{array}\end{array}}$$

¿Puede el lector justificar estas afirmaciones?

Observemos que dos conjuntos A y B son iguales si se cumple que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. Este hecho simple lo usaremos repetidamente y por esa razón lo resaltamos a continuación

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Para mostrar que dos conjuntos } A \text{ y } B \text{ son iguales, es suficiente mostrar que}\\[1em] A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A\end{array}}$$

3.1.5. El conjunto potencia

Podemos formar conjuntos cuyos elementos sean a su vez conjuntos. Por ejemplo,

$$\{\{1\}, \{2, 3\}, \{1, 3, 6\}\}$$

es un conjunto con tres elementos: $\{1\}$, $\{2, 3\}$ y $\{1, 3, 6\}$. Otro ejemplo es $\{\emptyset\}$, cuyo único elemento es $\emptyset$. Observemos que $\emptyset \in \{\emptyset\}$ y como $\emptyset$ no contiene elementos, entonces tenemos que $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

El conjunto formado por todos los subconjuntos de un conjunto dado A se llama el **conjunto potencia** o **conjunto de partes** de A, y lo denotamos por $\mathcal{P}(A)$.

$$\boxed{\mathcal{P}(A) = \{B : \ B \subseteq A\}}$$

Notemos que $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ y también que $A \in \mathcal{P}(A)$ para cualquier conjunto A.

Ejemplos 3.9. 1. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

2. Consideremos el conjunto $\{1\}$. Los subconjuntos de $\{1\}$ son $\emptyset$ y $\{1\}$. Por eso

$$\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}.$$

En general, si un conjunto A tiene un sólo elemento, digamos, por ejemplo, $A = \{a\}$, entonces los subconjuntos de A son $\emptyset$ y $\{a\}$. Es decir,

$$\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}.$$

3. Si $A = \{1, 2\}$, entonces $\mathcal{P}(A) = \{\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}, \emptyset\}$.

4. Considere ahora los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} X &= \mathcal{P}(\{1, 2\}) \\ Y &= \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \end{aligned}$$

Por inspección se obtiene que $\{3\} \in Y$, pero $\{3\} \notin X$, pues $\{3\} \not\subseteq \{1, 2\}$. En consecuencia, $X \neq Y$.

5. Si A tiene 3 elementos, digamos que $A = \{a, b, c\}$, entonces

$$\mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}.$$

6. Notemos que $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ tiene 2^3 elementos. Un resultado general, que se verá más adelante, dice que si A tiene n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos. Por ejemplo, $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\})$ tiene 2^5 elementos.

7. Podemos repetir la operación de tomar el conjunto potencia. Por ejemplo, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))$. Para calcular todos sus elementos recordemos que $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$. Por esto

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\})) = \{\{\emptyset, \{1\}\},\ \{\emptyset\},\ \{\{1\}\},\ \emptyset\}$$

   Observe que este conjunto tiene 2^{2^1} elementos.

8. El tamaño de los conjuntos obtenidos al tomar repetidamente el conjunto potencia crece con mucha rapidez. Por ejemplo,

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1,2\})))$$

   tiene $2^{2^{2^2}} = 2^{16} = 65.536$ elementos. Si aplicamos una vez más la operación de tomar el conjunto potencia, tenemos

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1,2\}))))$$

   Este conjunto tiene 2^{65536} elementos. Intente el lector calcular este número (necesitará varias páginas para escribirlo). Observe que $2^{2^{2^{2^2}}} = 2^{2^{16}} = 2^{65536}$.

□

Ejemplo 3.10. Recomendamos al lector que preste especial atención al uso de los símbolos de pertenencia, $\in$, y de inclusión, $\subseteq$. Con cierta frecuencia, los estudiantes, al comienzo, no los usan correctamente. Por ejemplo, suponga que $A \subseteq \mathbb{N}$, las siguientes expresiones son equivalentes:

$$3 \in A \text{ y } \{3\} \subseteq A.$$

Pero no tiene sentido decir que $3 \subseteq A$.

En general, observe que decir que $x \in A$ es equivalente a decir que $\{x\} \subseteq A$. Pero puede ocurrir que no tenga ningún sentido escribir $x \subseteq A$.

3.1.6. Las operaciones elementales

Comenzaremos definiendo la unión y la intersección.

$$\boxed{\begin{array}{l} A \cup B = \{x :\ x \in A \text{ ó } x \in B\} \\ A \cap B = \{x :\ x \in A \text{ y } x \in B\} \end{array}}$$

Observemos que para cualquier par de conjuntos A y B se cumple lo siguiente

$$\begin{array}{rcl} A \cap B & \subseteq & A \\ A & \subseteq & A \cup B. \end{array}$$

Dados dos conjuntos A, B, la **diferencia** de A menos B, denotada por $A \setminus B$, se define de la siguiente manera:

$$\boxed{A \setminus B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}}$$

Ahora usaremos estas operaciones para definir otra. La **diferencia simétrica**, denotada por $A \triangle B$, se define de la siguiente manera

$$\boxed{A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)}$$

Observe que x pertenece a $A \triangle B$ cuando ocurre que $x \in A$ ó $x \in B$, pero no ocurre que x pertenezca a ambos conjuntos A y B. En algunos textos se usa el símbolo $\oplus$ para denotar la diferencia simétrica.

Veamos ejemplos de todas las operaciones que hemos definido.

Ejemplo 3.11. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 7\}$, $B = \{2n : n \in \mathbb{N} \text{ y } n \leq 8\}$ y $C = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par}\}$. Entonces tenemos que

$$\begin{array}{rcl} A \cup B &=& \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,10,12,14,16\} \\ A \cap B &=& \{0,2,4,6\} \\ A \setminus B &=& \{1,3,5,7\} \\ B \setminus A &=& \{8,10,12,14,16\} \\ A \triangle B &=& \{1,3,5,7,8,10,12,14,16\} \\ B \setminus C &=& \emptyset \\ C \setminus B &=& \{2n : n > 8 \text{ y } n \in \mathbb{N}\} \\ B \triangle C &=& \{2n : n > 8 \text{ y } n \in \mathbb{N}\} \\ A \cap C &=& \{0,2,4,6\} \\ A \triangle C &=& \{1,3,5,7\} \cup \{2n : n \geq 4 \text{ y } n \in \mathbb{N}\} \end{array}$$

$\square$

Ejemplo 3.12. Imagínese la siguiente situación. Sobre una mesa hay 6 objetos dorados marcados con las letras a, b, c, d, e y f. Hay cuatro personas A, B, C y D que deben determinar cuáles de esos objetos son realmente de oro y cuáles son imitaciones. La elección de cada persona la expresaremos por un conjunto que contiene las letras correspondientes a los objetos que la persona considera son de oro.

$$\begin{array}{ll} A = \{a,b,c,e,f\} & B = \{a,b,c,d,e\} \\ C = \{d\} & D = \{e,f\} \end{array}$$

Ahora bien, los objetos realmente de oro son a y f. ¿Quién de las cuatro personas se acercó más a la respuesta correcta? Si sólo nos interesara saber quienes eligieron los objetos correctos tenemos que A sería el que se acercó más a la respuesta. Sin embargo, si también queremos incluir la información adicional sobre los objetos incorrectos que cada persona eligió, entonces debemos escoger a D, pues D mostró tener mejor criterio que A, ya que eligió uno sólo de los objetos de oro y además eligió sólo uno incorrecto. Por otro lado, A eligió 3 objetos incorrectos, C eligió solamente un objeto incorrecto, pero no eligió ninguno correcto.

Veamos la diferencia simétrica de los conjuntos A, B, C y D con la respuesta correcta $\{a, f\}$

$$\begin{array}{ll} A\triangle\{a,f\} = \{b,c,e\} & B\triangle\{a,f\} = \{b,c,d,e,f\} \\ C\triangle\{a,f\} = \{a,d,f\} & D\triangle\{a,f\} = \{a,e\} \end{array}$$

Con este ejemplo vemos que la operación de diferencia simétrica nos permite estimar qué tan parecidos son dos conjuntos. El número de elementos que tiene la diferencia simétrica entre la respuesta de cada persona y la respuesta correcta provee de un criterio para decidir cuál de las personas es la ganadora. En nuestro caso vemos que $D\triangle\{a, f\}$ tiene el menor número de elementos, y por esa razón podemos decir que D es quien mostró poseer el mejor criterio. □

Nuestro próximo ejemplo ilustra cómo se puede mostrar una propiedad general sobre las operaciones sobre conjuntos. El lector debería prestar bastante atención a este ejemplo, pues el método usado en él se repetirá con frecuencia en todo el curso.

Ejemplo 3.13. Sean A y B conjuntos cualesquiera. Mostraremos que

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B). \tag{3.1}$$

Por lo dicho en la sección 3.1.4, basta mostrar las siguientes afirmaciones:

$$A \setminus B \ \subseteq \ A \setminus (A \cap B) \tag{3.2}$$

y

$$A \setminus (A \cap B) \ \subseteq \ A \setminus B. \tag{3.3}$$

Veamos la primera afirmación. Lo que deseamos hacer es mostrar que cualquier elemento de $A \setminus B$ también pertenece a $A \setminus (A \cap B)$. Para hacerlo, denotemos con x un elemento cualquiera de $A \setminus B$. Entonces, por definición de la diferencia, se tiene que $x \in A$ y $x \notin B$. Por lo tanto, también se tiene que $x \notin A \cap B$. Como x se tomó en A, hemos mostrado que $x \in A \setminus (A \cap B)$. Ya que x representa un elemento *cualquiera* de $A \setminus B$, podemos concluir que $A \setminus B \subseteq A \setminus (A \cap B)$.

La segunda afirmación se trata de manera análoga. Tomemos un elemento cualquiera x en $A \setminus (A \cap B)$. Entonces, por definición de la diferencia se tiene que $x \in A$ y $x \notin A \cap B$. Por lo tanto, se tiene que $x \notin B$ (pues, si no fuera así, entonces $x \in A \cap B$, lo que no puede ser). Como x se tomó en A, hemos mostrado que $x \in A \setminus B$. Ya que x representa un elemento *cualquiera* de $A \setminus (A \cap B)$, podemos concluir que $A \setminus (A \cap B) \subseteq A \setminus B$.

Lo dicho hasta ahora es una justificación precisa de que las afirmaciones (3.2) y (3.3) son válidas. En otras palabras, los conjuntos $A \setminus B$ y $A \setminus (A \cap B)$ tienen los mismos elementos. Es decir, la afirmación (3.1) es válida.

Este tipo de justificaciones *precisas y apropiadas* es lo que llamamos **rigor matemático**, y es la característica principal de las demostraciones en matemáticas.

□

Los problemas en matemáticas tratan generalmente sobre las propiedades de algún conjunto particular, por ejemplo, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. El conjunto en cuestión usualmente se denomina **universo** o **conjunto universal**. En relación a un conjunto universal U prefijado se define el **complemento** de un subconjunto $A \subseteq U$, denotado por A^c, de la siguiente manera

$$A^c = U \setminus A.$$

Esta notación es un poco ambigua, pues A^c depende obviamente del conjunto U que se use. Tendremos el cuidado de que cada vez que usemos la operación de complementación el conjunto universal U esté claramente especificado.

Ejemplo 3.14. Supongamos que nuestro universo son los números naturales y sea A el conjunto de números pares, es decir, $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ y $U = \mathbb{N}$. Entonces tenemos que A^c es el conjunto de números impares, pues

$$\mathbb{N} \setminus A = \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}.$$

Ahora bien, si nuestro universo hubiese sido el de todos los números enteros, es decir, $U = \mathbb{Z}$, entonces tendríamos que

$$A^c = \{n \in \mathbb{Z} : n \leq -1\} \cup \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}.$$

□

Ejemplo 3.15. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : n$ es divisible por 3 $\}$. Y sea $B = \{n \in \mathbb{N} : n$ no es divisible por 3 $\}$. Si nuestro universo es $\mathbb{N}$, entonces $A = B^c$ y $B = A^c$. □

Otra noción que se usa con frecuencia es la siguiente. Diremos que dos conjuntos son **disjuntos** si no tienen elementos en común. En símbolos, los conjuntos A y B son disjuntos, si $A \cap B = \emptyset$. Un ejemplo de dos conjuntos disjuntos son el conjunto de los números pares y el de números impares. Veamos otros ejemplos. Considere los siguientes conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} \quad \text{y} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}.$$

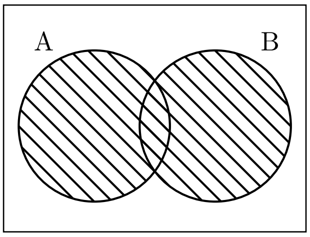
El lector debe convencerse de que A y B son disjuntos.

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, entonces A y $B \setminus A$ son disjuntos. En símbolos:

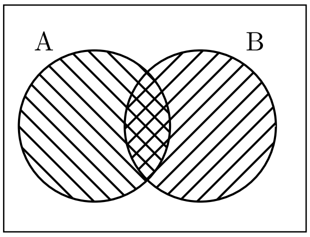
$$A \cap (B \setminus A) = \emptyset.$$

3.1.7. Diagramas de Venn

Una manera de representar las operaciones entre conjuntos es a través de los **diagramas de Venn**. A continuación presentaremos los diagramas correspondientes a las operaciones de unión e intersección:

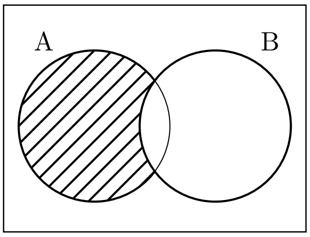


$A \cup B$

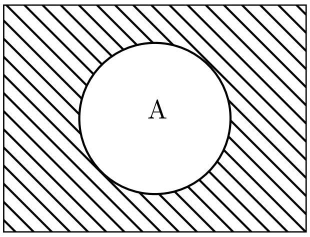


$A \cap B$

Los diagramas correspondientes a las operaciones de diferencia y complementación, son los siguientes:



$A \backslash B$

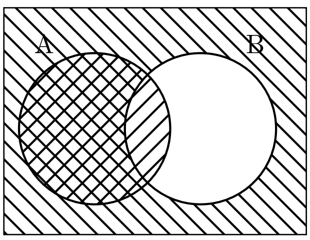


A^c

Observemos que usando la operación de complementación podemos describir la diferencia de dos conjuntos de la manera siguiente: Suponga que A y B son subconjuntos de un conjunto universal U, entonces

$$A \setminus B = A \cap B^c.$$

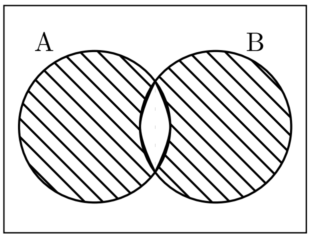
Esto lo podemos verificar fácilmente usando diagramas de Venn. Haremos un diagrama de Venn que represente $A \cap B^c$ y lo compararemos con el que hicimos arriba para $A \setminus B$.



$A \cap B^c$

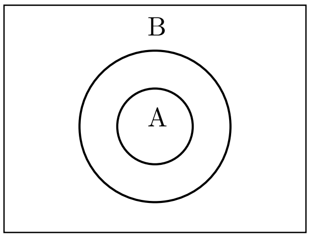
Vemos que ambos diagramas determinan el mismo conjunto. De lo anterior obtenemos otra forma de expresar la diferencia simétrica

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B).$$



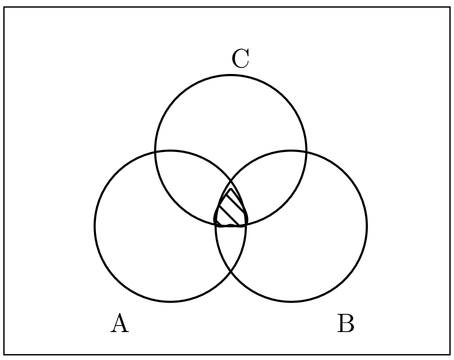
$A \triangle B$

El siguiente diagrama indica la relación de subconjunto



$A \subseteq B$

Por último, también podemos representar 3 conjuntos usando diagramas de Venn. Por ejemplo, la intersección de tres conjuntos A, B y C se representa de la manera siguiente:



$A \cap B \cap C$

Ejercicios 3.1

1. Dé una lista completa de los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

   a) $\{x \in \mathbb{N} :\ 3 \leq x < 9\}$

   b) $\{1/n^2 :\ n \in \mathbb{N},\ n \text{ es par y } 0 < n < 11\}$

   c) $\{z \in \mathbb{Q} :\ 0 \leq z^2 \leq 10 \text{ y } z^3 \in \mathbb{N}\}$

   d) $\{x \in \mathbb{Z} :\ x = n^2 - n^3 \text{ para algún } n \in \{1, 2, 3, 4\}\}$

   e) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1, 2\}))$

2. Lea cuidadosamente lo dicho en los ejemplos 3.2 y determine si las siguientes definiciones son correctas. En caso que lo sean, halle dos elementos del conjunto y en caso que no sean correctas, justifique porqué no lo son.

   a) $A = \{n \in \mathbb{N} :\ 3n + 2\}$

   b) $A = \{3n + 2 :\ n \in \mathbb{N}\}$

   c) $A = \{x \in \mathbb{Q} :\ y + 1 \geq 6\}$

   d) $A = \{z \in \mathbb{Q} :\ z = y + 1 \text{ para algún } y \in \mathbb{Q} \text{ con } y \geq 6\}$

   e) $A = \{2x + 1 \in \mathbb{Q} :\ x \leq 6\}$.

   f) $A = \{y \in \mathbb{Q} :\ y = 2x + 1 \text{ con } x \leq 6\}$

3. Halle 6 elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

(i)	$\{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$	(ii)	$\{2n : n \in \mathbb{N}\}$
(iii)	$\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$	(iv)	$\{n^3 - 4 : n \in \mathbb{Z}\}$
(v)	$\{1 - n^2 : n \in \mathbb{Z}\}$	(vi)	$\{2^n :\ n \in \mathbb{N}\}$
(vii)	$\{r \in \mathbb{Q} :\ 0 < r < 1\}$	(viii)	$\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\})$

4. Determine si los conjuntos A y B son iguales (revise lo hecho en los ejemplos 3.6):

   a) $A = \{2n^2 :\ n \in \mathbb{N} \text{ y } 0 \leq n \leq 3\}$

   $B = \{2, 0, 8, 18\}$

   b) $A = \{n^2 + 1 :\ n \in \mathbb{N} \text{ y } 0 \leq n \leq 3\}$

   $B = \{x \in \mathbb{Q} :\ x = n^2 + 1 \text{ para algún } n \in \mathbb{Q} \text{ con } 0 \leq n \leq 3\}$

   c) $A = \{n \in \mathbb{N} :\ n + 1 \geq 2\}$

   $B = \{n \in \mathbb{Z} :\ n + 1 \geq 2\}$

   d) $A = \{n \in \mathbb{N} : 3 \leq n \leq 6\}$

   $B = \{x :\ x \in \mathbb{N} \text{ y } 3 \leq x \leq 6\}$

   e) $A = \{n \in \mathbb{Q} : n \in \mathbb{N}\}$

   $B = \{n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{Q}\}$

f) $A = \mathcal{P}(\{1,2\})$

$B = \{X \in \mathcal{P}(\{1,2,3\}) :\ 3 \notin X\}$

g) $A = \{\emptyset\}$ y $B = \emptyset$

h) $A = \{\emptyset\}$ y $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

i) $A = \{\{\emptyset\}\}$ y $B = \{\emptyset\}$

5. *a*) Determine Muestre que las siguientes afirmaciones son verdaderas: $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ y $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

   b) Halle otro ejemplo de dos conjuntos A y B tales que $A \in B$ y $A \subseteq B$ son ambas verdaderas.

6. Considere los conjuntos

   $A = \{n :\ n = 0,1,2,3,4\}$ $\quad$ $B = \{4n+1 :\ n = 0,1,2,3\}$
   $C = \{n^2 :\ n = 1,2,3\}$ $\quad$ $D = \{0,2,4\}$

   ¿Cuál es subconjunto de cuál? Considere las dieciséis alternativas.

7. Considere los conjuntos

   $A = \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}$ $\quad$ $B = \{4n+1 : n \in \mathbb{N}\}$
   $C = \{n^2+1 : n \in \mathbb{N}\}$ $\quad$ $D = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$

   ¿Cuál es subconjunto de cuál? Considere las dieciséis posibilidades.

8. Para cada uno de los siguientes conjuntos halle una propiedad que sirva para definirlos por comprensión:

(i)	$\{0,3,6,9,12,15,18,21,\cdots\}$	(ii)	$\{1,4,7,10,13,16,19,22,\cdots\}$
(iii)	$\{0,5,10,15,20,25,30,35,\cdots\}$	(iv)	$\{0,1,8,27,64,125,216,\cdots\}$
(v)	$\{2,4,8,16,32,64,\cdots\}$	(vi)	$\{7,11,15,19,23,27,31,\cdots\}$
(vii)	$\{1,8,15,22,29,36,43,50,\cdots\}$	(viii)	$\{0,-1,2,-3,4,-5,6,-7,\cdots\}$

9. Sean $A = \{1,3,5,7,9,11\}$, $B = \{2,3,5,7,11\}$, $C = \{2,3,6,12\}$, $D = \{2,4,8\}$. Determine por extensión los siguientes conjuntos. En las partes (iii) y (ix) considere primero que el conjunto universal U es

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

   y después resuelva las preguntas (iii) y (ix) usando como conjunto universal a $\mathbb{N}$.

(i) $A \cup B$	(ii) $A \cap C$	(iii) $(A \cup B) \cap (C^c \cup D)$
(iv) $A \setminus B$	(v) $C \setminus D$	(vi) $B \triangle D$
(vii) $(A \cap C) \cup B$	(viii) $(A \cup C) \cap B$	(ix) $(B^c \triangle D^c) \triangle A^c$

10. *a*) Muestre que $\{1,3\} \triangle \{2\} \neq \{3,4\}$

    b) Halle un subconjunto C de $\{1,2,3,4\}$ tal que $\{1,3\} \triangle C = \{3,4\}$.

    c) Halle un conjunto C tal que $\{1,2,3\} \triangle C = \{3,7,5\}$.

11. Sea A un conjunto. Muestre que $A \triangle A = \emptyset$ y $A \triangle \emptyset = A$.

12. Muestre que A y A^c son disjuntos.

13. Exprese los siguientes enunciados usando las operaciones elementales entre conjuntos.
    a) Todos los elementos de A están en B o están en C.
    b) Si un elemento de A está en C, entonces también está en B.
    c) Los elementos que están tanto en A como en B, también están en C.
    d) Los elementos de A y los de B están en C.
    e) Todo elemento de A o de B pertenece a C o a D.

14. *a*) Haga el diagrama de Venn de los siguientes conjuntos: $(A \cup B) \cap C$, $A \cup (B \cap C)$.
    b) Halle tres conjuntos A, B y C no vacíos tales que

$$(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$$

    y halle también tres conjuntos D, E y F tales que

$$(D \cup E) \cap F = D \cup (E \cap F).$$

    (*Sugerencia:* No busque ejemplos complicados, todos los conjuntos pueden ser subconjuntos de $\mathbb{N}$).

15. *a*) Haga el diagrama de Venn de los siguientes conjuntos: $A \cap (B \cup C)$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.
    b) Use los diagramas anteriores para convencerse de que

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

16. De manera similar a como se hizo en el ejemplo 3.13, justifique las siguientes afirmaciones:
    a) $A \subseteq A \cup B$
    b) $A \cap B \subseteq A \cup B$

    para cualquier par de conjuntos A y B.

17. De manera similar a como se hizo en el ejemplo 3.13, justifique las siguientes afirmaciones:
    a) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$
    b) $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$
    c) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

d) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

18. Las siguientes afirmaciones son falsas. Proporcione conjuntos A, B y C que no cumplan con lo expresado.
    a) $A \cup B = A \cap B$
    b) $A \cap B = A \triangle B$
    c) $(A \cap B) \cup C = (A \cap C) \cup B$
    d) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$
    e) $A \triangle (B \cup C) = (A \triangle B) \cup (A \triangle C)$
    f) $A \triangle (B \cap C) = (A \triangle B) \cap (A \triangle C)$

3.2. La lógica y las operaciones sobre conjuntos

En esta sección presentaremos algunas analogías entre los operadores o conectivos lógicos y las operaciones sobre conjuntos. Mas adelante, en la sección 3.5, continuaremos con este tema.

Las operaciones sobre conjuntos y los conectivos de la lógica proposicional son similares. En la tabla que sigue señalamos la analogía existente entre ambas

$A \cap B$	$p \wedge q$
$A \cup B$	$p \vee q$
A^c	$\neg p$

Todas las expresiones que involucran la relación de pertenencia $\in$ y las operaciones elementales entre conjuntos, se traducen en proposiciones lógicas:

$x \in A \cap B$	$x \in A$ y $x \in B$
$x \notin A \cap B$	$x \notin A$ ó $x \notin B$
$x \in A \cup B$	$x \in A$ ó $x \in B$
$x \notin A \cup B$	$x \notin A$ y $x \notin B$
$x \in A^c$	$x \notin A$
$x \notin A^c$	$x \in A$
$x \in A \setminus B$	$x \in A$ y $x \notin B$
$x \notin A \setminus B$	$x \notin A$ ó $x \in B$

Es importante que el lector comprenda y recuerde esta tabla, pues es fundamental para trabajar con los conjuntos. En particular, observe el significado de $x \notin A \cap B$ y $x \notin A \cup B$. Como es costumbre en matemáticas, no hemos mencionado el conjunto universal, pues el contexto debe indicarlo.

3.2.1. Cuantificadores

El lenguaje de la lógica proposicional es insuficiente para expresar la mayoría de los resultados de la matemática. Hace falta introducir otros símbolos. Por ejemplo, la noción de subconjunto $A \subseteq B$ se define diciendo que todo elemento de A debe pertenecer a B. La expresión *"todo elemento de"* ocurre con mucha frecuencia en matemáticas y refleja una de sus características más importantes: la posibilidad de expresar y demostrar hechos generales sobre los elementos del universo que se esté analizando. El símbolo que se usa para abreviar esa expresión es $\forall$, que se lee "para todo", y se llama **cuantificador universal**.

Ahora podemos enunciar la definición de la relación de subconjunto usando el cuantificador universal:

$A \subseteq B$	$\forall x(x \in A \to x \in B)$

Otro cuantificador que se usa en lógica es el **cuantificador existencial** que se denota con el símbolo $\exists$ y se lee "existe". Este cuantificador ocurre, por ejemplo, al expresar que un subconjunto no está contenido en otro. En efecto, si $A \not\subseteq B$, entonces debe existir un elemento que pertenece a A y que no pertenece a B. En símbolos:

$A \not\subseteq B$	$\exists x\ (x \in A\ \wedge\ x \notin B)$

En la siguiente tabla veremos algunas relaciones entre conjuntos que se expresan usando cuantificadores.

$A \subseteq B$	$\forall x\ (x \in A \to x \in B)$
$A \not\subseteq B$	$\exists x\ (x \in A \wedge x \notin B)$
$A = B$	$\forall x\ (x \in A \leftrightarrow x \in B)$
$A \neq B$	$\exists x\ [(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)]$
$A \cap B \neq \emptyset$	$\exists x\ (x \in A \wedge x \in B)$
$A \cap B = \emptyset$	$\forall x\ (x \notin A \vee x \notin B)$

La tabla anterior también sirve para ilustrar cómo se comportan los cuantificadores cuando se niega una expresión que los contiene. *Al negar un cuantificador universal se obtiene uno existencial, y, viceversa, al negar un cuantificador existencial se obtiene uno universal.*

$\neg\forall x\psi$	$\exists x\neg\psi$
$\neg\exists x\psi$	$\forall x\neg\psi$

También escribiremos $\nexists$ en lugar de $\neg\exists$.

Ejemplo 3.16. (i) Considere la siguiente fórmula:

$$\neg(\forall x\ (x \in A \to x \in B)).$$

Ella es equivalente a

$$\exists x\ \neg(x \in A \to x \in B).$$

Ahora recordemos que $\neg(p \to q)$ es lógicamente equivalente a $p \wedge \neg q$. Por lo tanto, la fórmula original que estamos simplificando es equivalente a

$$\exists x\ (x \in A\ \wedge\ x \notin B).$$

(ii) Veamos otro ejemplo:

$$\begin{aligned} \neg(\exists x\ (x \notin A\ \vee\ x \in B)) &\Leftrightarrow \forall x\ \neg(x \notin A\ \vee\ x \in B) \\ &\Leftrightarrow \forall x\ (x \in A\ \wedge\ x \notin B) \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.17. Las desigualdades con frecuencia se expresan usando $\forall$. Veamos algunos ejemplos. Todo número real elevado al cuadrado no es negativo. En símbolos:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 \geq 0).$$

Todo número natural x cumple que $x < x + 1$. En símbolos:

$$\forall x \in \mathbb{N}\ (x < x + 1).$$

□

Ejemplos 3.18. También es importante saber cuando una afirmación cuantificada es verdadera o no.

1. Considere la afirmación

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (n^3 < 9) \tag{3.4}$$

   Para mostrar que ella no es válida, basta observar que si sustituimos n por 3, obtenemos una proposición falsa. En efecto, $3^3 = 27$ y $27 \not< 9$. El 3 se dice que es un **contraejemplo** de la afirmación (volveremos más adelante sobre este tema de los contraejemplos). ¿Puede conseguir otro contraejemplo?

2. Ahora, considere la afirmación

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ((x + 1)^2 \geq x^2).$$

   Vemos entonces que $x = -1$ es un contraejemplo (verificarlo) y, por lo tanto, esa afirmación es falsa.

   Dejamos a cargo del lector encontrar otros contraejemplos (¿Puede servir de contraejemplo cualquier número negativo?).

3. Considere la afirmación

$$\exists n \in \mathbb{N}\ (18 < n^2 + 3 < 20). \tag{3.5}$$

Para ver si es verdadera debemos hallar un natural que satisfaga la condición especificada. Si sustituimos en la expresión n^2+3 la variable n por los valores $0, 1, 2, 3, 4$ obtenemos respectivamente 3, 4, 7, 12 y 19. Vemos entonces que al sustituir n por 4 obtenemos la siguiente proposición verdadera "$18 < 4^2 + 3 < 20$". Por lo tanto, la afirmación (3.5) es verdadera, pues al menos existe un natural n tal que $18 < n^2 + 3 < 20$.

4. Observemos que la negación de la afirmación (3.4) es

$$\exists n \in \mathbb{N}\ (n^3 \geq 9).$$

Como (3.4) es falsa, entonces su negación es verdadera. En efecto, vimos que $3^3 \geq 9$.

$\square$

Ejemplos 3.19. En cada uno de los siguientes casos queremos hallar conjuntos A y B de números naturales que satisfagan la propiedad indicada.

1. $\exists x \in \mathbb{N}\ (x \in A \wedge x \in B)$.

   Considere los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 3, 4\}$. Este par de conjuntos satisface la propiedad indicada, pues, por ejemplo cuando x es igual a 2 se cumple que $x \in A$ y $x \in B$. ¿Qué podemos decir en general?, en otras palabras, ¿cuáles pares de conjuntos A y B satisfacen esta propiedad? Veamos:

$$\begin{aligned} \exists x \in \mathbb{N}\ (x \in A \wedge x \in B) &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N}\ (x \in A \cap B) \\ &\Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset \end{aligned}$$

   Esto nos dice que cualquier par de conjuntos A y B tales que $A \cap B \neq \emptyset$ satisfacen la propiedad indicada.

2. $\nexists x \in \mathbb{N}\ (x \in A \wedge x \in B)$.

   En este caso, basta tomar dos conjuntos disjuntos, por ejemplo, $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{4, 5\}$. Tenemos que no existe x tal que $x \in A$ y $x \in B$.

   De lo visto en el ejemplo anterior tenemos que

$$\nexists x \in \mathbb{N}\ (x \in A \wedge x \in B) \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = \emptyset$$

3. $\exists x \in \mathbb{N}\ (x \in A \vee x \in B)$.

   Por ejemplo, $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{4\}$ satisface la propiedad indicada. Pues haciendo x igual a 1 se cumple que $x \in A \vee x \in B$. En otras palabras, 1 es un ejemplo de que existe un x con la propiedad indicada. También 4 sirve como ejemplo. En general tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\exists x \in \mathbb{N}\,(x \in A \vee x \in B) &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N}\,(x \in A \cup B)\\ &\Leftrightarrow A \cup B \neq \emptyset\end{aligned}$$

Esto nos dice que cualquier par de conjuntos A y B tal que $A \cup B$ no sea vacío, es un ejemplo en que la propiedad indicada es verdadera.

4. $\exists x \in \mathbb{N}\,(x \notin A \wedge x \notin B)$.

   Considere $A = \{1, 2\}$ y $B = \{4, 5\}$. Entonces, haciendo x igual a 6 se tiene que $x \notin A$ y $x \notin B$. En general tenemos que

$$\begin{aligned}\exists x \in \mathbb{N}\,(x \notin A \wedge x \notin B) &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N}\,(x \in A^c \wedge x \in B^c)\\ &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N}\,(x \in A^c \cap B^c)\\ &\Leftrightarrow A^c \cap B^c \neq \emptyset\end{aligned}$$

   Por lo tanto, un par de conjuntos A y B satisface la propiedad indicada si, y sólo si, $A^c \cap B^c$ no es vacío. Observe que esto ocurrió con el ejemplo que dimos antes: Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{4, 5\}$, entonces $A^c \cap B^c = \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 4, 5\}$.

5. $\exists x \in \mathbb{N}\,(x \notin A \vee x \notin B)$.

   Los mismos conjuntos A y B que en el ejemplo anterior satisfacen esta propiedad. En general, tenemos que

$$\begin{aligned}\exists x \in \mathbb{N}\,(x \notin A \vee x \notin B) &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N}\,(x \in A^c \vee x \in B^c)\\ &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N}\,(x \in A^c \cup B^c)\\ &\Leftrightarrow A^c \cup B^c \neq \emptyset\end{aligned}$$

6. $\nexists x \in \mathbb{N}\,(x \in A \vee x \in B)$.

   En este caso, el único ejemplo es $A = B = \emptyset$. En efecto,

$$\begin{aligned}\nexists x \in \mathbb{N}\,(x \in A \vee x \in B) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N}\,\neg(x \in A \vee x \in B)\\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N}\,(x \notin A \wedge x \notin B)\\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N}\,(x \in A^c \wedge x \in B^c)\\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N}\,(x \in A^c \cap B^c)\\ &\Leftrightarrow A^c \cap B^c = \mathbb{N}\end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.20. Considere el siguiente conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{N} :\ \forall y \in \mathbb{N}\,(x \leq 10 + y)\}$$

Para que un número natural x pertenezca al conjunto A, debe cumplir cada una de las siguientes condiciones

$$\begin{array}{rcl} x & \leq & 10+0 \\ x & \leq & 10+1 \\ x & \leq & 10+2 \\ x & \leq & 10+3 \\ x & \leq & 10+4 \\ x & \leq & 10+5 \\ x & \leq & 10+6 \\ & \vdots & \end{array}$$

Hemos colocado $\vdots$ pues el cuantificador "$\forall y \in \mathbb{N}$" impone una condición para cada $y \in \mathbb{N}$. Por inspección podemos convencernos que $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

□

Ejemplo 3.21. También es frecuente usar expresiones en que aparecen ambos cuantificadores. Por ejemplo, para expresar que todo número real positivo tiene una raíz cuadrada, lo hacemos de la siguiente manera:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ [x > 0 \to \exists y \in \mathbb{R}\ (y^2 = x)]$$

Se puede simplificar esta expresión introduciendo un símbolo para denotar los números reales positivos. Normalmente se usa $\mathbb{R}^+$. Podemos entonces escribir la afirmación anterior de la siguiente manera:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+\ \exists y \in \mathbb{R}\ (y^2 = x).$$

Esta expresión usualmente se lee así: Para todo x en $\mathbb{R}^+$, existe un y en $\mathbb{R}$ tal que y^2 es igual a x. Observe que la expresión "tal que" no aparece y en su lugar usamos los paréntesis ( ).

□

Observación 3.22. Hay algo más sobre el uso de los cuantificadores que queremos mencionar brevemente. Las proposiciones que usan cuantificadores se enuncian referidas a un contexto. Por ejemplo, cuando escribimos $\forall x$ ¿a qué no estamos refiriendo la decir "para todo x"? Siempre que se use el cuantificador $\forall$ debe haber un contexto (a veces llamado el universo del discurso) donde la variable x toma sus valores. Los mismo podemos decir acerca del cuantificador $\exists$. En el ejemplo 3.19, el universo fue explícitamente mencionado, pues siempre escribimos $\forall x \in \mathbb{N}$ o $\exists x \in \mathbb{N}$. Para evitar confusiones es conveniente indicar el universo. Sin embargo, por brevedad, se tiende a no mencionarlo explícitamente.

Ejercicios 3.2

1. Vea el ejemplo 3.18 para responder este ejercicio.

a) Muestre que $n = 2$ es un contraejemplo a la siguiente afirmación

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (n^4 < 15)$$

¿Puede conseguir otro?

b) Considere la proposición

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ((x-1)^3 \geq x^3)$$

Muestre que $x = 0$ es un contraejemplo y encuentre otro.

c) Determine si la siguiente afirmación es verdadera

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (33 < n^3 + 2n + 1 < 35)$$

d) Determine si la siguiente afirmación es verdadera

$$\exists n \in \mathbb{N}\ (33 < n^3 + 2n + 1 < 35)$$

2. Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{N}$. Muestre que las siguientes afirmaciones son lógicamente equivalentes. Los complementos se calculan respeto al universo $\mathbb{N}$.

   a) $A \subseteq B$
   b) $\forall x \in \mathbb{N}(x \notin A \vee x \in B)$
   c) $\forall x \in \mathbb{N}(x \notin B \rightarrow x \notin A)$
   d) $B^c \subseteq A^c$

   En otras palabras, muestre que $(a) \Leftrightarrow (b)$, $(b) \Leftrightarrow (c)$, $(c) \Leftrightarrow (d)$ y $(d) \Leftrightarrow (a)$. Sin embargo, se puede trabajar un poco menos mostrando la siguiente cadena de implicaciones: $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$.

3. Sean A y B subconjuntos de un conjunto U. Muestre que las siguientes afirmaciones son lógicamente equivalentes:

   a) $A \cap B = \emptyset$
   b) $\forall x \in U(x \in A \rightarrow x \notin B)$
   c) $\forall x \in U(x \in B \rightarrow x \notin A)$
   d) $\forall x \in U(x \notin B \vee x \notin A)$

4. Sean A y B subconjuntos de un conjunto U. Determine si la siguiente afirmación es válida.

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \forall x \in U\,[\,(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)]$$

5. Determine cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y en caso que sean falsas dé un contraejemplo.

a) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ (x + y \geq 0)$

b) $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ (x + y \geq 0)$

c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ (x^2 + y^2 \geq 0)$

d) $\forall y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 + y^2 > 0)$

e) $\exists y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}\ (x^2 + y^2 > 0)$

6. En cada uno de los ejercicios que siguen, halle conjuntos A, B, C todos ellos subconjuntos de $\mathbb{N}$ que cumplan con la propiedad indicada.

   a) $\forall x \in \mathbb{N}\ (x \in A \vee x \in B \vee x \notin C)$

   b) $\forall x \in \mathbb{N}\ (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C)$

   c) $\forall x \in \mathbb{N}\ (x \notin A \to (x \in B \vee x \notin C))$

   d) $\exists x \in \mathbb{N}\ ((x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \in C))$

   e) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ (x \in A \to y \in B)$

   f) $\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ (x \in A \to y \in B)$

   g) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ (x \in A \to y \in B)$

   h) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ [x \in A \to (\,(y \in B \cap A) \wedge (y \neq x))\,]$

   i) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ (x \in A \to ((y \in B \wedge x \notin C))$

7. Simplifique las siguientes fórmulas siguiendo el procedimiento que se ilustra en el ejemplo 3.16.

   a) $\neg\,(\exists y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}\ (x^2 + y^2 > 0))$

   b) $\neg\,(\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ (x^2 + y^2 \geq 0))$

   c) $\neg\,(\forall y \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R}\ [y > 0 \to (x < z < x + y)])$

   d) $\neg\,(\forall x\ \exists y\ [\,(x \in A \wedge y \in B)\ \to\ x \in C]\,)$

   e) $\neg\,(\exists x[\,x \in C\ \to\ (\exists y(x \in A \wedge y \in B))\,]\,)$

   f) $\neg\,(\exists x\ [\,(\exists y(x \in A \wedge y \in B))\ \to\ x \in C\,]\,)$

8. Determine al menos un elemento de cada uno de los siguientes conjuntos

   a) $\{x \in \mathbb{N} :\ \exists z \in \mathbb{N}\ (z \geq 2\,,\ z < x \text{ y } z \text{ divide a } x)\}$

   b) $\{x \in \mathbb{N} :\ \exists z \in \mathbb{N}\ (2z \text{ divide a } x)\}$

   c) $\{x \in \mathbb{R} :\ \forall y \in \mathbb{R}\ (y > 0 \to xy > 0)\}$

   d) $\{x \in \mathbb{R} :\ \exists y \in \mathbb{R}\ (y > 0\ \wedge\ xy > 0)\}$

   e) $\{x \in \mathbb{R} :\ \forall y \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R}\ [y > 0 \to (x < z < x + y)]\}$

9. Considere los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{N} : \text{ Si } x \geq 9, \text{ entonces } x \text{ es impar}\} \\ B &= \{x \in \mathbb{N} : \text{ Si } x + 5 \geq 10, \text{ entonces } x \leq 20\} \\ C &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq 10 \text{ y } x \geq -8\} \\ D &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq -7 \text{ o } x \geq 22\} \end{aligned}$$

Determine cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas.

(i)	$5 \in A$	(v)	$9 \in C$
(ii)	$10 \in A$	(vi)	$-15/2 \in C \cap D$
(iii)	$6 \in B$	(vii)	$35 \in D$
(iv)	$16 \in B$	(viii)	$7 \in B \cap C$

10. Sea A un subconjunto de $\mathbb{N}$. Considere los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} B &= \{x \in \mathbb{N} : \text{ Si } x \in A, \text{ entonces } x \text{ es par}\} \\ C &= \{x \in \mathbb{N} : x \in A \text{ y } x \text{ es impar}\} \\ D &= \{x \in \mathbb{N} : \text{ Si } x \notin A, \text{ entonces } x \text{ es par}\} \end{aligned}$$

Muestre que las siguientes afirmaciones son verdaderas independientemente de quién sea el conjunto A:

a) $\mathbb{N} = B \cup C$

b) $B \cap D = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}$

3.3. Propiedades de las operaciones entre conjuntos

En esta sección estudiaremos algunas propiedades básicas de las operaciones entre conjuntos. Pero a diferencia de las secciones anteriores presentaremos argumentos más precisos para justificar las propiedades de los conjuntos. Estos argumentos se llaman *demostraciones* y son la herramienta fundamental que tienen los matemáticos para validar sus descubrimientos.

3.3.1. Algunas propiedades de la relación $\subseteq$

Comenzaremos con una propiedad que se conoce por el nombre de **propiedad transitiva**.

$$\text{Si } A \subseteq B \text{ y } B \subseteq C, \text{ entonces } A \subseteq C.$$

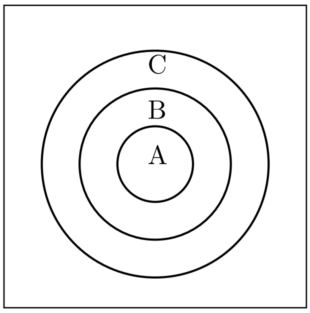
La forma como se enuncia la propiedad transitiva es un ejemplo de una afirmación *condicional*, pues ella afirma que $A \subseteq C$ bajo la condición de que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. En el enunciado de la propiedad transitiva, la hipótesis consiste de dos afirmaciones: $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. Y la conclusión es $A \subseteq C$.

Para mostrar la validez de la propiedad transitiva supongamos que tenemos tres conjuntos A, B y C tales que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. Mostraremos que entonces se cumple que $A \subseteq C$. En símbolos, lo que debemos mostrar es que:

$$\forall x\ (x \in A \to x \in C).$$

Para ver esto, sea x un elemento de A arbitrario (pero fijo). Queremos mostrar que $x \in C$. En efecto, una de nuestras suposiciones es que $A \subseteq B$, y como x lo tomamos en A podemos concluir que $x \in B$. La segunda suposición es que $B \subseteq C$, pero como ya mostramos que $x \in B$, podemos finalmente concluir que $x \in C$.

Si representamos con un diagrama de Venn que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ tenemos el siguiente diagrama



Observación 3.23. La propiedad transitiva de $\subseteq$ nos permite usar expresiones como la que sigue sin que haya ninguna ambigüedad

$$A \subseteq B \subseteq C$$

Esta expresión abrevia la conjunción de tres afirmaciones: $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ y $A \subseteq C$. Por ejemplo, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. Algo similar estamos acostumbrados a hacer con números, pues escribimos $x \leq y \leq z$ en lugar de escribir la expresión más larga: $x \leq y$, $y \leq z$ y $x \leq z$.

Observación 3.24. La justificación de la propiedad transitiva que acabamos de ver es un ejemplo de lo que en Matemáticas se llama una **demostración**. Este es además un ejemplo de una demostración de una afirmación condicional. El lector debe tomar nota de lo que hicimos, pues lo encontraremos con bastante frecuencia. A continuación lo resaltamos.

Para demostrar una afirmación condicional
suponga que la hipótesis se cumple
y muestre que la conclusión también se cumple.

□

Observación 3.25. Usualmente, la demostración de una afirmación como $A \subseteq C$ comienza con frases como *"Fijemos un elemento arbitrario x de A...."* o también *"Sea x un elemento arbitrario, pero fijo, de A..".* Recomendamos al lector que use estas expresiones o alguna otra equivalente cuando esté demostrando afirmaciones como la anterior. □

Otra propiedad de la relación de subconjunto $\subseteq$ es la siguiente:

Ejemplo 3.26. Sean A y B conjuntos cualesquiera. Mostraremos que:

$$\textit{Si } A \subseteq B, \textit{ entonces } B^c \subseteq A^c. \tag{3.6}$$

Para mostrar (3.6) haremos uso de una de las equivalencias lógicas vistas en el capítulo 2. Recordemos que una proposición condicional es lógicamente equivalente a su contrarrecíproca. En símbolos:

$$(\phi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\phi).$$

Por eso, la afirmación (3.6) es equivalente a la siguiente afirmación:

$$\textit{Si } B^c \not\subseteq A^c, \textit{ entonces } A \not\subseteq B. \tag{3.7}$$

Por lo tanto, para demostrar que (3.6) es válida, basta que mostremos que (3.7) lo es. Supongamos que A y B son conjuntos tales que $B^c \not\subseteq A^c$ y mostremos que $A \not\subseteq B$. Como, por hipótesis, $B^c \not\subseteq A^c$, entonces existe un elemento x que pertenece a B^c pero no a A^c. Es decir, existe x tal que $x \in B^c$ y $x \notin A^c$. En otras palabras, existe x tal que $x \notin B$ y $x \in A$. Esto precisamente dice que $A \not\subseteq B$ y así hemos mostrado (3.7).

□

Otra manera de enunciar la equivalencia lógica de dos proposiciones es a través de la expresión *si, y sólo si*. Es decir, $\phi \Leftrightarrow \psi$ dice lo mismo que ϕ si, y sólo si ψ. Recordemos además que esto último también es equivalente a decir que se cumple simultáneamente que $\phi \Rightarrow \psi$ y que $\psi \Rightarrow \phi$. El siguiente ejemplo ilustra el uso del *si, y sólo si*.

Ejemplo 3.27. Sean A y B dos conjuntos. Entonces se cumple que

$$A \cap B = A \text{ si, y sólo si, } A \subseteq B. \tag{3.8}$$

En este ejemplo tenemos las proposiciones:

$$\textit{Si } A \cap B = A, \textit{ entonces } A \subseteq B \tag{3.9}$$

y

$$\textit{Si } A \subseteq B, \textit{ entonces } A \cap B = A. \tag{3.10}$$

Recordemos que cuando decimos que *"Q si, y sólo si P"* estamos afirmando que las proposiciones Q y P son *equivalentes*. Esto significa que Q se cumple, si P se cumple y viceversa, P se cumple, si Q se cumple.

Ahora demostraremos (3.8). Primero veremos la afirmación (3.9). Nuestra hipótesis es que $A \cap B = A$. Sabemos que $A \cap B \subseteq B$. Luego, sustituyendo iguales por iguales (es decir, sustituyendo $A \cap B$ por A) obtenemos que $A \subseteq B$.

La afirmación (3.10) se demuestra de manera similar. Nuestra hipótesis ahora es que $A \subseteq B$ y queremos mostrar que $A \cap B = A$. Ya sabemos que $A \cap B \subseteq A$ (¿por qué?), así que queda mostrar que $A \subseteq A \cap B$. Tomemos $x \in A$, por hipótesis $A \subseteq B$, luego $x \in B$ y en consecuencia $x \in A \cap B$. $\square$

El ejemplo anterior nos dice que desde el punto de vista de la lógica, afirmar que un conjunto A es subconjunto de otro conjunto B es equivalente a afirmar que $A \cap B = A$.

El esquema que hemos usado en la demostración anterior se repetirá con mucha frecuencia y es importante que el lector le preste atención:

> Para demostrar una afirmación del tipo
>
> *Q si, y sólo si, P*
>
> se deben mostrar las siguientes afirmaciones condicionales:
>
> (1) *Si P, entonces Q.*
> (2) *Si Q, entonces P.*

Las equivalencias (lógicas) facilitan con frecuencia la búsqueda de la respuesta a una pregunta. Considere el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.28. Queremos determinar todos los conjuntos A que cumplan con la siguiente ecuación
$$A \cap \{1,3,5\} = A.$$
Por lo visto anteriormente sabemos que un conjunto A cumple con esta ecuación si, y sólo si, satisface la siguiente condición
$$A \subseteq \{1,3,5\}.$$
Por lo tanto, los únicos conjuntos que cumplen con la ecuación indicada son
$$\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}.$$
$\square$

Por último, recordemos que la expresión

"P, sólo si Q"

dice que Q es una condición necesaria para que P ocurra. En otras palabras, esa expresión equivale a decir que "Si P, entonces Q".

3.3.2. Unión e intersección

Comenzaremos con algunas de las propiedades de la unión y de la intersección. En lo que sigue, A, B y C denotarán conjuntos.

1a	$A \cup B = B \cup A$	**Leyes conmutativas**
1b	$A \cap B = B \cap A$	
2a	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	**Leyes asociativas**
2b	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	
3a	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	**Leyes distributivas**
3b	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
4a	$A \cup A = A$	**Leyes de idempotencia**
4b	$A \cap A = A$	
4c	$A \cup \emptyset = A$	**Leyes de la identidad**
4d	$A \cap \emptyset = \emptyset$	

Estas leyes (junto con otras que veremos más adelante) se conocen como las **leyes del álgebra de conjuntos** o también como las leyes del **álgebra boolena**.

Las *leyes conmutativas* dicen que el orden en que se unan o intersecten dos conjuntos es irrelevante, lo cual es bastante evidente observando las definiciones de la unión y la intersección.

Las *leyes asociativas* garantizan que el uso de los paréntesis no es necesario en las expresiones que usan sólo uniones o sólo intersecciones. Es decir, ya que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, entonces podemos definir un conjunto a través de la expresión $A \cup B \cup C$ sin que haya ninguna ambigüedad acerca de cuál conjunto estamos definiendo. De manera similar podemos escribir $A \cap B \cap C$ sin problemas de ambigüedad. Esto no sucede, por ejemplo, si tenemos una expresión como la siguiente

$$A \cup B \cap C.$$

En este caso no queda claro a qué conjunto nos referimos, pues tenemos dos alternativas

$$(A \cup B) \cap C$$

y

$$A \cup (B \cap C).$$

Estas dos expresiones no denotan en general el mismo conjunto (vea el ejercicio 14 de la sección 3.1.6). Por esto, el uso de los paréntesis es necesario.

Todavía nos queda por justificar la validez de las *leyes distributivas*. La demostración de esta ley no es tan directa y recurriremos a un argumento un poco más elaborado. Pero antes de hacerlo queremos comentar el significado de las propiedades de las operaciones sobre conjuntos.

En general, las leyes del álgebra de conjuntos permiten manejar las operaciones entre conjuntos y en muchos casos se puede simplificar el "cálculo" al usarlas. Veamos, por ejemplo, lo que dice la ley distributiva **3b**:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Observe que en el lado derecho de esta igualdad se realizan 3 operaciones: Primero $A \cap B$, después $A \cap C$ y por último la unión de los dos conjuntos obtenidos. En cambio, en el lado izquierdo, solamente hay que efectuar dos operaciones: Primero $B \cup C$ y después este conjunto se intersecta con A. Una situación análoga se presenta con la operaciones de la aritmética $+$ y $\cdot$. Por ejemplo, considere la siguiente igualdad:

$$(3 + 5) \cdot 4 = 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4.$$

Podríamos decir que la expresión en el lado izquierdo de la igualdad es más simple que la del lado derecho, pues para calcularla es necesario efectuar menos operaciones.

Ejemplo 3.29. Veamos la primera ley distributiva:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \tag{3.11}$$

Antes de dar una demostración sugerimos al lector que haga los diagramas de Venn correspondientes a $A \cup (B \cap C)$ y $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ y observe que en ambos diagramas obtenemos la misma región sombreada. Los diagramas de Venn como herramientas para guiarnos en nuestros razonamientos, son útiles pero tienen limitaciones. Por ejemplo, cuando se está trabajando con más de tres conjuntos los diagramas se vuelven muy engorrosos[1].

Ahora comenzaremos la demostración de la ecuación (3.11). Mostraremos que el conjunto $A \cup (B \cap C)$ tiene los mismos elementos que el conjunto $(A \cup B) \cap (A \cup C)$, y por lo tanto, por la definición de igualdad de conjuntos, concluiremos que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Comencemos mostrando que

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

[1] En el libro *Máquinas lógicas y Diagramas* de Martin Gardner [6] se estudian otros tipos de diagramas. Por ejemplo, cuando se trabaja con cuatro conjuntos, Venn propuso usar elipses en lugar de círculos.

En símbolos, queremos mostrar

$$\forall x\ [x \in A \cup (B \cap C) \ \rightarrow \ x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)].$$

Para verlo, tomemos un elemento x, arbitrario pero fijo, perteneciente a $A \cup (B \cap C)$ y mostremos que x también pertenece a $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Por definición de unión de conjuntos tenemos que hay sólo dos casos posibles: $x \in A$ o $x \in B \cap C$. Mostraremos que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ en ambos casos.

Caso a: Supongamos que $x \in A$. Entonces $x \in A \cup B$ y también $x \in A \cup C$. Luego $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Caso b: Supongamos que $x \in B \cap C$. Entonces $x \in B$ y por lo tanto $x \in A \cup B$. Pero también tenemos que $x \in C$, luego $x \in A \cup C$. En consecuencia, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Hemos mostrado que dado cualquier $x \in A \cup (B \cap C)$, independientemente de si $x \in A$ o si $x \in B \cap C$, se tiene que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Esto demuestra que $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Ya hemos probado la mitad de lo que queríamos. Nos falta mostrar que

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C).$$

En símbolos, queremos mostrar

$$\forall x\ [x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \ \rightarrow \ x \in A \cup (B \cap C)].$$

Es decir, queremos mostrar que si $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, entonces $x \in A \cup (B \cap C)$. Para esto, sea $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ un elemento arbitrario. Por definición de intersección de conjuntos tenemos que $x \in A \cup B$ y también que $x \in A \cup C$. Consideraremos dos casos: $x \in A$ o $x \notin A$. Mostraremos que $x \in A \cup (B \cap C)$ en ambos casos. En efecto:

Caso a: Supongamos que $x \in A$. Entonces $x \in A \cup (B \cap C)$.

Caso b: Supongamos que $x \notin A$. Entonces como $x \in A \cup B$, necesariamente se tiene que $x \in B$. De igual manera, ya que $x \in A \cup C$, entonces $x \in C$. Con esto hemos mostrado que $x \in B \cap C$ y por lo tanto $x \in A \cup (B \cap C)$.

Hemos mostrado de que dado cualquier $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, independientemente de si $x \in A$ o si $x \notin A$, se tiene que $x \in A \cup (B \cap C)$. Esto demuestra que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

□

Observación 3.30. Notemos que la demostración tiene dos partes. La primera consistió en mostrar que

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

y en la segunda parte mostramos que

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C).$$

El lector debe prestar mucha atención al esquema de esta demostración, pues lo repetiremos cada vez que queramos demostrar la igualdad de dos conjuntos.

Observación 3.31. ***(Prueba por casos)*** La demostración anterior tiene otra peculiaridad que deseamos resaltar. El argumento usado se separó en casos. Lo que ocurrió fue lo siguiente. En la primera parte de la demostración, una vez fijado un elemento arbitrario x, se separó el argumento en dos casos: $x \in A$ o $x \in B \cap C$. Considere entonces las siguientes proposiciones:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{P} & x \in A \cup (B \cap C) \\ \mathrm{Q} & x \in A \\ \mathrm{R} & x \in B \cap C \\ \mathrm{S} & x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array}$$

Lo que queríamos demostrar era la siguiente proposición:

$$P \rightarrow S$$

El caso a) consistió en demostrar que $Q \rightarrow S$ y el caso b) mostró que $R \rightarrow S$. Ahora, la regla *"prueba por casos"* (ver la sección 2.2.1) precisamente dice que

$$(q \rightarrow s) \ \wedge (r \rightarrow s) \ \Rightarrow (q \vee r) \rightarrow s.$$

Por consiguiente, concluimos que $(Q \vee R) \rightarrow S$. Por otra parte, por definición de unión se tiene que $P \rightarrow (Q \vee R)$. Y finalmente, la *ley del silogismo hipotético* nos asegura que

$$((p \rightarrow (q \vee r)) \ \wedge \ ((q \vee r) \rightarrow s)) \Rightarrow (p \rightarrow s).$$

En consecuencia, concluimos que $P \rightarrow S$. Y esto es lo que queríamos demostrar.

En situaciones como la anterior se dice que se ha hecho una *prueba por casos*. La introducción de los casos es un recurso que con frecuencia facilita las demostraciones. Este tipo de demostración es bastante común en matemáticas.

Ejemplo 3.32. Sean A y B conjuntos. Afirmamos que:

$$\text{Si } \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B), \text{ entonces } A = B. \tag{3.12}$$

En efecto, mostraremos la contrapositiva, es decir:

$$\text{Si } A \neq B, \text{ entonces } \mathcal{P}(A) \neq \mathcal{P}(B). \tag{3.13}$$

Supongamos que $A \neq B$. Entonces, $A \nsubseteq B$ ó $B \nsubseteq A$. Consideraremos estas dos alternativas por separado.

Caso 1: Supongamos que $A \not\subseteq B$. Entonces por definición del conjunto potencia, tenemos que $A \notin \mathcal{P}(B)$. Pero claramente $A \in \mathcal{P}(A)$. Por lo tanto $\mathcal{P}(A) \neq \mathcal{P}(B)$.

Caso 2: Supongamos que $B \not\subseteq A$. Entonces, al igual que en el caso 1 se concluye que $B \notin \mathcal{P}(A)$. Pero $B \in \mathcal{P}(B)$. Por lo tanto $\mathcal{P}(A) \neq \mathcal{P}(B)$.

Como en ambos casos se mostró que $\mathcal{P}(A) \neq \mathcal{P}(B)$, entonces podemos concluir que la afirmación (3.13) es verdadera y por lo tanto la afirmación original (3.12) también lo es. $\square$

Es importante verificar que los casos considerados cubran todas las posibilidades. Por ejemplo, dados dos conjuntos A y B, hay tres alternativas posibles:

$$\text{(i)} \quad A \not\subseteq B, \quad \text{(ii)} \quad B \not\subseteq A \quad \text{y (iii)} \quad A = B.$$

En el ejemplo anterior, la tercera alternativa no se considera, pues la hipótesis precisamente dice que $A \neq B$. Por esto sólo quedan las alternativas (i) y (ii), las cuales son los casos que hay que analizar.

En el próximo ejemplo ilustramos otra manera de escribir las demostraciones en la que queda más claro cuál es la justificación de cada paso de la demostración.

Ejemplo 3.33. Ahora veremos una generalización de las leyes distributivas. Mostraremos que para cada cuatro conjuntos A, B, C y D cualesquiera se cumple que

$$(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D). \tag{3.14}$$

La manera en que presentaremos la demostración de esta afirmación será diferente de la que hemos venido usando. Ahora haremos usos de las leyes del álgebra de conjuntos que hemos visto anteriormente.

$$\begin{array}{rcll} (A \cup B) \cap (C \cup D) & = & [(A \cup B) \cap C] \cup [(A \cup B) \cap D] & \text{Distributiva 3b} \\ & = & [(A \cap C) \cup (B \cap C)] \cup [(A \cap D) \cup (B \cap D)] & \text{Distributiva 3b} \\ & = & (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D) & \text{Asociativa} \end{array}$$

$\square$

El lector puede preguntarse por qué la demostración hecha en el ejemplo anterior es distinta a la hecha en el ejemplo 3.29. En realidad se puede hacer de otra manera. Le sugerimos que dé otra demostración de (3.14) mostrando las siguientes dos afirmaciones

$$(A \cup B) \cap (C \cup D) \subseteq (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)$$

y

$$(A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D) \subseteq (A \cup B) \cap (C \cup D).$$

3.3.3. Complementación

Ahora enunciaremos las propiedades básicas de la complementación. Las letras A y B denotarán subconjuntos de un conjunto universal U.

5a	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	**Leyes de De Morgan**
5b	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	
6a	$A \cup U = U$	**Leyes de la identidad**
6b	$A \cap U = A$	
7a	$(A^c)^c = A$	
7b	$A \cap A^c = \emptyset$	
7c	$A \cup A^c = U$	
7d	$U^c = \emptyset$	
7e	$\emptyset^c = U$	

Observemos que decir que

$$x \in A^c$$

es equivalente a decir que

$$x \in U \text{ y } x \notin A.$$

Sin embargo, el conjunto universal U estará usualmente implícito y por consiguiente escribiremos simplemente

$$x \notin A.$$

Demostraremos algunas de estas leyes y las otras las dejaremos a cargo del lector.

5a Fijemos un elemento $x \in U$ arbitrario. Tenemos entonces

$$\begin{array}{rcll} x \in (A \cup B)^c & \Leftrightarrow & x \notin A \cup B & \text{Definición de complemento} \\ & \Leftrightarrow & x \notin A \wedge x \notin B & \text{Definición de unión} \\ & \Leftrightarrow & x \in A^c \wedge x \in B^c & \text{Definición de complemento} \\ & \Leftrightarrow & x \in A^c \cap B^c & \text{Definición de intersección} \end{array}$$

Esto demuestra que

$$\forall x\, [x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c\,]$$

En consecuencia, por la definición de la igualdad de conjuntos, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

7a Mostremos que $A \subseteq (A^c)^c$ y que $(A^c)^c \subseteq A$. En efecto, sea $x \in A$, entonces $x \notin A^c$, es decir, $x \in (A^c)^c$. Ahora veamos que $(A^c)^c \subseteq A$. Tomemos $x \in (A^c)^c$, es decir $x \notin A^c$ y por lo tanto $x \in A$.

7b Veamos que $A \cap A^c = \emptyset$. Por definición de A^c vemos que ningún elemento de A puede pertenecer a A^c, así que $A \cap A^c$ no tiene elementos, y por lo tanto $A \cap A^c$ es el conjunto vacío.

□

Ejemplo 3.34. Mostraremos que

$$A^c \cap (A \cup B) \subseteq B.$$

En efecto,

$$\begin{array}{rcll} A^c \cap (A \cup B) & = & (A^c \cap A) \,\cup\, (A^c \cap B) & \text{Distributiva 3b} \\ & = & \emptyset \,\cup\, (B \cap A^c) & \text{ley conmutativa 1b y 7b} \\ & = & B \cap A^c & \text{ley de identidad 4c} \end{array}$$

Por último, de la definición de $\cap$ es inmediato que $B \cap A^c \subseteq B$.

□

Ejemplo 3.35. Sean A, B y C conjuntos. Queremos determinar si la siguiente afirmación es válida

$$A \subseteq [\,(B \setminus C)^c \setminus A\,]^c \tag{3.15}$$

Para responder esta pregunta, primero simplificaremos la expresión de la derecha y para ello usaremos las reglas del álgebra booleana.

$$\begin{array}{rcll} [\,(B \setminus C)^c \setminus A\,]^c & = & [\,(B \cap C^c)^c \cap A^c\,]^c & \text{Definición de diferencia} \\ & = & (B \cap C^c) \cup A & \text{Ley de De Morgan 5b y regla 7a} \end{array}$$

De la última igualdad se deduce inmediatamente que la afirmación (3.15) es verdadera. □

3.3.4. Diferencia simétrica

La primera propiedad de $\triangle$ es que para dos conjuntos cualesquiera A y B se cumple que

$$A \triangle B = B \triangle A.$$

Esto se deduce inmediatamente de la definición de $\triangle$. En efecto,

$$\begin{array}{rcl} A \triangle B & = & (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \\ & = & (B \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \\ & = & B \triangle A. \end{array}$$

La segunda igualdad está justificada por la ley conmutativa 1a para la unión. Esta propiedad de $\triangle$ usualmente se expresa diciendo que $\triangle$ es *conmutativa*.

Veremos ahora que $\triangle$ es una operación asociativa. Es decir, mostraremos que dados tres conjuntos A, B y C cualesquiera se cumple que

$$(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C).$$

Como la demostración es un poco larga, la dividiremos en partes. Primero observemos que de la definición de $\triangle$ tenemos que:

$$(A\triangle B)\triangle C = ((A\triangle B)\cap C^c) \;\cup\; (C\cap(A\triangle B)^c) \tag{3.16}$$

Esto sugiere que antes de continuar es conveniente conocer una expresión sencilla para $(A\triangle B)^c$. Afirmamos que

$$(A\triangle B)^c = (A^c\cap B^c) \;\cup\; (B\cap A) \tag{3.17}$$

En efecto,

$$\begin{array}{rcll}
(A\triangle B)^c & = & [(A\cap B^c) \;\cup\; (B\cap A^c)]^c & \text{Definición de } \triangle \\
 & = & (A\cap B^c)^c \;\cap\; (B\cap A^c)^c & \text{5a} \\
 & = & (A^c\cup B) \;\cap\; (B^c\cup A) & \text{5b} \\
 & & & \\
 & = & (A^c\cap B^c) \;\cup\; (A^c\cap A) \cup & \\
 & & (B\cap B^c) \;\cup\; (B\cap A) & \text{Ejemplo 3.33} \\
 & & & \\
 & = & (A^c\cap B^c) \;\cup\; \emptyset \;\cup\; \emptyset \;\cup\; (B\cap A) & \text{7b} \\
 & = & (A^c\cap B^c) \;\cup\; (B\cap A) & \text{6a}
\end{array}$$

Ahora afirmamos que

$$(A\triangle B)\triangle C = (A\cap B^c\cap C^c) \;\cup\; (B\cap A^c\cap C^c) \;\cup\; (C\cap A^c\cap B^c) \;\cup\; (C\cap B\cap A) \tag{3.18}$$

En efecto, sustituyendo en (3.16) lo que vimos en (3.17), obtenemos

$$(A\triangle B)\triangle C \;\;=\;\; (\,[(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)]\cap C^c\,) \;\cup\; (\,C\cap[(A^c\cap B^c) \;\;\cup\;\; (B\cap A)]\,)$$

y usando la ley distributiva 3b obtenemos lo buscado:

$$(A\triangle B)\triangle C \;\;=\;\; (A\cap B^c\cap C^c) \;\cup\; (B\cap A^c\cap C^c) \;\cup\; (C\cap A^c\cap B^c) \;\cup\; (C\cap B\cap A).$$

Ya casi llegamos al final. Veamos ahora como calculamos $A\triangle(B\triangle C)$. Para esto observemos que $\triangle$ es una operación conmutativa, por esto

$$A\triangle(B\triangle C) = (B\triangle C)\triangle A$$

Pero (3.18) nos permite también calcular $(B \triangle C) \triangle A$. En efecto, sustituyendo A por B, B por C y C por A en (3.18) obtenemos

$$(B \triangle C) \triangle A = (B \cap C^c \cap A^c) \cup (C \cap B^c \cap A^c) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap C \cap B) \quad (3.19)$$

Comparando (3.18) y (3.19) podemos concluir (por fin!) que $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

3.3.5. Contraejemplos

Hasta ahora nos hemos concentrado en ilustrar algunos de los métodos usados para demostrar la validez de una afirmación. Ahora veremos cómo podemos mostrar que una afirmación general **no** es válida. Es importante saber mostrar que algo no es válido, pues esto nos puede llevar a intuir o sospechar qué es lo válido.

Ejemplo 3.36. Supongamos que alguien afirma que $A \subseteq A \cap B$ para cualquier par de conjuntos A y B. ¿Es esta afirmación correcta? Veamos dos ejemplos concretos:

(1) $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$. En este caso tenemos que $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2\} \cap \{1, 2, 3\}$.

(2) $A = \{1, 2\}$ y $B = \{2, 3\}$. Entonces $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$ pero $\{1, 2\} \not\subseteq \{2\}$.

Vemos entonces que la afirmación no es válida en general, pues se cumple para algunos conjuntos pero para otros no. □

Los ejemplos donde falla una proposición (como la anterior) son llamados **contraejemplos**. En el caso que analizamos los conjuntos $\{1, 2\}$ y $\{2, 3\}$ (para A y B respectivamente) son un contraejemplo a la afirmación inicial.

Ejemplo 3.37. También podemos conseguir *contraejemplos* para afirmaciones condicionales. ¿Será cierto que para cualquier par de conjuntos A y B se cumple que

$$\text{Si } A \neq \emptyset \text{ y } B \neq \emptyset, \text{ entonces } A \cap B \neq \emptyset\ ? \quad (3.20)$$

Veamos algunos ejemplos que aclaren la pregunta.

(a) Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \mathbb{N}$ tenemos que A y B no son vacíos y además que $A \cap B = \{1, 2, 3\}$ no es vacío. Pero eso no es suficiente para garantizar que la afirmación se cumple en general, pues sólo la verificamos en un caso particular.

(b) Veamos otro caso, dejemos A igual, es decir, $A = \{1, 2, 3\}$ pero hagamos B más pequeño, digamos $\{n \in \mathbb{N} : n \geq 4\}$. En este caso tenemos que $\{1, 2, 3\} \cap \{n \in \mathbb{N} : n \geq 4\} = \emptyset$ y además ninguno de ellos es vacío. Así, $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 4\}$ son un contraejemplo a la afirmación.

Por lo tanto la afirmación (3.20) es falsa. □

Ejemplo 3.38. Dados tres conjuntos cualesquiera A, B y C, ¿Será cierto que

$$\text{Si } A \subseteq B \cup C, \text{ entonces } A \subseteq B \text{ ó } A \subseteq C \text{ ?.} \tag{3.21}$$

Pongamos $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$ y $C = \{4, 5, 6\}$. Vemos entonces que

$$\{1, 3, 5\} \subseteq \{0, 1, 2, 3\} \cup \{4, 5, 6\}.$$

Pero $\{1, 3, 5\} \not\subseteq \{0, 1, 2, 3\}$ y $\{1, 3, 5\} \not\subseteq \{4, 5, 6\}$. Por lo tanto la afirmación (3.21) es falsa. $\square$

A continuación daremos algunas indicaciones generales sobre cómo refutar una afirmación:

1. Para refutar la fórmula
$$p \wedge q$$
debemos hallar un ejemplo donde valga $\neg(p \wedge q)$. Como $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$, entonces debemos conseguir un ejemplo donde valga $\neg p \vee \neg q$. Es decir, un ejemplo donde valga $\neg p$ o donde valga $\neg q$.

2. Para refutar una proposición de la forma
$$p \vee q$$
debemos hallar un ejemplo donde valga $\neg(p \vee q)$. Como $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$, entonces debemos conseguir un ejemplo donde valga $\neg p \wedge \neg q$. Es decir, un ejemplo donde valga $\neg p$ y también $\neg q$.

3. Para refutar una fórmula condicional
$$p \rightarrow q$$
debemos hallar un ejemplo donde valga p y no valga q. Recuerde que $\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$.

Ejercicios 3.3

1. Escriba las demostraciones de la propiedades 7a y 7b como se hizo en la demostración de la parte (ii) de 5a (hechas en la sección 3.3.3).

2. Muestre la ley distributiva:
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$
Sugerencia: Demuestre las siguientes dos afirmaciones: $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ y $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.

3. Muestre la ley de De Morgan 5b: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
4. Muestre las siguientes afirmaciones donde U es el conjunto universal y $A, B \subseteq U$
   a) $A \cup A^c = U$
   b) $U^c = \emptyset$ y $\emptyset^c = U$
5. Muestre que $A \subseteq A \cup B$ y $A \cap B \subseteq A \cup B$ para cualquier par de conjuntos A y B.
6. Muestre la siguiente generalización de la ley de De Morgan

$$(A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c.$$

   (*Sugerencia:* Use las leyes de De Morgan 5a con los conjuntos A y $B \cup C$).
7. Demuestre lo siguiente
   a) $A \cup B = B$ si, y sólo si, $A \subseteq B$
   b) $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$ si, y sólo si, $A \cup B \subseteq C$
   c) Si $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ y $C \subseteq A$, entonces $A = B$ y $B = C$
8. Demuestre la siguiente generalización de la ley distributiva 3a

$$(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D)$$

9. Revise el ejemplo 3.32 y dé una demostración directa de la siguiente afirmación:

$$\text{Si } \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B), \text{ entonces } A = B.$$

10. Sean A y B subconjuntos de un conjunto universal U.
    a) Considere la siguiente afirmación:

$$\text{Si } A \subseteq B^c, \text{ entonces } A \cap B = \emptyset.$$

    Demuéstrela directamente, es decir, suponga que $A \subseteq B^c$ y demuestre que se cumple lo siguiente

$$\forall x \in U\, [x \notin A \cap B].$$

    b) Demuestre directamente la contrarrecíproca de la afirmación anterior, es decir,

$$\text{Si } A \cap B \neq \emptyset, \text{ entonces } A \not\subseteq B^c.$$

11. Sean A, B y C conjuntos. Muestre que
    a) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,
    b) $A \cup B = (A \setminus B)\ \cup\ (A \cap B)\ \cup\ (B \setminus A)$,

c) $A \triangle B = A^c \triangle B^c$,

d) $A \cup (A \triangle B) = B \cup (A \triangle B)$.

e) $A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$.

f) $A \cup C = B \cup C$, si, y solo si, $A \triangle B \subseteq C$.

12. Demuestre lo siguiente

a) $A \triangle (A \triangle B) = B$ (*Sugerencia:* Use la ley asociativa para $\triangle$).

b) Si $A \triangle B = A \triangle C$, entonces $B = C$ (*Sugerencia:* Use la parte (a)).

13. *a*) Halle un conjunto C tal que $\{1, 2, 3, 6, 8\} \triangle C = \{2, 3, 8, 9, 10\}$. (*Sugerencia:* Si no consigue la respuesta, siga a la parte (b)).

b) En este problema resolveremos de manera general una pregunta similar a la hecha en (a). Sean $A, B \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ dos subconjuntos cualesquiera. Muestre que existe un subconjunto C de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ tal que $A \triangle C = B$. (*Sugerencia:* Use el ejercicio 12 y razone como si estuviera despejando una ecuación, es decir, piense que C es la incógnita).

14. Sean A, B y C conjuntos. Suponga que $A \subseteq B$.

a) Muestre que en general no es cierto que $A \triangle C \subseteq B \triangle C$.

b) Muestre que $A \triangle C \subseteq (B \triangle C) \cup (B \cap C \cap A^c)$.

c) Si $C \subseteq A \subseteq B$, entonces $A \triangle C \subseteq B \triangle C$.

15. En este ejercicio, no olvide que los elementos de $\mathcal{P}(A)$ son también conjuntos. Demuestre lo siguiente

a) $A \subseteq B$ si, y sólo si $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

b) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

c) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

16. Sean A, B, y C conjuntos. Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) $A = [B^c \cup (A^c \cap B)]^c \cup (A \cap B^c)$,

b) $[A^c \cap (B \cup C)]^c \cap (A^c \cup B) = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$,

c) $(A^c \cup B^c)^c = [(A \cap B \cap C) \cup C^c] \cap [(A \cap B \cap C^c) \cup C^c]$

17. Determine cuales de las siguientes afirmaciones son equivalentes entre si. Sean A, B y C conjuntos.

a) $\forall x (x \in A \to x \in (B \cup C))$

b) $\forall x ((x \notin C \wedge x \in B) \wedge x \in A^c)))$

c) $\forall x ((x \notin B \wedge x \in C^c) \to x \notin A)$

d) $\neg [\exists x ((x \in B \to x \in C) \vee x \in A)]$

e) $\exists x((x \in C \wedge x \notin B) \vee x \notin A))$

f) $\neg[\forall x(x \in A \wedge (x \in B \vee x \notin C))]$

18. Diga cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas. Para las verdaderas dé una demostración y para las falsas proporcione un ejemplo en el que la afirmación no se cumpla.

    a) Si $A \neq \emptyset$ o $B \neq \emptyset$, entonces $A \cup B \neq \emptyset$.

    b) Si $A \neq \emptyset$ o $B \neq \emptyset$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.

    c) Si $A \cap B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$ o $B \subseteq C$.

    d) Si $A \cup B = A \cap B$, entonces $A = B$.

    e) Si $A \subseteq B$ o $A \subseteq C$, entonces $A \subseteq B \cup C$.

    f) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$.

    g) Si $\mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(B)$, entonces $A \in B$.

    h) Si $A \in B$, entonces $\mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(B)$.

19. En los siguientes ejercicios haremos una afirmación y propondremos una "demostración". Diga si la demostración es correcta. En caso que no lo sea, si es posible dé una demostración correcta, o de lo contrario, dé un contraejemplo que muestre que la afirmación es falsa.

    a) *Afirmación:* Si A y B son conjuntos tales que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, entonces $A \subseteq B$.

    "Demostración":

    $$\begin{array}{rcl} x \in A & \Rightarrow & \{x\} \subseteq A \\ & \Rightarrow & \{x\} \in \mathcal{P}(A) \\ & \Rightarrow & \{x\} \in \mathcal{P}(B) \\ & \Rightarrow & \{x\} \subseteq B \\ & \Rightarrow & x \in B \end{array}$$

    Esto muestra que si $x \in A$, entonces $x \in B$. Por lo tanto $A \subseteq B$.

    b) *Afirmación:* Sean A, B y C conjuntos. Si $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

    "Demostración": Si $x \in C$, entonces, como $B \subseteq C$, tenemos que $x \in B$. Ya que $A \subseteq B$ y $x \in B$, entonces $x \in A$. Esto muestra que si $x \in C$, entonces $x \in A$. Por lo tanto $A \subseteq C$.

    c) *Afirmación:* Si A, B y C conjuntos tales que $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

    "Demostración": Considere los siguientes conjuntos: $A = \{1, 5, 8\}$, $B = \{1, 4, 5, 8, 10\}$ y $C = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 10\}$. Entonces $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ y $A \subseteq C$.

    d) *Afirmación:* Si $X = \{x \in \mathbb{N} : x^2 < 14\}$ y $Y = \{0, 1, 2, 3\}$, entonces $X = Y$.

    "Demostración": Como $0^2 = 0$ y $0 < 14$, $1^2 = 1$ y $1 < 14$; $2^2 = 4$ y $4 < 14$; y $3^2 = 9$ y $9 < 14$. Entonces $X = Y$.

e) *Afirmación:* $A \cap \emptyset = A$.

"Demostración": Sabemos que $x \in A \cap \emptyset$ si, y sólo si, $x \in A$ y $x \in \emptyset$. Como $x \in \emptyset$ es falso, entonces $x \in A$ y $x \in \emptyset$ si, y sólo si, $x \in A \cap \emptyset$. Esto muestra que $A \cap \emptyset = A$.

f) *Afirmación:* $\mathcal{P}(A \setminus B) \setminus \{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$.

"Demostración": Sea $x \in \mathcal{P}(A \setminus B) \setminus \{\emptyset\}$. Entonces $x \in \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$. Por lo tanto $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$. $\square$

g) *Afirmación:* Si $A \cap B = A \cap C$, entonces $B \subseteq C$.

"Demostración": Sea $x \in B$. Consideraremos dos casos: $x \in A$ o $x \in C$.

Caso 1: Supongamos que $x \in A$. Entonces $x \in A \cap B$. Como por hipótesis $A \cap B = A \cap C$, concluimos que $x \in A \cap C$. Por lo tanto $x \in C$.

Caso 2: Supongamos que $x \in C$. En este caso no hay nada que probar. $\square$

3.4. El producto cartesiano

En esta sección introduciremos otra operación entre conjuntos. Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Para cada $a \in A$ y cada $b \in B$ formamos el **par ordenado**

$$(a, b).$$

El elemento a se llama la primera **componente** del par ordenado (a, b) y b la segunda componente. La colección de todos los pares ordenados (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$ se llama el **producto cartesiano** [2] de A por B y se denota por $A \times B$.

$$\boxed{A \times B = \{(a, b) : \ a \in A \text{ y } b \in B\}.}$$

Ejemplos 3.39. 1. Sea $A = \{1, 2\}$ y $B = \{p, q, r\}$. Entonces tenemos que

$$A \times B = \{(1, p), (1, q), (1, r), (2, p), (2, q), (2, r)\}.$$

2. Sea $A = B = \{1, 2\}$ Entonces

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}.$$

Observe que $(1, 2) \neq (2, 1)$ a diferencia de lo que ocurre con los conjuntos donde el orden no es importante, pues $\{1, 2\} = \{2, 1\}$. El par $(1, 1)$ es legítimo, en cambio

[2] La palabra *cartesiano* hace referencia al nombre del filósofo y matemático francés René Descartes (1596-1650) quién fué el creador de la geometría analítica.

el conjunto $\{1, 1\}$ es en realidad el conjunto $\{1\}$ pues no hace falta repetir los elementos. En algunos libros los pares ordenados se denotan por $< 1, 2 >$ para evitar una posible confusión con el intervalo $(1, 2)$ de la recta real. Nosotros mantendremos la notación más tradicional de (a, b) para pares ordenados pues el contexto siempre aclarará a qué nos estamos refiriendo.

3. El producto cartesiano de un conjunto A consigo mismo también se acostumbra denotar por A^2 en lugar de $A \times A$.

4. Si A tiene un sólo elemento, digamos $\{a\}$, y B es cualquier conjunto no vacío, también podemos formar $A \times B$ y obtenemos $\{a\} \times B = \{(a, b) : b \in B\}$.

□

Como su nombre lo indica, el orden en un par ordenado es importante pues dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales si se cumple que $a = c$ y $b = d$.

$$\boxed{(a, b) = (c, d) \text{ si, y sólo si, } a = c \text{ y } b = d.}$$

Veamos cómo se usa la definición de igualdad de pares ordenados. Mostraremos que $(a, b) = (b, a)$ si, y sólo si $a = b$. Debemos mostrar dos cosas: (i) Supongamos que $(a, b) = (b, a)$, entonces por la definición de igualdad de pares ordenados obtenemos que $a = b$. (ii) Supongamos que $a = b$, entonces las primeras y segundas componentes de (a, b) y (b, a) son iguales y por lo tanto $(a, b) = (a, a) = (b, a)$.

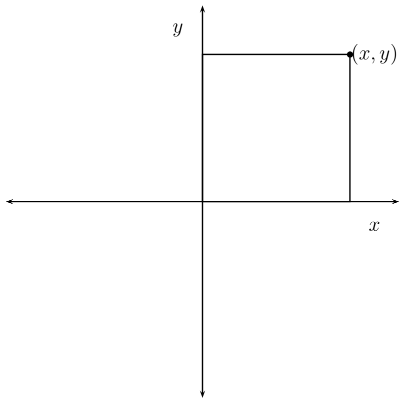
Los pares ordenados y el producto cartesiano son muy útiles para modelar situaciones reales. A continuación damos un ejemplo que ilustra lo que acabamos de decir.

Ejemplo 3.40. Si se tira dos veces una moneda al aire y convenimos en representar con la letra c si sale "cara" y con s si sale "sello", entonces todos los resultados posibles son: cs, cc, ss y sc. Podemos usar el producto cartesiano $\{c, s\} \times \{c, s\}$ para representar todas las posibilidades

$$\{c, s\} \times \{c, s\} = \{(c, s), (c, c), (s, s), (s, c)\}.$$

□

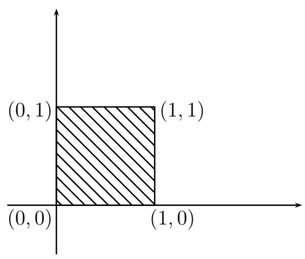
Ejemplo 3.41. *(El plano cartesiano)* El conjunto $\mathbb{R}^2$ que consiste de todos los pares ordenados de números reales sirve para representar un plano. El conjunto $\mathbb{R}^2$ generalmente se representa por un sistema de coordenadas, llamadas precisamente coordenadas cartesianas.



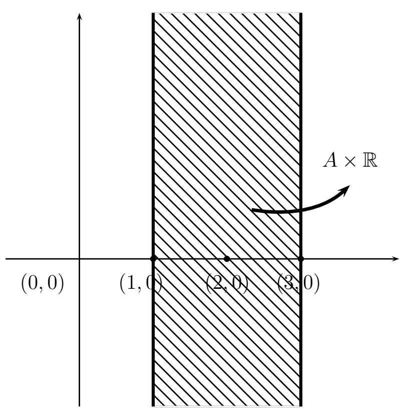
□

Ejemplos 3.42. Podemos definir subconjuntos interesantes de $\mathbb{R}^2$ usando $\times$.

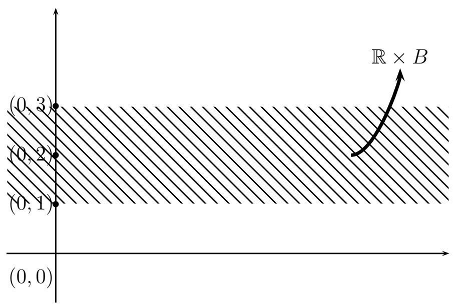
1. Consideremos el intervalo de la recta real $[0, 1]$ que consiste de todos los números reales x tales que $0 \leq x \leq 1$. El producto cartesiano $[0, 1] \times [0, 1]$ tiene una interpretación geométrica: un cuadrado de lado 1.



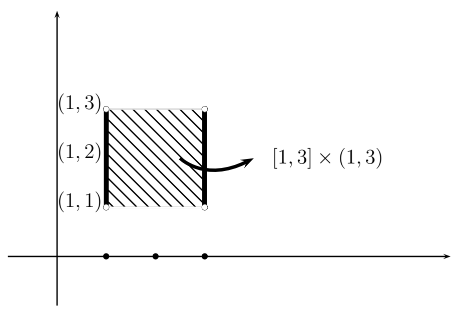
2. Sea A el intervalo cerrado $[1, 3]$ y B el intervalo abierto $(1, 3)$. El conjunto $A \times \mathbb{R}$ se representa de la siguiente manera.



y el conjunto $\mathbb{R} \times B$ se representa de la siguiente manera



Considere ahora el conjunto $(A \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times B)$.



$\square$

Podemos formar el producto cartesiano de tres conjuntos: $A \times B \times C$. Para esto se introduce el concepto de una **tripleta ordenada** (a, b, c) donde $a \in A$, $b \in B$ y $c \in C$.

$$\boxed{A \times B \times C = \{(x, y, z) : \ x \in A, y \in B, z \in C\}.}$$

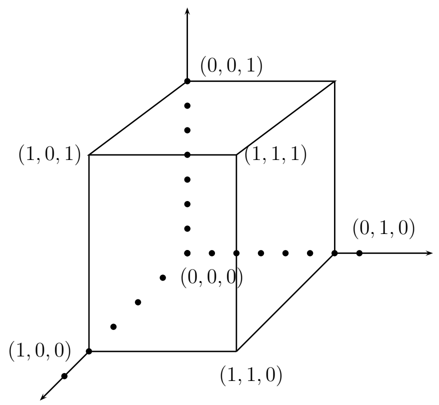
Al igual que con el producto cartesiano de dos conjuntos, se acostumbra a escribir

$$A^3$$

en lugar de $A \times A \times A$.

Ejemplos 3.43. 1. (*El espacio tridimensional*) El conjunto $\mathbb{R}^3$ que consiste de todas las tripletas ordenadas de números reales se usa para representar el espacio tridimensional.

2. (*El cubo*) El conjunto $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ tiene una interpretación geométrica natural: El cubo de lado 1.



□

3.4.1. Algunas propiedades del producto cartesiano

Ahora veremos algunas propiedades de la operación $\times$.

Ejemplo 3.44. Sean A, B y C conjuntos cualesquiera. Mostraremos que

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

Debemos verificar dos cosas:

(i) $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$

y

(ii) $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$.

Veamos (i). Sea $(x, y) \in A \times (B \cup C)$, entonces $x \in A$ y $y \in (B \cup C)$. Luego hay dos casos a considerar:

Caso a: Supongamos que $y \in B$. Entonces como $x \in A$, se tiene que $(x, y) \in A \times B$, y por lo tanto $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$.

Caso b: Supongamos $y \in C$. Entonces como $x \in A$, se tiene que $(x, y) \in A \times C$, y por lo tanto $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$.

Veamos (ii). Sea $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$. Entonces hay dos casos a considerar:

Caso a: Supongamos $(x, y) \in A \times B$. Entonces $x \in A$ y $y \in B$. Por lo tanto $y \in B \cup C$ y en consecuencia $(x, y) \in A \times (B \cup C)$.

Caso b: Supongamos $(x, y) \in A \times C$. Entonces $x \in A$ y $y \in C$. Por lo tanto $y \in B \cup C$ y en consecuencia $(x, y) \in A \times (B \cup C)$.

□

Ejemplo 3.45. Hay otra forma de presentar las demostraciones en el álgebra de conjuntos. Usaremos el ejemplo anterior para ilustrar lo que queremos decir. Para probar la igualdad

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C),$$

debemos mostrar que dado x, y cualesquiera se cumple que

$$(x, y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C).$$

Iremos mostrando unas equivalencias y la última de ellas será la deseada.

$$\begin{aligned}
(x, y) \in A \times (B \cup C) &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (\ y \in B \cup C\ ) \\
&\Leftrightarrow (x \in A) \wedge\ [(y \in B)\ \vee\ (y \in C)] \\
&\Leftrightarrow [(x \in A)\ \wedge\ (y \in B)]\ \vee\ [(x \in A)\ \wedge\ (y \in C)] \\
&\Leftrightarrow [(x, y) \in A \times B\ ]\ \vee\ [\ (x, y) \in A \times C] \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C).
\end{aligned}$$

Observe que hemos introducido los paréntesis y corchetes para evitar ambigüedad lógica con los conectivos. En el tercer paso hemos usado la ley distributiva de la lógica proposicional que dice lo siguiente

$$p \wedge (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

□

Ejemplo 3.46. Sean A, B y C conjuntos. Entonces

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C\ ).$$

En efecto,

$$
\begin{aligned}
(x,y)\in A\times(B\cap C) &\Leftrightarrow (\ x\in A\ )\ \wedge\ (\ y\in B\cap C\ )\\
&\Leftrightarrow (x\in A\ )\ \wedge\ [\ (y\in B\ )\ \wedge\ (\ y\in C\ )]\\
&\Leftrightarrow [(\ x\in A\ )\ \wedge\ (\ y\in B\ )]\ \wedge\ [(\ x\in A\ )\ \wedge\ (\ y\in C\ )]\\
&\Leftrightarrow [\ (x,y)\in A\times B\ ]\ \wedge\ [\ (x,y)\in A\times C\ ]\\
&\Leftrightarrow (x,y)\in (A\times B)\cap(A\times C).
\end{aligned}
$$

En este ejemplo hemos usado la siguiente equivalencia lógica:

$$p\wedge(q\wedge r)\Longleftrightarrow(p\wedge q)\wedge(p\wedge r).$$

Ejemplo 3.47. Sean A y B conjuntos. Entonces

$$(A\times B)^c=(A\times B^c)\ \cup\ (A^c\times B)\ \cup\ (A^c\times B^c).$$

Sea $(x,y)\notin A\times B$. Consideramos dos casos.

(i) Supongamos que $x\notin A$, es decir $x\in A^c$. Entonces de nuevo hay dos casos posibles: (ia) Si $y\in B$, entonces $(x,y)\in A^c\times B$. (ib) Si $y\notin B$, entonces $(x,y)\in A^c\times B^c$.

(ii) Supongamos que $x\in A$. Entonces necesariamente $y\notin B$. Luego $(x,y)\in A\times B^c$.

En cualquiera de los casos, hemos verificado que $(x,y)\in(A\times B^c)\cup(A^c\times B)\cup(A^c\times B^c)$.
La afirmación recíproca la dejamos como ejercicio al lector.

Ejercicios 3.4

1. Sean $A=\{1,2\}$, $B=\{-1,-2,-3\}$, $C=\{a,b,c\}$, $D=\{4\}$ y $E=\{1,2,3\}$.
   a) Determine por extensión los siguientes conjuntos:
   (i) $A\times B$ (ii) $A\times B\times C$ (iii) $B\times A$
   (iv) $A\times C\times A$ (v) A^3 (vi) $B^2\times D$
   b) Muestre que $A\times B\subseteq E\times B$.
   c) Muestre que $(A\times B)\cap(B\times B)=\emptyset$.
   d) Muestre que $A\times B\neq B\times A$.
2. Sea $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b\}$ y $C=\{5,6,7\}$. Determine por extensión los conjuntos: (a) $A^2\times B$, (b) $B\times A^2$, (c) B^3 y (d) $A\times B\times C$.
3. Represente en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ los siguientes conjuntos:
   a) $[0,4]\times[-1,2)$

b) $(3,6) \times (3,7)$

c) $(1,4] \times (3,+\infty)$

d) $[0,2) \times \mathbb{R}$

e) $\mathbb{R} \times [1,3]$

f) $([0,2) \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times [1,3])$

4. ¿Cuál figura geométrica se podría representar con los siguientes conjuntos?

   a) $[0,1] \times \{1\}$

   b) $[0,1] \times \{0\} \ \cup \ [0,1] \times \{1\} \ \cup \ \{0\} \times [0,1] \ \cup \ \{1\} \times [0,1]$

5. Mencionamos en el texto que un cubo se puede modelar con el conjunto

$$[0,1] \times [0,1] \times [0,1].$$

   ¿A qué parte del cubo corresponden los siguientes conjuntos?:

   a) $[0,1] \times [0,1] \times \{1\}$

   b) $[0,1] \times \{1\} \times \{0\}$

   c) $\{1\} \times [0,1] \times [0,1]$

6. Sean $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$ conjuntos. Supondremos que A^c y B^c se definen respecto de U y V como conjuntos universales. Como $A \times B \subseteq U \times V$, entonces $(A \times B)^c$ denotará a $(U \times V) \setminus (A \times B)$. Demuestre que

   a) $(A \times B)^c = (A^c \times V) \ \cup \ (U \times B^c)$.

   b) Recuerde que $U = A \cup A^c$ y $V = B \cup B^c$. Use el ejemplo 3.44 para dar otra demostración de la fórmula dada en el ejemplo 3.47.

7. Sean A, B y C conjuntos. Demuestre las siguientes afirmaciones:

   a) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

   b) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

   c) Si $A \subseteq B$, entonces $A \times C \subseteq B \times C$.

   d) $A \times \emptyset = \emptyset$.

   e) $A \times B = \emptyset$ si, y sólo si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.

8. En los siguientes ejercicios daremos un argumento que podría ser una "demostración". Determine cuáles de las afirmaciones son correctas y cuáles argumentos son correctos y completos. Justifique su respuesta.

a) **Afirmación:** $(A \times B) \cup C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
"Demostración":

$$\begin{array}{rll} x \in (A \times B) \cup C & \text{si, y sólo si} & x \in A \times B \text{ ó } x \in C \\ & \text{si, y sólo si} & x \in A \text{ y } x \in B \text{ ó } x \in C \\ & \text{si, y sólo si} & x \in (A \times C) \cup (B \times C). \end{array}$$

□

b) **Afirmación:** Si $A \times B = A \times C$ y $A \neq \emptyset$, entonces $B = C$.
"Demostración":

$$\frac{A \times B}{A} = \frac{A \times C}{A}$$

por lo tanto $B = C$. □

c) **Afirmación:** Si $A \times B = A \times C$ y $A \neq \emptyset$, entonces $B = C$.
"Demostración": Mostraremos primero que $B \subseteq C$. Sea $b \in B$. Como $A \neq \emptyset$ escogemos $a \in A$. Entonces $(a, b) \in A \times B$. Luego por hipótesis tenemos que $(a, b) \in A \times C$ y por lo tanto $b \in C$. Esto muestra que $B \subseteq C$.

La prueba de que $C \subseteq B$ es análoga. □

9. Todos los conceptos usados en matemáticas pueden ser expresados en términos de conjuntos. Veamos cómo hacerlo con el concepto de par ordenado. Sean A y B dos conjuntos. Dados $a \in A$ y $b \in B$, se define $\langle a, b\rangle$ (usaremos provisionalmente esta notación) como el conjunto

$$\{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

a) Sea $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3, 4\}$. Determine todos los elementos de $\{\langle a, b\rangle : a \in A \text{ y } b \in B\}$.

b) Muestre que para cada $a \in A$ y $b \in B$ se cumple que $\langle a, b\rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$

c) Muestre que la definición de $\langle a, b\rangle$ satisface la propiedad fundamental de los pares ordenados, a saber, $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

d) Sea A, B y C conjuntos. Exprese los elementos de $(A \times B) \times C$ como se hizo antes para los elementos de $A \times B$.

10. Imagine una ciudad organizada por carreras y calles como Bucaramanga. Suponga que las carreras y las calles comienzan en la Cero. Además que todas las cuadras (bloques) son de 100 metros. Para dar una dirección tenemos dos alternativas. La primera es la tradicional en términos de carreras y calles, por ejemplo, carrera 27 # 15-40, que como todos sabemos, significa que la casa está en la carrera 27 a 40 metros de la calle 15. Pero también podemos dar las direcciones como pares ordenados del plano cartesiano. Traduzca las direcciones que se indican. Convengamos que las calles corren en dirección Este-Oeste y las carreras Norte-Sur.

a) $(2700, 1540)$.

b) $(200, 2735)$.

c) Calle 12, # 25-12.

d) Carrera 34, # 12-80.

Determine una fórmula que permite traducir automáticamente las direcciones.

3.5. Lógica y álgebra booleana (continuación)

En esta sección continuaremos la presentación de las similitudes de las leyes de la lógica y las del álgebra booleana que comenzáramos en la sección 3.2. Al final de esta sección usaremos los conjuntos como herramientas para estudiar un tipo de razonamiento llamado silogismo categórico.

Ya hemos dicho que las operaciones del álgebra de conjuntos y de la lógica proposicional son similares. Las leyes del álgebra booleana se pueden traducir a leyes de la lógica proposicional sustituyendo $\cap$ por $\wedge$, $\cup$ por $\vee$ y ^{c} por $\neg$. Y viceversa, cada una de las leyes del cálculo proposicional se puede traducir al álgebra booleana. Veamos un ejemplo. Una de las leyes de De Morgan dice que

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

La correspondiente ley del cálculo proposicional, que también se llama ley de De Morgan, es la siguiente:

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \ \vee \ \neg q.$$

Es decir, la igualdad entre conjuntos $=$ se traduce en equivalencia lógica $\Leftrightarrow$ y viceversa.

Ejemplo 3.48. Considere la siguiente equivalencia lógica:

$$[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)].$$

Al traducirla al lenguaje del álgebra de Boole, obtenemos lo siguiente:

$$[A \cup (B \cap C)] = [(A \cup B) \cap (A \cup C)].$$

Es decir, una ley distributiva de la lógica se traduce en una ley distributiva del álgebra de Boole. $\square$

Ejemplo 3.49. La implicación lógica $\Rightarrow$ se puede interpretar como la relación de subconjunto. Por ejemplo, la regla *modus ponens* dice

$$[p \wedge (p \to q)] \Rightarrow q.$$

Veamos qué dice esta regla al traducirla al álgebra de conjuntos. Recordemos que para traducir $p \to q$ usamos su equivalente $\neg p \vee q$. La traducción del *modus ponens* es:

$$[A \cap (A^c \cup B)] \subseteq B.$$

Veamos que esta última afirmación es válida. En efecto,

$$\begin{array}{rcl} A \cap (A^c \cup B) & = & (A \cap A^c) \cup (A \cap B) \\ & = & \emptyset \cup (A \cap B) \\ & = & A \cap B \\ & \subseteq & B. \end{array}$$

En la primera igualdad hemos usado una de las leyes distributivas; en la segunda, el hecho de que $A \cap A^c = \emptyset$ y la última afirmación se deduce de la definición de $\subseteq$.

$\square$

3.5.1. Silogismos categóricos

En esta sección usaremos las propiedades que hemos visto de los conjuntos para estudiar un tipo de razonamiento muy sencillo conocido como **silogismo categórico**. Comenzaremos presentando un ejemplo que es sin duda el más conocido de todos los silogismos categóricos.

(1)	Todos los hombres son mortales
(2)	Sócrates es hombre
(3)	Sócrates es mortal

Si aceptamos como verdaderas las proposiciones (1) y (2), entonces necesariamente (3) también lo es. Por eso el razonamiento anterior es válido. ¿Qué tiene que ver esto con las propiedades de los conjuntos? Como veremos a continuación, la validez de razonamientos de este tipo se puede justificar a través de los conjuntos.

Denotemos por M al conjunto de todos los seres mortales, por s a Sócrates y por H al conjunto de todos los hombres. Entonces, el silogismo anterior puede ser expresado usando el lenguaje de los cuantificadores de la manera siguiente:

(1)	$\forall x\, (x \in H \rightarrow x \in M)$.
(2)	$s \in H$.
(3)	$s \in M$.

Lo primero que debemos notar es que este razonamiento es válido independientemente del lo que representen las variables H, M y s. Por ejemplo, el siguiente razonamiento también es válido.

(1)	Todos los burros son trabajadores
(2)	Platero es un burro
(3)	Platero es trabajador

Los silogismos categóricos usan las expresiones “todos”, “algunos” y “ninguno”. Veamos otros ejemplos.

Ejemplo 3.50. Considere el siguiente razonamiento

(1)	Todos los perros son animales
(2)	Algunos perros son equilibristas
(3)	Algunos animales son equilibristas

Al igual que en el ejemplo anterior, podemos ver que si las dos primeras proposiciones son verdaderas, entonces la tercera también lo es. Pues la segunda dice que al menos existe un perro equilibrista y por la primera sabemos que ese perro es también un animal equilibrista.

Denotemos por P al conjunto de todos los perros, por A al de los animales y por E al de los seres vivos que son equilibristas. En forma simbólica podemos representar este razonamiento de la manera siguiente.

$$\begin{array}{ll} (1) & \forall x\ (x \in P \rightarrow x \in A) \\ (2) & \exists x\ (x \in P \wedge x \in E) \\ \hline (3) & \exists x\ (x \in A \wedge x \in E) \end{array}$$

O de manera equivalente:

$$\begin{array}{ll} (1) & P \subseteq A \\ (2) & P \cap E \neq \emptyset \\ \hline (3) & A \cap E \neq \emptyset \end{array}$$

Para mostrar la validez de este argumento notemos que (2) nos dice que $P \cap E \neq \emptyset$, por lo tanto podemos escoger un elemento de $P \cap E$ que denotaremos con la letra a. En particular, $a \in P$. En consecuencia, por (1), sabemos que $a \in A$. Así hemos mostrado que $a \in E \cap A$. Esto dice que $E \cap A \neq \emptyset$.

□

Los silogismos categóricos usan solamente proposiciones del siguiente tipo:

(1) Todos los hombres son honestos
(2) Ningún hombre es honesto
(3) Algún hombre es honesto
(4) Algún hombre no es honesto

La forma general de estas proposiciones es la siguiente:

$$\begin{array}{ll} (1) & \forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B) \\ (2) & \nexists x\ (x \in A \wedge x \in B) \\ (3) & \exists x\ (x \in A \wedge x \in B) \\ (4) & \exists x\ (x \in A \wedge x \notin B) \end{array}$$

Note que hemos traducido "ningún" por "no existe" y "algún" por "existe".
Como antes, podemos expresar estas proposiciones de manera equivalente como sigue:

$$\begin{array}{ll} (1) & A \subseteq B \\ (2) & A \cap B = \emptyset \\ (3) & A \cap B \neq \emptyset \\ (4) & A \cap B^c \neq \emptyset \end{array}$$

En muchos casos la verificación de que un silogismo categórico es válido se simplifica considerablemente observando que las siguientes tres afirmaciones son lógicamente equivalentes:

$$A \cap B = \emptyset \qquad A \subseteq B^c \qquad B \subseteq A^c.$$

Observación 3.51. Ya hemos mencionado (ver la observación 3.22) que para evitar confusiones al usar cuantificadores conviene mencionar el contexto o universo sobre el cual se está trabajando. En el ejemplo 3.50 podemos tomar como contexto el conjunto de todos los seres vivos. Esperamos que el lector pueda reconocer sin dificultad un contexto adecuado para cada uno de los razonamientos que aparezcan más adelante. No haremos más comentarios sobre este aspecto, pero aseguramos al lector que esta aparente ambigüedad no causa ningún problema a la hora de determinar la validez de los razonamientos que presentaremos.

Ejemplo 3.52. Considere el siguiente razonamiento:

(1)	Algunos profesores son personas atléticas
(2)	Ningún profesor desprecia el estudio
(3)	Algunas personas que aprecian el estudio son atléticas

Denotemos por P al conjunto de los profesores, por A al de las personas atléticas y por E al de las personas que aprecian el estudio. Entonces el silogismo anterior tiene la siguiente forma:

$$\begin{array}{ll} (1) & \exists x\ (x \in P \wedge x \in A) \\ (2) & \nexists x\ (x \in P \wedge x \notin E) \\ \hline (3) & \exists x\ (x \in E \wedge x \in A) \end{array}$$

O de manera equivalente:

$$\begin{array}{ll} (1) & P \cap A \neq \emptyset \\ (2) & P \cap E^c = \emptyset \\ \hline (3) & E \cap A \neq \emptyset \end{array}$$

Ya hemos dicho que $P \cap E^c = \emptyset$ es lógicamente equivalente a $P \subseteq E$. Por eso remplazaremos (2) por su equivalente que donotaremos por (2') (que se lee "dos prima"). Así obtenemos el siguiente silogismo.

$$\begin{array}{ll} (1) & P \cap A \neq \emptyset \\ (2') & P \subseteq E \\ \hline (3) & E \cap A \neq \emptyset \end{array}$$

Este razonamiento es válido. Pues por (2') sabemos que $P \subseteq E$ y por consiguiente $P \cap A \subseteq E \cap A$ (verifíquelo!). Por (1) sabemos que $P \cap A \neq \emptyset$. En consecuencia, $E \cap A \neq \emptyset$. □

Veamos un ejemplo de un silogismo inválido

Ejemplo 3.53. Considere el siguiente razonamiento:

(1)	Todos los venados son mamíferos
(2)	Algunos animales acuáticos son mamíferos
(3)	Algunos venados son animales acuáticos

Este razonamiento es inválido, pues las premisas son verdaderas y la conclusión es falsa. La forma general de este razonamiento inválido es la siguiente:

$$\begin{array}{ll} (1) & \forall x\,(x \in A \to x \in B) \\ (2) & \exists x\,(x \in C \land x \in B) \\ \hline (3) & \exists x\,(x \in C \land x \in A) \end{array}$$

Vemos en este ejemplo que la premisa (2) garantiza que existe un elemento, que denotaremos por a, en $C \cap B$. Pero **no** tenemos información que nos permita concluir que $a \in A$, pues la premisa (1) sólo dice que aquellos que estén en A también están en B. Es sencillo conseguir un contraejemplo, es decir, queremos tres conjuntos que satisfagan las premisas pero no la conclusión. Por ejemplo, tome $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$ y $C = \{2\}$.

□

Para concluir, veremos otro tipo de razonamientos, similar al silogismo categórico, pero que involucra más de 2 premisas (y por esto no son llamados silogismos).

Ejemplo 3.54. Considere el siguiente razonamiento:

$$\begin{array}{ll} (1) & \text{Todas las personas mentalmente maduras pueden entender la lógica} \\ (2) & \text{Ninguna persona mentalmente inmadura puede ser parte de un jurado} \\ (3) & \text{Ninguno de tus hijos puede entender la lógica} \\ \hline (4) & \text{Ninguno de tus hijos puede ser parte de un jurado} \end{array}$$

Denotaremos por M el conjunto de las personas mentalmente maduras, por L al de las personas que entienden la lógica, por H al conjunto de tus hijos y por J al de los que pueden ser parte de un jurado. El razonamiento anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ll} (1) & M \subseteq L \\ (2) & M^c \cap J = \emptyset \\ (3) & H \cap L = \emptyset \\ \hline (4) & H \cap J = \emptyset \end{array}$$

Reemplazando (2), (3) y (4) por fórmulas equivalentes obtenemos:

$$\begin{array}{ll} (1) & M \subseteq L \\ (2') & J \subseteq M \\ (3') & L \subseteq H^c \\ \hline (4') & J \subseteq H^c \end{array}$$

La justificación de la validez de este razonamiento es simplemente el hecho que la relación de subconjunto $\subseteq$ es transitiva. En efecto, ordenando las premisas de otra manera tenemos que $J \subseteq M$, $M \subseteq L$ y $L \subseteq H^c$. Por consiguiente, $J \subseteq H^c$. Finalmente, observemos que (4') es equivalente a $J \cap H = \emptyset$ que es lo que queríamos demostrar.

□

El lector interesado en profundizar el estudio de los silogismo categóricos puede consultar los libros [3] y [12].

Ejercicios 3.5

1. Imite lo hecho en el ejemplo 3.48 y traduzca las siguientes leyes sobre la equivalencia lógica en leyes del álgebra booleana.

   a) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

   b) $[(p \vee q) \rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)]$

   c) $[(p \wedge q) \rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)]$

2. Imite lo hecho en el ejemplo 3.49 y traduzca las siguientes leyes sobre la implicación lógica en leyes del álgebra booleana:

   a) $p \Rightarrow (p \vee q)$

   b) $(p \wedge q) \Rightarrow p$

   c) $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

   d) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$

3. Los ejercicios que presentaremos a continuación fueron tomados de [3] y [12]. Exprese los siguientes razonamientos usando el lenguaje de los cuantificadores y de los conjuntos. Determine si son válidos.

   a) Ningún músico es boxeador, todos los músicos son aficionados al arte; en consecuencia, ningún boxeador es aficionado al arte.

   b) Nadie que tenga como principal interés ganar las elecciones es un verdadero demócrata y todos los políticos activos son personas cuyo principal interés es ganar las elecciones; en consecuencia, ningún verdadero demócrata es un político activo.

   c) A todos los chivos jóvenes les gusta brincar. Ningún animal joven es saludable, a menos que le guste dar brincos. En consecuencia, todos los chivos jóvenes son saludables.

   d) Todos los ladrones son deshonestos. Algunas personas deshonestas son descubiertas. En consecuencia, algunos ladrones son descubiertos.

   e) Algunos mamíferos no son caballos porque ningún caballo es centauro y todos los centauros son mamíferos. (Suponga que el conjunto de los centauros no es vacío.)

   f) El azúcar es dulce. La sal no es dulce. Por lo tanto, la sal no es azúcar.

   g) Todas las águilas pueden volar. Algunos elefantes no pueden volar. En consecuencia, algunos elefantes no son águilas.

h) Todos los bebés son ilógicos. Nadie que sea despistado puede enfrentar un cocodrilo. Las personas ilógicas son despistadas. Por lo tanto, los bebés no pueden enfrentar cocodrilos.

i) Ningún pájaro, excepto los pavos reales, se siente orgulloso de su cola. Algunos pájaros, que se sienten orgullosos de sus colas, no pueden cantar. Por lo tanto, algunos pavos reales no pueden cantar.

j) Ninguna de las papas, excepto las últimas que compramos, han sido cocidas. Todas las papas que están en el plato están listas para comer. Ninguna papa cruda se puede comer. En consecuencia, algunas papas en el plato son de las últimas que compramos.

3.6. Demostraciones

Como dijéramos en la introducción, está fuera de los objetivos de este texto dar una definición precisa de lo que se entiende por "demostración". En esta sección haremos una aproximación a una definición de esta noción. Primero recordaremos brevemente algunos de los tipos de demostración vistos hasta ahora.

3.6.1. Afirmaciones condicionales

Ya hemos dicho que para demostrar una afirmación condicional $R \to Q$, lo usual es *suponer* que R se cumple y mostrar que Q también se cumple. El método descrito se llama una **demostración directa** de $P \to Q$. Un ejemplo típico de este tipo de demostración ocurre cuando queremos mostrar que un conjunto está contenido en otro. Es un buen ejercicio para el lector revisar de nuevo los resultados vistos y determinar cuáles demostraciones son de este tipo.

Ahora bien, también se puede demostrar una proposición condicional $R \to Q$ demostrando su contrarrecíproca $\neg Q \to \neg R$. Pues como vimos ellas son lógicamente equivalentes. En este caso, uno trataría de conseguir una demostración directa de $\neg Q \to \neg R$ suponiendo que $\neg Q$ se cumple y mostrando que $\neg R$ también se cumple.

¿Cómo podemos saber cuándo es más fácil mostrar la contrarrecíproca de una afirmación condicional que la afirmación misma? Esta pregunta podríamos incluirla en la lista de *las preguntas de las sesenta y cuatro mil lochas*[3]. No podemos ofrecer al lector una receta que permita decidir cuándo es conveniente demostrar la contrarrecíproca de una proposición condicional. Sin embargo, sí podemos aconsejarle que cada vez que quiera demostrar una proposición condicional y no vea cómo hacerlo, entonces enuncie la contrarrecíproca de la proposición que quiere demostrar e intente probarla. En muchos casos, la prueba de la contrarrecíproca es clara y transparente.

[3] Una locha es una moneda fuera de circulación que valía $\frac{1}{8}$ de un Bolívar.

3.6.2. Afirmaciones universales

Las afirmaciones universales son las que tienen la forma siguiente

$$\forall x \; P(x)$$

en la cual $P(x)$ significa que el elemento x tiene la propiedad P. Este tipo de proposiciones aparecieron con frecuencia al demostrar las propiedades de los conjuntos. Recordemos que normalmente, la demostración de una afirmación universal comienza con frase: *"Sea x un elemento arbitrario. Mostraremos que x tiene la propiedad P..."*

3.6.3. Demostraciones por reducción al absurdo

Otro tipo de demostraciones, que hasta ahora no hemos usado, son las que utilizan el llamado método de **reducción al absurdo**. Lo ilustraremos con un ejemplo.

Es fácil conseguir tres enteros consecutivos a, b, c que cumplan con la ecuación $a^2+b^2 = c^2$. Por ejemplo, $3^2 + 4^2 = 5^2$. Sin embargo, mostraremos que NO existen tres enteros consecutivos a, b, c que satisfagan la ecuación $a^3 + b^3 = c^3$.

Razonaremos indirectamente. Supondremos que existen enteros consecutivos a, b, c tales que $a^3 + b^3 = c^3$ y mostraremos que esto conduce a una contradicción.

Como los enteros a, b y c son consecutivos, entonces son de la forma $x - 1$, x y $x + 1$. Es decir, $a = x - 1$, $b = x$ y $c = x + 1$ para algún entero x. Nuestra suposición es que

$$(x - 1)^3 + x^3 = (x + 1)^3.$$

Efectuando las operaciones obtenemos

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$

Agrupando tenemos

$$2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$

Agrupando las potencias de x de un lado de la igualdad, obtenemos

$$x^3 - 6x^2 = 2.$$

Factorizando obtenemos

$$x^2(x - 6) = 2. \tag{3.22}$$

En particular, de esta última igualdad se concluye que el producto $x^2(x - 6)$ es positivo. Como x^2 es positivo, entonces $x - 6$ también lo es y por lo tanto $x - 6$ es mayor o igual que 1. Luego x es mayor o igual que 7 y así x^2 es mayor o igual que 49. Luego $x^2(x - 6)$ es mayor o igual que 49, lo cual contradice la igualdad (3.22). Digámoslo con precisión. Por una parte, a partir de las condiciones de nuestro problema junto con la negación de lo que queremos mostrar, hemos establecido la validez de la ecuación 3.22. Y por otra parte también hemos establecido que la ecuación 3.22 no puede ser válida. Esto es una contradicción.

El haber deducido una contradicción (a partir de la suposición de que si existían tres enteros a, b y c consecutivos tales que $a^3 + b^3 = c^3$) nos garantiza que la suposición inicial no puede ser verdadera. En consecuencia, tales enteros no existen y con esto hemos demostrado lo que queríamos[4].

En términos generales, si queremos demostrar de manera indirecta que P implica lógicamente a Q, lo que debemos hacer es motrar que a partir de $P \wedge \neg Q$ se deduce una contradicción. Pues en este caso es fácil convencerse de que $P \wedge \neg Q$ también es una contradicción y por consiguiente $\neg(P \wedge \neg Q)$ es una tautología. Es decir, $\neg P \vee Q$ es una tautología. Pero $P \rightarrow Q$ es lógicamente equivalente a $\neg P \vee Q$ y por lo tanto $P \rightarrow Q$ es una tautología. Esto último dice que $P \Rightarrow Q$.

Más adelante tendremos oportunidad de ver otros ejemplos en los que se usa el método de reducción al absurdo.

3.6.4. Demostraciones de igualdades

Ahora bien, no todas las demostraciones que hemos hecho han sido exactamente de alguno de los tipos descritos anteriormente. Pedimos al lector que vea de nuevo la demostración de la asociatividad de $\triangle$ dada en la sección 3.3.4. Nos referimos a la demostración de lo siguiente:

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

El lector observará que la demostración consistió en ir transformando la expresión $(A \triangle B) \triangle C$ (el lado izquierdo de la igualdad) hasta que se "convirtió" en $A \triangle (B \triangle C)$ (el lado derecho de la igualdad). En en el transcurso de esa demostración se usaron algunas de las leyes del álgebra de conjuntos (5a, 5b, 7b y 6a) y también un resultado que se había demostrado previamente (ejemplo 3.33). Las leyes del álgebra de conjuntos estipulan la igualdad de algunos conjuntos. Algunas demostraciones como la mencionada arriba consisten en usar esas igualdades para ir paso a paso transformando una expresión en otra. En cada paso, la regla básica es que uno puede sustituir una expresión por cualquier otra que sea igual a ella (*"sustituir iguales por iguales"*). Este tipo de argumentos es muy frecuente en el contexto del álgebra.

3.6.5. Resumen

Las demostraciones son similares a las deducciones o derivaciones que vimos en el contexto del cálculo proposicional. Podemos decir que una demostración de una afirmación P consiste de una sucesión de afirmaciones $P_1, P_2, \cdots, P_n$ tales que cada afirmación P_i se

[4]Es natural preguntarse si es imprescindible razonar indirectamente. El lector interesado puede tratar de hacerlo directamente. Muestre que si $x^3 + (x+1)^3 = (x+2)^3$, entonces lo mismo ocurre si en lugar de x colocamos $x - 1$. Ahora reflexione si este hecho es suficiente para justificar la afirmación.

deduce de las anteriores usando algún razonamiento válido y además la última de ellas, P_n, debe ser la afirmación P que se quería demostrar. Las proposiciones $P_1, \cdots, P_{n-1}$ se llaman las premisas y P_n se llama la conclusión. Las premisas pueden ser resultados ya demostrados anteriormente o proposiciones que se deducen de las definiciones básicas de la teoría de conjuntos (es decir, de la relación $\in$, conjunto potencia, $\subseteq$, etc.). Ahora bien, cuando decimos que se "deducen" de las anteriores queremos decir que

$$P_1 \wedge\ P_2\ \wedge \cdots \wedge P_i\ \Rightarrow\ P_{i+1}$$

En otras palabras, la proposición P_{i+1} es una consecuencia lógica de las proposiciones ya demostradas.

Insistimos en que esto no es una definición precisa de la noción de demostración. En el curso de la lectura de estas notas el lector estudiará muchas demostraciones de resultados muy variados que le ayudarán a formarse una idea más precisa de lo que se entiende por demostración; y algo aún más importante, irá aprendiendo a cómo hacerlas y cómo escribirlas para que otros las entiendan.

Es común en los textos de Matemáticas indicar el comienzo y el final de las demostraciones de la siguiente manera: *Demostración.......*$\Box$. De ahora en adelante lo haremos así. Otra costumbre es llamar **Teorema** a las proposiciones que se demuestran.

CAPÍTULO 4

EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

En este capítulo estudiaremos el **principio de inducción matemática**. En él se basa una herramienta fundamental en matemáticas: las demostraciones por indución. El principio de inducción permite establecer leyes universales acerca de los números naturales. Por ejemplo, considere la siguiente afirmación:

$$n < 2^n \text{ para todo número natural } n. \tag{4.1}$$

Sin mucho esfuerzo se verifica que esta afirmación es válida cuando n toma cualquiera de los valores $0, 1, 2$ o 3 y el lector podría, con un poco de paciencia, verificarla para muchos otros valores de n. Sin embargo, esto no justifica que esa afirmación sea verdadera. La herramienta usada para demostrar afirmaciones como la enunciada en (4.1) y otras similares será estudiada en este capítulo.

4.1. El principio de buena ordenación

En esta sección estudiaremos una propiedad esencial del orden de los números naturales. Consideremos los siguientes conjuntos de números naturales:

1. $C_1 = \{1, 2, 3\}$.
2. $C_2 = \{11, 12, 13, 14\}$.
3. $C_3 = \{0, 2, 4, 6, 8, \cdots\}$, es decir, C_3 es el conjunto de todos los números pares.
4. $C_4 = \{21, 22, 23, 24, 25, \cdots\}$, es decir, C_4 es el conjunto de todos los números naturales mayores que 20.

Estos cuatro conjuntos tienen en común que todos ellos tiene un primer elemento. Por ejemplo: 21 es el primer elemento de C_4, 11 es primero de C_2.

Sea C un conjunto de números naturales, diremos que m es el **mínimo** de C si se verifican las dos condiciones siguientes:

(i) $m \in C$.
(ii) Si $n \in C$, entonces $m \leq n$.

Notemos que todo conjunto tiene a lo sumo un elemento mínimo. Pues si m y l son dos elementos que verifican las condiciones (i) y (ii), se tendría que $m, l \in C$ y además, por la condición (ii), se tendría que $l \leq m$ y $m \leq l$. Por lo tanto, $m = l$.

La propiedad que observamos en los conjuntos C_1, C_2, C_3 y C_4 es válida para todos los subconjuntos (no vacíos) de $\mathbb{N}$. Esta propiedad es de tanta importancia que le daremos un nombre propio:

Principio de buena ordenación: *Todo conjunto no vacío de números naturales tiene un elemento mínimo.*

Este principio no se puede deducir de las propiedades algebraicas de los números naturales (aquellas que se refieren a las operaciones de suma y multiplicación) o de las propiedades elementales de los conjuntos (álgebra booleana).

El concepto de elemento mínimo de un conjunto también está definido para subconjuntos arbitrarios de números, no necesariamente números naturales. Sin embargo, es muy importante observar que si el conjunto en cuestión no es un subconjunto de $\mathbb{N}$, no es cierto en general que el conjunto tenga un elemento mínimo. Esto lo ilustramos en los ejemplos que presentamos a continuación.

Ejemplos 4.1.

1. Considere el conjunto $\mathbb{Z}$ de todos los números enteros. Es fácil convencerse de que $\mathbb{Z}$ no tiene un elemento mínimo, pues dado cualquier entero m tenemos que $m-1 < m$ y $m-1$ también es un entero.

2. Considere el siguiente conjunto de números racionales
$$C = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}.$$
C no tiene mínimo. ¿Como podríamos verificar esta afirmación? Basta mostrar que para cualquier elemento de C existe otro elemento de C menor que él. Sea $x \in C$ cualquiera, entonces x debe ser igual a $\frac{1}{n}$ para algún número natural $n > 0$. Como $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ y $\frac{1}{n+1}$ también pertenece a C, entonces $\frac{1}{n}$ no es el mínimo de C.

3. Por supuesto que algunos subconjuntos de $\mathbb{Q}$ (o de $\mathbb{Z}$) sí tienen primer elemento. Por ejemplo, $\{\frac{2}{3}, \frac{4}{15}, \frac{5}{7}\}$ tiene primer elemento ¿Cuál es? Lo importante acerca del principio de buena ordenación es que asegura que **cualquier** subconjunto de $\mathbb{N}$ (no vacío) tiene primer elemento.

4. Considere el conjunto
$$C = \{x \in \mathbb{Q} : \ 3 < x\}.$$
Este conjunto no tiene un elemento mínimo. Pues dado cualquier número $x \in C$, veremos que existe otro $y \in C$ con $y < x$. En efecto, considere $y = \frac{x+3}{2}$. Es claro que y es un racional (¿por qué?). Mostraremos que $y \in C$ y además que $y < x$. En efecto, notemos que
$$y - 3 = \frac{x+3}{2} - 3 = \frac{x-3}{2}.$$
Como $x > 3$, entonces $x - 3 > 0$. De esto se concluye que $y - 3 > 0$, es decir $y > 3$ y por lo tanto $y \in C$. De igual forma tenemos que $y < x$: Pues $x - y = x - \frac{x+3}{2} = \frac{x-3}{2}$ y de aquí , al igual que antes, concluimos que $x - y > 0$ y por lo tanto $x > y$.

$\square$

Lo que hace tan importante al principio de buena ordenación es que se refiere a **cualquier** subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, sin importar la manera usada para definir el conjunto. Los siguientes dos ejemplos ilustran lo que acabamos de decir.

Ejemplo 4.2. Considere la siguiente situación. Supongamos que hacemos un experimento en que participan los estudiantes de la Facultad de Ciencias. Cada estudiante lanza una moneda 100 veces y anota el número de veces que salió “cara”. Definimos el siguiente conjunto
$$C = \{n \in \mathbb{N} : \ n \text{ es el número de veces que obtuvo “cara” alguno de los estudiantes}\}$$
Es claro que $C \subseteq \{0, 1, 2, \cdots, 100\}$ y además que C no es vacío. El principio de buena ordenación nos dice que C debe tener un primer elemento, es decir, que al menos uno de los estudiantes obtuvo el menor número de “caras”. Si en lugar de lanzar la moneda 100 veces lo hicieran 1000 veces, el conjunto correspondiente tendrá un mínimo. El principio del mínimo entero puede parecer bastante obvio en este ejemplo particular, sin embargo, es precisamente la generalidad con que se enuncia lo que hace de él un principio fundamental en Matemáticas. $\square$

Ejemplo 4.3. Usaremos el principio de buena ordenación para mostrar que existe un primer número natural n que cumple con la siguiente condición:
$$1^n + 2^n + \cdots + 99^n < (100)^n. \tag{4.2}$$
Considere el conjunto
$$C = \{n \in \mathbb{N} : \ 1^n + 2^n + \cdots + 99^n < (100)^n\}.$$
Es fácil ver que $1 \notin C$, pues $1 + 2 + \cdots + 99 > 100$. También tenemos que $2 \notin C$, pues $99^2 = 9801$, $98^2 = 9604$ y $9801 + 9604 = 19405$; y por otra parte, $100^2 = 10.000$. El principio de buena ordenación nos dice que en caso que C no sea vacío, entonces debe tener un elemento mínimo. Observemos que el mínimo de C es precisamente el menor número natural que satisface la desigualdad (4.2).

Bastaría entonces que mostráramos que $C \neq \emptyset$. Notemos que los números que estamos sumando en el lado izquierdo de (4.2) son todos menores o iguales que 99^n. Por eso tenemos que

$$1^n + 2^n + \cdots + 99^n \leq 99(99)^n.$$

Es suficiente entonces conseguir un natural n tal que

$$99(99)^n < (100)^n.$$

Pues en este caso, n también cumpliría (4.2). El problema ahora consiste en conseguir un natural n tal que $99 < (\frac{100}{99})^n$. Usando una calculadora de mano se puede verificar que

$$99 < \left(\frac{100}{99}\right)^{458}$$

Por lo tanto, $458 \in C$ y en consecuencia $C \neq \emptyset$.

Ya que hemos mostrado que C no es vacío, entonces debe tener un elemento mínimo. Observe que no estamos afirmando que 458 sea el mínimo de C, sólo podemos asegurar que el mínimo de C es menor o igual a 458. ¿Cuál es el menor elemento de C? El principio de buena ordenación no nos ayuda a conseguir el número buscado, sólo nos asegura que existe.

□

4.1.1. Máximo de un conjunto

El principio de buena ordenación se refiere al primer elemento de un conjunto de números naturales. Ahora veremos qué podemos decir acerca del último elemento de un conjunto. Se dice que m es el **máximo** (o último elemento) de un conjunto $C \subseteq \mathbb{N}$ si se cumplen las dos condiciones siguientes:

(i) $m \in C$.
(ii) Todo elemento de C es menor o igual que m.

Observe la analogía entre estas dos condiciones y las que definen el mínimo de un conjunto. Como ya hemos visto, un conjunto de números naturales puede no tener un máximo, por ejemplo, $\mathbb{N}$ no tiene máximo, ¿que otro ejemplo conoce el lector?

Hay dos conceptos relacionados con los conceptos de máximo y mínimo que introducimos a continuación.

Diremos que un conjunto C de números naturales es **acotado superiormente** si existe un número natural p tal que todo elemento de C es menor o igual que p; en este caso decimos que p es una **cota superior** de C. Notemos que decir que p es una cota superior de C, es equivalente a decir que se cumple lo siguiente:

$$C \subseteq \{0, 1, 2, \cdots, p\}.$$

Haremos dos observaciones útiles sobre las cotas y los conjuntos acotados superiormente.

(i) Si m es el máximo de un conjunto C, entonces m es una cota superior de C.

(ii) Si un conjunto tiene una cota superior, entonces tiene muchas cotas superiores. Pues si p es una cota superior de C, es fácil verificar que $p+1$, $p+2$, etc., también son cotas superiores de C.

Los siguiente ejemplos ilustrarán mejor el concepto de cota superior.

Ejemplos 4.4.

1. Consideremos el conjunto $\{11, 12, 13, 14\}$. Es claro que 14,15, 16, etc., son cotas superiores de este conjunto. Además 14 es el máximo de este conjunto. Es importante no confundir el concepto de cota superior con el de máximo. Observe que existen muchas cotas superiores pero sólo una de ellas puede ser el máximo.

2. Sea C el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : n < 24\}$. De la definición de C se ve que 24 es una cota superior de C. Pero también 23,25, 26, etc. son cotas superiores. Pero 22 no es cota superior, pues existe un elemento de C mayor que 22 (¿cuál?). Es claro que 23 es el máximo de C.

3. El conjunto $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ es múltiplo de } 15\}$ no es acotado superiormente. Para mostrarlo basta ver que cualquier natural que tomemos es menor que algún elemento de este conjunto. En efecto, sea m un natural mayor que 1. Entonces $m < 15m$, y $15m$ pertenece al conjunto. Por lo tanto m no es una cota superior de ese conjunto.

4. El concepto de conjunto acotado superiormente también tiene sentido para conjuntos de números no necesariamente naturales. Por ejemplo, sea $C = \{x \in \mathbb{Q} : x < 4\}$. De la propia definición de C vemos que 4 es una cota superior. De hecho, cualquier número racional mayor que 4 también es una cota superior de C. Sin embargo, C no tiene máximo (le dejamos al lector la tarea de mostrarlo siguiendo un razonamiento similar al usado en el ejemplo 4.1).

Ejemplo 4.5. Considere el conjunto

$$C = \{n \in \mathbb{N} : \; n^2 \text{ divide a } 397.902.050\}.$$

Dar una lista de todos los elementos de C no es del todo fácil. Por ejemplo, $1 \in C$, $2 \notin C$ (aunque 2 divide a 397.902.050), $3 \notin C$, $4 \notin C$, $5 \in C$ (¡verifíquelo!). Así que no podemos determinar por inspección si C tiene o no un elemento máximo. Sin embargo, sí podemos mostrar que todos los elementos de C son menores que 397.902.050. En efecto, de la definición del conjunto C tenemos que para cada $n \in C$, se cumple que $n^2 \leq 397.902.050$. Como $n \geq 1$, entonces $n \leq n^2$. Luego, necesariamente $n \leq 397.902.050$. En otras palabras, 397.902.050 es una cota superior de C. Ya observamos anteriormente que esto significa que

$$C \subseteq \{1, 2, 3, \cdots, 397.902.050\}.$$

Por eso es bastante natural sospechar que C sí debe tener un elemento máximo. Es claro que 397.902.050 no es el máximo, pues no pertenece a C. Si 397.902.049 estuviera en C, él sería el máximo de C. Si 397.902.049 no está en C, entonces 397.902.048 podría ser el máximo,...etc. De esta manera continuamos descendiendo (con mucha paciencia) hasta que nos topemos por primera vez con un elemento de C; ese número es el máximo de C (!). □

Los ejemplos anteriores sugieren que $\mathbb{N}$ tiene la siguiente propiedad: todo conjunto (no vacío) de números naturales que admita una cota superior, necesariamente tiene un elemento máximo. Uno estaría tentado a tomar esta propiedad como un nuevo principio acerca de $\mathbb{N}$, al igual que se hizo con el principio de buena ordenación. Sin embargo, no hace falta hacerlo, pues como veremos a continuación se puede deducir lógicamente del principio de buena ordenación.

Teorema 4.6. *Todo conjunto no vacío de números naturales que sea acotado superiormente tiene un máximo.*

Demostración: Sea C un subconjunto de números naturales no vacío y acotado superiormente. Considere el siguiente conjunto

$$A = \{n : \ n \text{ es una cota superior para } C\}.$$

Nuestra hipótesis dice simplemente que A no es vacío. Luego, por el principio de buena ordenación, A tiene un elemento mínimo. Sea m el mínimo de A. Mostraremos que m es el máximo de C. Como m pertenece a A, entonces m es una cota superior para C, es decir, todo elemento de C es menor o igual que m. Así que nos queda sólo por mostrar que m pertenece a C. Haremos la prueba por reducción al absurdo. Supondremos que $m \notin C$ y veremos que eso conduce a una contradicción. Ya que suponemos que $m \notin C$ y a la vez sabemos que m es una cota superior de C, entonces podemos concluir que $n < m$ para todo $n \in C$. Por lo tanto, para todo $n \in C$ se tiene que $n \leq m - 1$. Esto dice que $m - 1$ es una cota para C, es decir, que $m - 1 \in A$, pero eso contradice que m es el mínimo de A. Esta contradicción vino de suponer que m no pertenecía a C. Por lo tanto $m \in C$ y con esto termina la demostración. □

Veamos con ejemplos lo que se hizo en la demostración del teorema anterior:

1. Sea $C = \{1, 5, 9, 24\}$. C es acotado y es obvio que 24 es el máximo de C. El conjunto A de todas las cotas de C (que usamos en la demostración anterior) consta de todos los números naturales mayores o iguales a 24, es decir, $A = \{24, 25, 26, 27, 28, \cdots, \}$. El mínimo de A es 24 y es precisamente el máximo de C.

2. Supongamos que nuestro conjunto C es ahora aquel que encontramos en el Ejemplo 4.4
$$C = \{n \in \mathbb{N} : \ n^2 \text{ divide a } 397.902.050\}.$$
Ya dimos un argumento que muestra que 397.902.050 es una cota superior de C. El conjunto A, usado en la demostración anterior, es en este caso el conjunto $\{n : n$ es una cota superior de $C\}$. La demostración del teorema 4.6 garantiza que el mínimo de A es precisamente el máximo de C. ¡Esto no nos dice gran cosa! ¿Cuál será el máximo de C?

A continuación daremos una definición que será necesaria para responder algunos de los ejercicios de esta sección.

Definición 4.7. *Sea C es un conjunto de números (pueden ser naturales, enteros, racionales o reales) diremos que*

1. *p es una **cota superior** para C si todo elemento de C es menor o igual a p.*
2. *p es el **máximo** de C si $p \in C$ y todo elemento de C es menor o igual a p*
3. *q es una **cota inferior** para C si todo elemento de C es mayor o igual a q.*
4. *q es el **mínimo** de C si $q \in C$ y todo elemento de C es mayor o igual a q.*

Ejercicios 4.1

1. Considere los siguientes conjuntos de números. Lea las definiciones dadas en 4.7. En cada caso, determine si el conjunto es acotado superior o inferiormente y si tiene máximo o mínimo. En el caso que el conjunto tenga máximo y/o mínimo, determínelos. Justifique su respuesta.

   (a) $\{3, 2, 26, 5, 1, 0\}$
   (b) $\{n^2 : \ n \in \mathbb{N}\}$
   (c) $\{x \in \mathbb{N} : 4 < x \leq 6\}$
   (d) $\{x \in \mathbb{Q} : 4 < x \leq 6\}$
   (e) $\{5n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$
   (f) $\{3n + 2 : n \in \mathbb{Z}\}$
   (g) $\{n \in \mathbb{Z} : n < 0\}$
   (h) $\{\frac{n}{2n+1} : n = 0, 1, 2, 3\}$
   (i) $\{2 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$
   (j) $\{\frac{1}{n+1} : \ n \in \mathbb{N}\}$
   (k) $\{7 - \frac{1}{2n} : \ n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq 1\}$

2. Determine si el siguiente conjunto tiene mínimo y/o máximo

$$\{n \in \mathbb{N} : 13 \leq n \text{ y } n \text{ divide a } 82.861\}.$$

   Justifique su respuesta. No necesita hallar el mínimo ni el máximo (en caso que existieran).

3. Determine si el siguiente conjunto tiene mínimo y/o máximo

$$\{n : \ n \text{ es el número de cédula de algún estudiante de la UIS}\}$$

   Justifique su respuesta.

4. Determine si el siguiente conjunto tiene mínimo.

$$C = \{n \in \mathbb{N} : \; 1^n + 2^n + 3^n + 4^n < 5^n\}.$$

¿Puede decir cuál es el mínimo? (*Sugerencia:* Vea lo hecho en el ejemplo 4.3).

5. Determine si los siguientes conjuntos tienen máximo. En caso afirmativo, halle el máximo y compruebe que en realidad lo es.

   a) $\{n \in \mathbb{N} : \; n^2 \text{ divide a } 240\}$

   b) $\{n \in \mathbb{N} : \; n^2 \text{ divide a } 44.100\}$

   (*Sugerencia:* Halle la descomposición en factores primos de 240 y de 44.100).

6. ¿Cuál es el máximo de $\{n \in \mathbb{N} : \; n^2 \text{ divide a } 397.902.050\}$?

7. En cada uno de los ejercicios que siguen determine si el conjunto indicado tiene mínimo y/o máximo.

   a) $A = \{x \in \mathbb{N} : \; x = n + 3 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$.

   b) $A = \{x \in \mathbb{N} : \; x = 2n + 1 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$.

   c) $A = \{x \in \mathbb{N} : \; x = 4\}$.

   d) $A = \{x \in \mathbb{N} : \; x = 6 + (-1)^n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$.

   e) $A = \{x \in \mathbb{N} : \; x = 40\} \cup \{x \in \mathbb{N} : x = n + 30 \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 \leq n \leq 20\}$.

8. Considere el siguiente conjunto

$$C = \{n \in \mathbb{N} : \; n^5 + 3 \leq 10000\}.$$

Halle (si es posible) 3 elementos del conjunto C y determine si C tiene mínimo y/o máximo.

9. Responda las mismas preguntas que en el ejercicio anterior para cada una de los conjuntos indicados.

   a) $\{n \in \mathbb{N} : \; 5 + \frac{1}{n+1} < \frac{5002}{1000}\}$.

   b) $\{n \in \mathbb{N} : \; 7 - \frac{1}{n} > \frac{6927}{1000}\}$.

10. Sean n, m dos naturales. Considere el siguiente conjunto de naturales.

$$A = \{k \in \mathbb{N} : \; k \text{ divide tanto a } n \text{ como a } m\}.$$

Muestre que A es finito. El máximo de A es el *máximo común divisor de n y m*.

4.2. Sucesiones

Las funciones[1] que tienen dominio $\mathbb{N}$ se usan con mucha frecuencia en Matemáticas y reciben un nombre especial: **sucesiones**. Una sucesión sobre un conjunto A es una regla que asigna a cada número natural un elemento de A.

Ejemplos 4.8. 1. Consideremos la sucesión de todos los números pares.

$$0, 2, 4, 6, 8, \cdots,$$

La regla de asignación para obtener sucesión es $n \mapsto 2n$.

2. Consideremos la colección de números racionales de la forma $\frac{1}{2^n}$ donde $n \in \mathbb{N}$:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots,$$

Esta sucesión viene dada por la regla de correspondencia $n \mapsto \frac{1}{2^n}$.

□

Las sucesiones son una lista etiquetada de objetos en que las etiquetas son los números naturales. Es usual denotar las etiquetas con **subíndices**. Vistas de este modo, las sucesiones se escriben de la siguiente forma

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots \tag{4.3}$$

donde a_0 indica el primer elemento de la sucesión, es decir, el elemento que se asigna al cero, a_1 es el segundo elemento de la sucesión, etc. En general, a_n es el elemento asignado a n. La sucesión completa la representamos con $(a_n)_n$. Es usual llamar a_n el **término general** de la sucesión $(a_n)_n$.

Ejemplos 4.9. 1. Asignando al número 0 el 3, al 1 el 4, al 2 el 5, y en general al n el $n+3$, obtenemos

$$3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ \cdots$$

El término general de una sucesión viene dado por la regla $a_n = n + 3$ para $n \geq 0$.

2. Asignando a todo número natural un mismo número, por ejemplo, el número 3, obtenemos la sucesión

$$3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots,$$

donde $a_0 = 3$, $a_1 = 3$, $a_2 = 3$, y en general $a_n = 3$. Se dice en este caso que la *sucesión es constante.*

□

[1]Entienda el lector la noción de función de manera intuitiva: Una regla que le asigna a cada natural n un elemento del conjunto A. El concepto de función lo estudiaremos mas adelante de manera precisa.

Para definir una sucesión es necesario indicar la manera en que se asigna a cada número natural el correspondiente elemento de la sucesión. Por ejemplo, si decimos que $a_n = n^2$, queda completamente determinada la sucesión: $0, 1, 4, 9, 16, 25, \cdots$.

La notación para sucesiones varía según el contexto. De hecho, es muy frecuente que las sucesiones se presenten como listas indizadas donde los subíndices comienzan en el 1 en lugar del 0. Es decir,

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$$

Cada vez que usemos sucesiones dejaremos bien claro cuál es el conjunto de índices que estamos usando. En la sección que sigue veremos que la elección del conjunto de índices no es en realidad importante. La letra usada para los subíndices no tiene que ser necesariamente la letra n, también escribiremos $(a_i)_i$, $(a_k)_k$ o $(a_m)_m$.

4.2.1. Sucesiones equivalentes

Consideremos la sucesión cuyo término general a_n viene dado por

$$a_n = 2n + 1$$

para $n \geq 0$. Es decir, la sucesión a_n es

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \cdots,$$

la cual corresponde a la sucesión de todos los números impares. También podemos representar esta sucesión usando índices en los naturales positivos. Pongamos

$$b_n = 2n - 1$$

para $n \geq 1$. El lector puede verificar que $b_1 = 1$, $b_2 = 3$, $b_3 = 5$, etc. Es decir, las sucesiones $(a_n)_{n\geq 0}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ en "realidad son la misma" (aunque formalmente son diferentes, pues no usan el mismo conjunto de índices). En este caso diremos que estas dos sucesiones son **equivalentes**. En otras palabras, dos sucesiones son equivalentes si sus primeros elementos son iguales, sus segundos elementos son iguales,... etc. Podemos dar una regla que "traduce" los índices de una sucesión en los correspondientes índices de la otra sucesión. En efecto, observemos que

$$b_1 = a_0, b_2 = a_1, b_3 = a_2, b_4 = a_3.$$

Vemos entonces que

$$b_{n+1} = a_n \ \text{ para todo } n \geq 0.$$

pues $b_{n+1} = 2(n + 1) - 1 = 2n + 1 = a_n$.

Ejemplos 4.10. 1. Considere la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ dada por $a_n = 3n + 1$ para $n \geq 1$. Los primeros términos de esta sucesión son

$$a_1 = 4, a_2 = 7, a_3 = 10, a_4 = 13.$$

Queremos representar esta sucesión usando como índices todos los naturales. Es decir, queremos una sucesión $(b_n)_{n\geq 0}$ tal que $b_0 = 4$, $b_1 = 7$, $b_2 = 10$, etc. Tomemos $b_n = 3(n+1)+1 = 3n+4$ para $n \geq 0$. La sucesión b_n satisface lo deseado, pues se cumple que $b_n = a_{n+1}$ para $n \geq 0$ y esto dice que $b_0 = a_1$, $b_1 = a_2$, etc. Por lo tanto, $(b_n)_{n\geq 0}$ y $(a_n)_{n\geq 1}$ son sucesiones equivalentes.

2. Otros subconjuntos de $\mathbb{N}$ pueden usarse como conjunto de índices. Por ejemplo, la sucesión del ejemplo anterior también podemos darla con la siguiente regla

$$c_n = 3n - 11 \text{ para } n \geq 5.$$

En efecto, observemos que $c_n = 3(n-4)+1 = a_{n-4}$ para cada $n \geq 5$. Así que $c_5 = 4 = a_1$, $c_6 = 7 = a_2$, $c_7 = 10 = a_3$, etc. Por lo tanto, $(c_n)_{n\geq 5}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ y $(a_n)_{n\geq 1}$ son sucesiones equivalentes.

3. Considere las sucesiones $(a_n)_n$ dada por $a_n = 5n-2$ para $n \geq 1$ y $(b_n)_n$ dada por $b_n = 5n - 17$ para $n \geq 4$ ¿Serán equivalentes? Calculemos los primeros términos de estas sucesiones

$$a_1 = 3, a_2 = 8, a_3 = 13, a_4 = 18$$

$$b_4 = 3, b_5 = 8, b_6 = 13, b_7 = 18.$$

Verifiquemos que estas dos sucesiones son equivalentes. En efecto, se tiene que $b_n = a_{n-3}$ para $n \geq 4$.

4. Sean $(a_n)_n$ dada por $a_n = 5n+2$ para $n \geq 0$ y $(b_n)_n$ dada por $b_n = 5n-8$ para $n \geq 3$ ¿Serán equivalentes? Notemos que el primer elemento de a_n es $a_0 = 5\cdot 0 + 2 = 2$, en cambio el primer elemento de b_n es $b_3 = 5 \cdot 3 - 8 = 7$. Por lo tanto no son equivalentes.

□

4.2.2. Sucesiones finitas

En lugar de asignar un número a todo natural n, como en (4.3), podemos asignarle sólo a un subconjunto finito de naturales. Por ejemplo, solo asignamos algo al $0, 1$ y al 2 y asi obtenemos una sucesión de tres elementos

$$a_0, a_1, a_2.$$

En general, indicaremos con

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$$

una **sucesión finita** de $n+1$ elementos. Observe que en un conjunto el orden en que se escriban los elementos no es importante, por ejemplo, el conjunto $\{3, 8, 56, 67\}$ también puede ser expresado como $\{67, 3, 56, 8\}$. Pero en una sucesión el orden sí se toma en cuenta.

4.2.3. Sumatorias y productorias

Introduciremos una notación muy útil para representar las sumas de los elementos de una sucesión $(a_i)_i$. Usaremos la letra griega Σ (que se lee "sigma") para denotar una suma. Sea $(a_i)_{i\geq 1}$ una sucesión de números. Definimos

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \tag{4.4}$$

Este símbolo se lee "la sumatoria de a_i desde i igual a 1 hasta n". Por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = a_1 + a_2 + a_3.$$

Aunque parezca quizá inútil, el caso n igual a 1 también está permitido, y se tendría que

$$\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1.$$

Ejemplo 4.11. Considere la sucesión a_i dada por $a_i = i + 1$ para $i \geq 1$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{4} (i+1) = (1+1) + (2+1) + (3+1) + (4+1) = 14.$$

□

Ejemplo 4.12. Considere la sucesión constante $a_i = 1$ para $i \geq 0$. Tenemos que

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 1 + 1 = 3.$$

En general tenemos lo siguiente

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = n.$$

Notemos que si empezamos en $i = 0$ tenemos un sumando más y por lo tanto el resultado es

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = n + 1.$$

□

También tenemos una notación similar para los productos. Usaremos la letra griega Π (se lee "pi").

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n. \tag{4.5}$$

Este símbolo se lee "el producto de a_i desde i igual a 1 hasta n" (también se dice "la productoria" en analogía con el símbolo de suma). Por ejemplo,

$$\prod_{i=1}^{4} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4.$$

Ejemplo 4.13. Considere la sucesión a_i dada para $a_i = i + 1$ para $i \geq 1$. Entonces

$$\prod_{i=1}^{3} (i+1) = (1+1) \cdot (2+1) \cdot (3+1) = 24.$$

□

El caso particular cuando a_i es igual a i nos da la definición del **factorial** de un número natural $n \geq 1$. Más precisamente, el factorial de n, denotado por $n!$, se define de la siguiente manera:

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1) \cdot n.$$

Por convención $0! = 1$. Por ejemplo,

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

La sucesión de factoriales $a_n = n!$ crece muy rápidamente como veremos más adelante. El símbolo fué introducido por el matemático Alemán Christian Kramp en 1808 y muestra el asombro que le causó observar los números tan grandes que se obtienen. Por ejemplo,

$$20! = 2.432.902.008.176.640.000.$$

El número 1.000.000! tiene 5.565.709 cifras. En la tabla que sigue mostraremos los primeros términos de las sucesiones 2^n y $n!$. Mostraremos más adelante que $2^n < n!$ para $n \geq 4$.

n	2^n	$n!$
0	1	1
1	2	1
2	4	2
3	8	6
4	16	24
5	32	120
6	64	720
7	128	5.040
8	256	40.320
9	512	362.880
10	1.024	3.628.800

Ejercicios 4.2

1. En cada uno de los siguientes ejercicios determine una sucesión $(b_n)_n$ que sea equivalente a $(a_n)_n$.
   a) $(a_n)_n$ dada por $a_n = 4n$ para $n \geq 0$. Hallar $(b_n)_{n\geq 1}$.
   b) $(a_n)_n$ dada por $a_n = 4n$ para $n \geq 0$. Hallar $(b_n)_{n\geq 6}$.
   c) $(a_n)_n$ dada por $a_n = 7n + 3$ para $n \geq 1$. Hallar $(b_n)_{n\geq 3}$.
   d) $(a_n)_n$ dada por $a_n = n^2$ para $n \geq 1$. Hallar $(b_n)_{n\geq 0}$.
2. Determinar si las siguientes sucesiones son equivalentes.
   a) $(a_n)_n$ dada por $a_n = 6n + 3$ para $n \geq 0$ y $(b_n)_n$ dada por $b_n = 6n - 15$ para $n \geq 3$.
   b) $(a_n)_n$ dada por $a_n = 2n^2$ para $n \geq 1$ y $(b_n)_n$ dada por $b_n = 2n^2 - 16n + 32$ para $n \geq 5$.
   c) $(a_n)_n$ dada por $a_n = 3n + 2$ para $n \geq 0$ y $(b_n)_n$ dada por $b_n = 3n - 8$ para $n \geq 3$.
3. Para cada una de las sucesiones que se indican determinar el valor de $\sum_{i=1}^n a_i$ y $\prod_{i=1}^n a_i$.
   a) $a_i = i$ y $n = 4$.
   b) $a_i = i^2$ y $n = 3$.
   c) $a_i = 3i + 2$ y $n = 4$.
   d) $a_i = i^3$ y $n = 4$.
   e) $a_i = i^5$ y $n = 1$.
   f) $a_i = 3$ y $n = 1$.
4. Efectúe las siguientes operaciones:

$$(a)\ \sum_{i=4}^{7}(i+3) \qquad (b)\ \sum_{i=2}^{6}(3i-1) \qquad (c)\ \sum_{i=2}^{6} i^2$$

$$(d)\ \sum_{i=2}^{6}\frac{1}{i} \qquad (e)\ \prod_{i=2}^{5}(2i+1) \qquad (f)\ \prod_{i=3}^{5} i^2$$

$$(g)\ \prod_{i=2}^{6}\frac{1}{i} \qquad (h)\ \prod_{i=2}^{7}(-1)^i \qquad (i)\ \prod_{i=2}^{8}(-1)^i$$

$$(j)\ \sum_{i=2}^{8}5 \qquad (k)\ \sum_{i=3}^{8}2 \qquad (l)\ \sum_{i=6}^{10}2$$

4.3. El principio de inducción

Supongamos que varias personas, paradas en una fila, están enumeradas como se indica a continuación

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \cdots$$

Supongamos además que cada una de ellas, al recibir un mensaje lo trasmite a la persona que está en la fila inmediatamente después de ella. Es decir, si la persona que ocupa el primer lugar de la fila (la persona denotada con P_0) recibiera el mensaje, lo trasmitiría a la persona en el segundo lugar (es decir, a P_1); la que está en el segundo lugar (es decir P_1) lo trasmitiría a la que está en el tercer lugar (es decir a P_2); y así sucesivamente, la que está en el lugar n-ésimo (es decir P_{n-1}) lo trasmitiría a la que está en el lugar $n+1$-ésimo (es decir a P_n). Vemos entonces que si la persona en el primer lugar de la fila (es decir, P_0) recibe el mensaje; necesariamente, todas las personas en la fila lo recibirán (imagine lo que pasaría en la fila del comedor cuando la primera persona en la fila se entera que se acabó la comida!).

Denotaremos por A al conjunto de todos los naturales n tales que la persona P_n recibió el mensaje. En símbolos,

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \ P_n \text{ recibió el mensaje}\}.$$

Estamos suponiendo dos cosas. Primero, que P_0 recibió el mensaje, es decir que $0 \in A$. Y además, que si P_n recibe el mensaje, entonces lo trasmite a P_{n+1}. En otras palabras, el conjunto A satisface las siguientes dos condiciones

(i) $0 \in A$.

(ii) Si $k \in A$, entonces $k+1 \in A$.

El principio de inducción nos asegura que A tiene que ser igual a $\mathbb{N}$. Es decir, todas las personas en la fila reciben el mensaje.

Lo que sucede en esta situación hipotética es análogo a lo que se conoce como el *efecto dominó*. Probablemente, el lector ha visto esos arreglos de las piezas del dominó en los cuales las piezas están dispuestas de tal manera que al inclinarse la primera de ellas, las otras van sucesivamente cayendo como en una reacción en cadena.

Ahora enunciaremos el principio de inducción de manera precisa.

Teorema 4.14. ***(Principio de Inducción)*** *Sea A un subconjunto de números naturales que satisface las siguientes dos condiciones:*

(i) $0 \in A$.

(ii) Para todo $k \in \mathbb{N}$, si $k \in A$, entonces $k+1 \in A$.

Entonces se tiene que $A = \mathbb{N}$.

¿Cómo podemos demostrar la validez del principio de inducción? Supongamos que $A \subseteq \mathbb{N}$ satisface las dos condiciones (i) y (ii) en la hipótesis del Teorema 4.14. Queremos mostrar que A contiene a todos los números naturales. La condición (i) nos dice que 0 está en A, y por la condición (ii) sabemos que entonces 1 también está en A. Pero entonces, 2 también debe estar, y así sucesivamente. Este argumento intuitivo podríamos considerarlo suficiente para convencernos que A debe ser $\mathbb{N}$. Sin embargo, queremos dar un argumento aún más convincente, pues es un poco vago decir "y así sucesivamente". Veamos pues una demostración matemática del principio de inducción basada en el principio de buena ordenación.

Demostración del Teorema 4.14: Supongamos que $A \subseteq \mathbb{N}$ satisface las dos condiciones (i) y (ii). Queremos mostrar que A contiene a todos los números naturales. La demostración la haremos por reducción al absurdo. Supondremos que A no es igual a $\mathbb{N}$ y veremos que esto conduce a una contradicción.

Supongamos que $A \neq \mathbb{N}$, entonces el conjunto $B = \mathbb{N} \setminus A$ no es vacío. Por el principio de buena ordenación sabemos que B tiene un primer elemento que denotaremos con la letra m. Como $0 \in A$, entonces $m > 0$ y por lo tanto $m - 1 \geq 0$. Por ser m el mínimo de B se tiene que $m - 1 \notin B$. Por lo tanto $m - 1 \in A$ y por la condición (ii) concluimos que $m \in A$. Pero esto contradice que m es el mínimo de B, pues en particular, $m \in B$, es decir, $m \notin A$. La contradicción provino de suponer que $B \neq \emptyset$, es decir, de suponer que $A \neq \mathbb{N}$. Por consiguiente $A = \mathbb{N}$.

□

4.3.1. Algunas aplicaciones del principio de inducción

El principio de inducción se usa, entre otras cosas, para establecer la validez de fórmulas generales. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 4.15. Mostraremos que para cada $n \geq 0$, se cumple que

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{4.6}$$

En otras palabras, mostraremos que

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Sea A el siguiente conjunto

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \text{la igualdad (4.6) es válida para } n\}.$$

Si sustituimos n por 0 en la ecuación (4.6) vemos que ambos miembros son iguales a cero. Esto muestra que la ecuación (4.6) se cumple cuando n es igual a cero y por lo tanto $0 \in A$. Ahora veremos que A satisface la segunda condición del principio de inducción, es decir, que si $k \in A$, entonces $k + 1 \in A$. En otras palabras, supondremos que la igualdad (4.6)) se cumple cuando n es igual a k y mostraremos que también se cumple cuando n

es igual a $k+1$. Denotaremos por s_k la suma de los números naturales del 0 hasta k, es decir,

$$s_k = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + k.$$

Observemos que $s_{k+1} = s_k + (k+1)$. Nuestra suposición de que $k \in A$ nos indica que

$$s_k = \frac{k(k+1)}{2},$$

por lo tanto

$$s_{k+1} = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1).$$

De aquí obtenemos

$$s_{k+1} = (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Y esto muestra que (4.6) se cumple cuando n es igual a $k+1$. En otras palabras, $k+1 \in A$. Por el principio de inducción concluimos que A es igual a $\mathbb{N}$ y por lo tanto concluimos también que (4.6) se cumple para todo natural n. $\square$

Ejemplo 4.16. Consideremos la sucesión de los números impares

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots$$

El término general de esta sucesión viene dado por $2n+1$ para $n \geq 0$. Ahora calcularemos la suma de los primeros números impares. Probaremos que para todo natural n se cumple que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2. \tag{4.7}$$

Podemos expresar la fórmula anterior con el símbolo de sumatoria

$$\sum_{i=0}^{n} 2i + 1 = (n+1)^2. \tag{4.8}$$

Denotemos esta suma por s_n, es decir

$$s_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1).$$

Definimos un conjunto A de la manera siguiente

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \text{la igualdad 4.7 es válida para } n\}.$$

Sustituyendo n por cero en (4.7) vemos que ambos miembros son iguales a uno, y por lo tanto (4.7) se cumple cuando n es igual a 0, en otras palabras, $0 \in A$. Supongamos que

(4.7) es válida cuando n es igual a k, es decir, supongamos que $k \in A$ y mostremos que $k+1 \in A$. Observemos que

$$s_{k+1} = s_k + (2(k+1)+1) = s_k + 2k + 3.$$

Nuestra hipótesis inductiva es que $k \in A$, es decir, que $s_k = (k+1)^2$. Sustituyendo s_k por $(k+1)^2$ en la igualdad anterior y efectuando las operaciones indicadas obtenemos

$$s_{k+1} = (k+1)^2 + (2k+3) = k^2 + 2k + 1 + (2k+3) = k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2.$$

Esto muestra que (4.7) se cumple cuando n es igual a $k+1$. Por el principio de inducción concluimos que A es igual a $\mathbb{N}$, en otras palabras, hemos mostrado que (4.7) se cumple para todo n. $\square$

El principio de inducción también se enuncia de la siguiente forma:

Sean $P_0, P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n, \cdots$, proposiciones matemáticas. Supongamos que

(i) P_0 es válida.

(ii) Para todo $k \in \mathbb{N}$, si P_k es válida, entonces P_{k+1} también es válida.

Entonces P_n es válida para todo natural n.

Por "proposición matemática" se entienden afirmaciones del tipo que hemos estudiado en el capítulo dedicado a la lógica. La afirmación que para todo natural n se cumple la ecuación (4.6) es un ejemplo de una proposición matemática. Los ejemplos que presentaremos en todo este capítulo aclararán mejor el significado de esta expresión.

Es importante enfatizar en que en el segundo paso de una demostración por inducción, uno **no** muestra que P_{k+1} es verdadera. Lo que se demuestra es la proposición condicional:

Si P_k es verdadera, entonces P_{k+1} es verdadera.

Así que en realidad uno demuestra una colección infinita de proposiciones condicionales: si P_0 es verdadera, entonces P_1 es verdadera; si P_1 es verdadera, entonces P_2 es verdadera; si P_2 es verdadera, entonces P_3 es verdadera... etc.

Como se ve en los dos ejemplos que hemos presentado, el uso del conjunto A no es esencial, pues desempeña un papel auxiliar. De ahora en adelante presentaremos las demostraciones que usen el principio de inducción siguiendo el esquema siguiente:

1. Se verifica que la ecuación (o la propiedad) que queremos mostrar es válida para el primer caso. Esto se llama frecuentemente **base de la inducción**.

2. Se demuestra que si la ecuación (o la propiedad) es válida para k, entonces también es válida para $k+1$. Esto se llama frecuentemente **paso inductivo**. La suposición de que la ecuación (o propiedad) es válida para k se llama **hipótesis inductiva**.

Las demostraciones que sigan este esquema se llamarán **demostraciones por inducción**.

Ejemplo 4.17. Mostraremos que para todo número natural n se cumple que

$$n < 2^n. \tag{4.9}$$

(i) *Base de la inducción:* Como $0 < 1$, es claro que (4.9) es válido cuando n es igual a 0.

(ii) *Paso inductivo:* Para todo $k \in \mathbb{N}$, si $k < 2^k$, entonces $k + 1 < 2^{k+1}$.

Hipótesis inductiva: Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $k < 2^k$.

Debemos mostrar: $k + 1 < 2^{k+1}$.

Notemos primero que si k fuera igual a cero; entonces, lo que deseamos mostrar se cumple obviamente, pues $0 + 1 < 2^{0+1}$. Por esto supondremos que $k \geq 1$. Multiplicando por 2 ambos miembros de la desigualdad dada en la hipótesis inductiva obtenemos que

$$2k < 2^{k+1}. \tag{4.10}$$

Ahora bien, ya vimos que podemos suponer que $1 \leq k$. Luego, sumando k a ambos miembros de esta desigualdad obtenemos que $k + 1 \leq 2k$. Y usando la desigualdad (4.10) y la transitividad de la relación de orden obtenemos que $k + 1 < 2^{k+1}$.

Por el principio de inducción concluimos que (4.9) es válido para todo número natural n.

□

Ahora calcularemos el número de elemento del conjunto potencia. Para hacerlo usaremos el Principio de inducción. El paso inductivo está basado en la siguiente idea. Consideremos el conjunto potencia de $\{1, 2, 3\}$. Clasificamos los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ en dos grupos: el primero consiste de aquellos que no contienen al 3 y el segundo del resto, es decir, aquellos que sí contienen al 3

$$\begin{array}{cccc} \emptyset & \{1\} & \{2\} & \{1,2\} \\ \\ \{3\} & \{1,3\} & \{2,3\} & \{1,2,3\} \end{array}$$

Notemos que los conjuntos que están en la primera fila son precisamente los subconjuntos de $\{1, 2\}$, es decir, en el primer grupo hemos puestos todos los elementos de $\mathcal{P}(\{1, 2\})$. Y los que colocamos en el segundo grupo se obtienen agregando el 3 a los conjuntos del primer grupo.

De lo dicho anteriormente se concluye que el número de elementos de $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ es el doble que el de $\mathcal{P}(\{1, 2\})$. El lector debe tener presente esta idea cuando lea la prueba que damos a continuación.

Ejemplo 4.18. Mostraremos que si un conjunto A tiene n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos.

(i) *Base de la inducción:* El caso $n = 0$ corresponde a $A = \emptyset$. En este caso tenemos que

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}.$$

Luego $\mathcal{P}(\emptyset)$ tiene 1 elemento y por lo tanto se satisface que $\mathcal{P}(\emptyset)$ tiene 2^0 elementos.

(ii) *Paso inductivo:* Para todo $k \in \mathbb{N}$, si para todo conjunto A con k elementos se cumple que $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^k elementos, entonces para todo conjunto B con $k+1$ elementos se cumple que $\mathcal{P}(B)$ tiene 2^{k+1} elementos.

Hipótesis inductiva: Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo conjunto A con k elementos se cumple que $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^k elementos.

Debemos mostrar: Dado un conjunto B con $k+1$ elemento, entonces se cumple que $\mathcal{P}(B)$ tiene 2^{k+1} elementos.

Sea B un conjunto con $k+1$ elementos y tomemos un elemento cualquiera $x \in B$. Considere el conjunto $A = B \setminus \{x\}$. Entonces A tiene k elementos. Por otra parte tenemos que

$$\mathcal{P}(B) = \{C \subseteq B : \ x \notin C\} \cup \{C \subseteq B : \ x \in C\}.$$

Observemos que

$$\mathcal{P}(A) = \{C \subseteq B : \ x \notin C\}.$$

Luego tenemos que

$$\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A) \cup \{C \subseteq B : \ x \in C\}. \tag{4.11}$$

Notemos que el conjunto $\{C \subseteq B : \ x \in C\}$ tiene exactamente el mismo número de elementos que $\mathcal{P}(A)$. En efecto, observe que a cada conjunto $D \in \mathcal{P}(A)$ asociamos el conjunto $D \cup \{x\}$. Y viceversa, si $C \subseteq B$ y $x \in C$, entonces el conjunto $C \setminus \{x\} \in \mathcal{P}(A)$. [2]

Para finalizar la demostración observemos que

$$\mathcal{P}(A) \cap \{C \subseteq B : \ x \in C\} = \emptyset.$$

Ahora usamos (4.11) y a la hipótesis inductiva para concluir que

$$\mathcal{P}(B) = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

□

[2]Para el lector versado en funciones biyectivas, note que $f : \mathcal{P}(A) \to \{C \subseteq B : \ x \in B\}$ dada por $f(C) = C \cup \{x\}$, es una biyección. Esto lo veremos en la sección 6.6.2.

Ejemplo 4.19. Queremos calcular el valor de

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n.$$

Llamemos s_n esta suma, es decir,

$$s_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n.$$

Multiplicando por 2 ambos lados de la igualdad anterior, obtenemos

$$2s_n = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{n+1}.$$

Ahora bien, como $s_{n+1} = 1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n+1}$, entonces $2s_n = s_{n+1} - 1$. Por otra parte tenemos que

$$s_{n+1} = s_n + 2^{n+1}.$$

Por lo tanto, $s_n + 2^{n+1} = 2s_n + 1$. Despejando s_n obtenemos que $s_n = 2^{n+1} - 1$. La fórmula buscada es entonces

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1. \tag{4.12}$$

El argumento anterior debería ser suficientemente convincente, sin embargo, podemos también dar una prueba basada en el principio de inducción. La fórmula que queremos demostrar podemos escribirla con la notación de sumatoria de la siguiente manera:

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

(i) *Base de la inducción:* Para $n = 0$ tenemos que

$$\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1.$$

(ii) *Paso inductivo:* Para todo $k \in \mathbb{N}$, si $\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1$, entonces $\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2^{k+2} - 1$.

Hipótesis inductiva: Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1$.

Queremos mostrar: $\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2^{k+2} - 1$.

Notemos primero que

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = \sum_{i=0}^{k} 2^i + 2^{k+1}. \tag{4.13}$$

Usando la ecuación dada en la hipótesis inductiva, obtenemos que

$$\sum_{i=0}^{k} 2^i + 2^{k+1} = 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1}. \tag{4.14}$$

Juntando esta dos últimas igualdades obtenemos que

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2 \cdot 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 1.$$

que es precisamente lo que queríamos demostrar.

□

Ejemplo 4.20. (**La Leyenda del ajedrez**) [3] Dice una leyenda que el ajedrez fué inventado por un joven hindú llamado Lahur Sessa para dar un poco de distracción a un príncipe aburrido y deprimido por las calamidades producidas por guerras interminables. El príncipe, en agradecimiento por tan maravilloso invento, ofreció darle a Lahur Sessa lo que él pidiera. El joven no deseaba nada a cambio de su invento. El príncipe, molesto por tanta modestia, insistió. Lahur Sessa expresó que no quería ni joyas, ni tierras, ni palacios. Deseaba su recompensa en granos de trigo. Dijo:

> *"dadme un grano por la primera casilla, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta, y así duplicando sucesivamente hasta llegar a la sexagésima cuarta y última casilla del tablero".*

Los algebristas del palacio del príncipe calcularon el número exacto de granos de trigos que debía recibir el joven hindú y constataron que ni sembrando toda las tierras de la India podrían reunir tal cantidad de granos. El príncipe tuvo que reconocer su falta de moderación al ofrecer una recompensa cuyo tamaño no sabía estimar ¿Cuántos eran los granos de trigo? Los números que representan los granos pedidos forman la siguiente sucesión

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \cdots, 2^{63}.$$

Así que el número total es

$$\sum_{i=0}^{63} 2^i = 2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615.$$

□

Ejemplo 4.21. Mostraremos que para todo natural n se cumple una de las siguientes alternativas:

(i) $n = 3m$ para algún natural m.

(ii) $n = 3m + 1$ para algún natural m.

(i) $n = 3m + 2$ para algún natural m.

[3] Tomado del libro de Malba Tahan "El hombre que calculaba" [9].

Lo haremos por inducción.
Base de la inducción: Para $n = 0$, tenemos que se cumple la alternativa (i), pues $0 = 3 \cdot 0$.

Paso inductivo: Si k sastisface una de las alernativas (i), (ii) o (iii), entonces $k+1$ también satisface una de ellas.

Hipótesis inductiva: Supongamos que k satisface alguna de las alternativas (i), (ii) o (iii).

Queremos mostrar: $k + 1$ satisface alguna de las alernativas (i), (ii) o (iii).
Como hay tres alternativas, presentaremos el razonamiento por casos:

(1) Supongamos que $k = 3m$ para un natural m. Entonces $k + 1 = 3m + 1$, esto dice que $k + 1$ satisface la alternativa (ii) del enunciado.

(2) Supongamos que $k = 3m + 1$ para un natural m. Entonces $k + 1 = 3m + 2$, esto muestra que $k + 1$ satisface las alternativa (iii) del enunciado.

(3) Supongamos que $k = 3m+2$ para un natural m. Entonces $k+1 = 3m+3 = 3(m+1)$, esto muestra que $k + 1$ satisface la alternativa (i) del enunciado.

Hemos mostrado que $k + 1$ satisface alguna de las tres alternativas del enunciado. Con esto termina la prueba del paso inductivo. □

El resultado anterior se puede expresar diciendo que el resto al dividir un natural por 3 es 0, 1 o 2.

Las dos condiciones (i) y (ii) en el enunciado del principio de inducción son necesarias como lo muestran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.22. Para cada n considere la proposición "$(n+1)^2 + n + 1$ es impar", denotémosla por P_n. Es claro que P_0 es falsa (¿por qué?). Sin embargo, mostraremos que si P_k es verdadera, entonces P_{k+1} también es verdadera. En efecto, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
(k+2)^2 + k + 2 &= k^2 + 4k + 4 + k + 2 \\
&= k^2 + 2k + 1 + k + 1 + 2k + 4 \\
&= (k+1)^2 + (k+1) + 2(k+2).
\end{aligned}$$

Como hemos supuesto que P_k es verdadera, entonces $(k + 1)^2 + k + 1$ es impar. El lado derecho de la última igualdad es entonces la suma de un número impar más otro par, por lo tanto el resultado es impar (¿porqué?). Esto muestra que $(k+2)^2 + k + 2$ es impar. □

Ejemplo 4.23. Recordemos que un natural $n > 1$ se dice que es primo si sus únicos divisores son 1 y n. Considere la proposición P_n: "$n^2 - n + 41$ es un número primo". Podemos verificar que P_1 es cierta, sin embargo esto no indica que P_n sea válida para todo n. Tenemos que P_1, $P_2, \cdots, P_{40}$ son verdaderas. Sin embargo P_{41} es falsa, pues $(41)^2 - 41 + 41$ claramente no es primo.

□

Ejemplo 4.24. Mostraremos que $8^n - 3^n$ es un múltiplo de 5 para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo haremos por inducción.
Base de la inducción: Para $n = 0$, tenemos que $8^0 - 3^0 = 0$ que es un múltiplo de 5 (¿porqué?)

Paso inductivo: Si $8^k - 3^k$ es múltiplo de 5, entonces $8^{k+1} - 3^{k+1}$ es un múltiplo de 5.

Hipótesis inductiva: $8^k - 3^k$ es múltiplo de 5. Es decir, existe m tal que $8^k - 3^k = 5m$.

Queremos mostrar: $8^{k+1} - 3^{k+1}$ es un múltiplo de 5.

Supongamos que $8^k - 3^k$ es múltiplo de 5. Esto es, existe m tal que $8^k - 3^k = 5m$. Observemos que

$$\begin{array}{rcl} 8^{k+1} - 3^{k+1} & = & 8 \cdot 8^k - 3 \cdot 3^k \\ & = & 8 \cdot 8^k - 8 \cdot 3^k + 5 \cdot 3^k \\ & = & 8 \cdot (8^k - 3^k) + 5 \cdot 3^k \\ & = & 8 \cdot 5m + 5 \cdot 3^k \\ & = & 5 \cdot (8m + 3^k) \end{array}$$

De lo anterior se concluye que $8^{k+1} - 3^{k+1}$ es múltiplo de 5. $\square$

Ejemplo 4.25. Mostraremos por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

Base de la inducción: Para $n = 1$. Tenemos que

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2}$$

y no hay nada que mostrar.

Paso inductivo: Si $\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + \frac{k}{2}$, entonces $\sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + \frac{k+1}{2}$.

Hipótesis inductiva: $\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + \frac{k}{2}$.

Queremos mostrar: $\sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + \frac{k+1}{2}$.

En efecto, usando la hipótesis inductiva tenemos que

$$\sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} + \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + \frac{k}{2} + \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i}.$$

Por otra parte, observemos que

$$\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} = \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$$

y de esto se concluye lo deseado. □

Ejemplo 4.26. Sean A y B dos conjuntos no vacios. Suponga que A tiene n elemento y B tiene m elementos. Entonces $A \times B$ tiene $n \cdot m$ elementos.

Haremos la prueba por inducción en el número de elementos de A, es decir, inducción en la variable n. Sea B un conjunto con m elementos, digamos

$$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}.$$

Base de la inducción: Para $n = 1$. Sea A un conjunto con un solo elemento, entonces $A = \{a\}$. Tenemos que

$$A \times B = \{(a, b_1), (a, b_2), \cdots, (a, b_m)\}$$

Luego $A \times B$ tiene m elementos.

Hipótesis inductiva: Supongamos que cuando A tiene k elementos, entonces $A \times B$ tiene $k \cdot m$ elementos.

Queremos mostrar: Si A es un conjunto con $k+1$ elementos, entonces $A \times B$ tiene $(k+1) \cdot m$ elementos.

Suponga que A tiene $k+1$ elementos y escoja un elemento a de A cualquiera. Entonces $C = A \setminus \{a\}$ tiene k elementos. Observemos que

$$A \times B = (A \setminus \{a\}) \times B \ \cup\ \{a\} \times B = C \times B \ \cup\ \{a\} \times B$$

Como C tiene k elementos, por hipótesis inductiva, $C \times B$ tiene $k \cdot m$ elementos. Por otra parte, ya vimos que $\{a\} \times B$ tiene m elementos. Por lo tanto, $A \times B$ tiene $k \cdot m + m$ elementos, es decir $(k+1) \cdot m$ elementos □

4.3.2. Variantes del principio de inducción

En algunos casos, la ecuación o propiedad que estamos estudiando es válida a partir de cierto valor. Un ejemplo de esto, que veremos dentro de poco, es la desigualdad $2^n < n!$ que vale si $n \geq 4$. Para verificar esta desigualdad por inducción necesitaremos otra versión del principio de inducción, la cual presentamos a continuación.

Teorema 4.27. *Sea m un número natural y A un subconjunto de números naturales tal que:*

(i) $m \in A$.

(ii) Para todo $k \in \mathbb{N}$, si $k \in A$, entonces $k+1 \in A$.

Entonces $\{n \in \mathbb{N} : m \leq n\} \subseteq A$. $\square$

La demostración de este resultado la dejamos como ejercicio (ver ejercicio 13). Podemos enunciar el teorema anterior en términos de "proposiciones matemáticas".

Teorema 4.28. *Sea m un número natural y $P_m, P_{m+1}, \cdots, P_n, \cdots$, proposiciones matemáticas para cada $n \geq m$. Supongamos que*

(i) P_m es válida.

(ii) Para todo $k \in \mathbb{N}$, si P_k es válida, entonces P_{k+1} también es válida.

Entonces P_n es válida para todo $n \geq m$. $\square$

Ejemplo 4.29. Mostraremos que $2^n < n!$ si $n \geq 4$.

(i) *Base de la inducción:* Cuando n es igual a 4, tenemos que $2^4 = 16$ y $4! = 24$. Luego $2^4 < 4!$.

(ii) *Paso inductivo:* Si $k \geq 4$ y $2^k < k!$, entonces $2^{k+1} < (k+1)!$.

Hipótesis inductiva: Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 4$ y $2^k < k!$.

Queremos demostrar: $2^{k+1} < (k+1)!$. Como estamos suponiendo que $k \geq 4$, entonces es claro que $2 < k+1$. Por hipótesis inductiva tenemos que $2^k < k!$. Multiplicando por 2 ambos miembros de esta desigualdad obtenemos que

$$2 \cdot 2^k < 2k!.$$

Como $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$, entonces

$$2^{k+1} < 2k!.$$

Ahora bien, como $2 < k+1$, entonces

$$2k! < (k+1)k!.$$

Observemos que $(k+1)! = (k+1)k!$. Por lo tanto tenemos que

$$2k! < (k+1)!.$$

Tenemos entonces que $2^{k+1} < 2k!$ y $2k! < (k+1)!$. Por la transitividad de $<$ concluimos que

$$2^{k+1} < (k+1)!.$$

Por el teorema 4.28 concluimos que $2^n < n!$ para todo $n \geq 4$. Observe el lector que esta desigualdad no es válida cuando $n \leq 3$. $\square$

Ejemplo 4.30. Probaremos que para todo $n \geq 1$ se cumple

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \tag{4.15}$$

(i) *Base de la inducción:* Sustituyendo n por 1 en (4.15) vemos que ambos miembros son iguales a 1, esto muestra que (4.15) es válida para n igual a 1.

(ii) *Paso inductivo:* Si (4.15) es válida cuando n es igual a k, entonces (4.15) es válida cuando n es igual a $k+1$.

Hipótesis inductiva: Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que s

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}.$$

Sumando $(k+1)^3$ a ambos miembros de la igualdad dada en la hipótesis inductiva obtenemos

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\ &= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

Con esto hemos verificado que (4.15) es válida cuando n es igual a $k+1$.

Por el principio de inducción concluimos que (4.15) es válida para todo n. □

Vimos en (4.6) que

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

De esto se deduce inmediatamente que

$$(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Por consiguiente podemos expresar de manera elegante la suma de los primeros cubos como sigue

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n)^2.$$

□

Para finalizar enunciaremos el llamado **principio de inducción fuerte** o **principio de inducción completa**.

Teorema 4.31. *Sea A un subconjunto de números naturales tal que:*

(i) $0 \in A$.

(ii) Para todo $k \in \mathbb{N}$, *si* $\{0, 1, 2, 3, \cdots k\} \subseteq A$, *entonces* $k + 1 \in A$.

Entonces $A = \mathbb{N}$.

Note que la condición (ii) es más fuerte que la correspondiente condición en 4.14. La demostración de este resultado la dejamos como ejercicio (ver el ejercicio 14).

Ejercicios 4.3.1

1. Determine para que valores de n se cumple la desigualdad indicada
   a) $2^n + 8 \leq 2^{n+1}$.
   b) $32(n+1)! \leq (n+2)!$.
2. En los siguientes ejercicios, muestre por inducción la fórmula que se indica.
   (a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 3i = \frac{(3n)(n+1)}{2}$ (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   (c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$ (d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i)^3 = 2[n(n+1)]^2$
   (e) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$ (f) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i(i+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$
   (g) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (3i-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$ (h) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 3^i = \frac{3(3^n-1)}{2}$
   (i) $\displaystyle 1 + \sum_{i=1}^{n} i(i!) = (n+1)!$ (j) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 4^i = \frac{4(4^n-1)}{3}$.
   (k) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{(n+1)}$
3. Halle el valor de las siguientes sumatorias
   (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} i$ (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} i^2$ (c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} i^3$ (d) $\displaystyle\sum_{i=0}^{5} 3^i$.
4. Muestre por inducción que todo natural es par o impar.

5. Muestre que para todo natural n se da una de las siguientes alternativas:
   (i) $n = 4m$ para algún natural m.
   (ii) $n = 4m + 1$ para algún natural m.
   (iii) $n = 4m + 2$ para algún natural m.
   (iv) $n = 4m + 3$ para algún natural m.

6. Generalize el ejercicio 5

7. Muestre por inducción las siguientes afirmaciones
   a) $2n^2 > (n+1)^2$ para todo número natural $n \geq 3$
   b) $2^n > n^2$ para todo número natural $n > 4$
   c) $2^{2n} > 4n^2$ para todo número natural $n > 4$
   d) $3^n > n^2$ para todo número natural n
   e) $3^n > n^3$ para todo número natural $n \geq 4$
   f) $4^n < (2n)!$ para todo número natural $n \geq 2$
   g) $n^2 + n$ es divisible por 2 para todo número natural n
   h) $3^{4n} + 9$ es divisible por 10 para todo número natural n
   i) $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ es divisible por 17 para todo número natural n
   j) Muestre por inducción que para todo número natural $n \geq 1$ se cumple que $1 + 9n \leq 10^n$
   k) Sea a un entero con $a \geq 2$. Muestre por inducción que para todo $n \geq 1$ se cumple que $1 + (a-1)n \leq a^n$. Observe que cuando $a = 10$ obtenemos el resultado del ejercicio ($7j$)

8. Encuentre una fórmula para cada una de las siguientes expresiones. Observe que los valores de i van hasta $n + 2$. (*Sugerencia:* Es más fácil de lo que parece.)

   (a) $\sum_{i=1}^{n+2} i$ (b) $\sum_{i=1}^{n+2} i^3$ (c) $\sum_{i=0}^{n+2}(2i+1)$ (d) $\sum_{i=0}^{n+2} 2i + 1$.

9. Encuentre una fórmula para $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2$. ¿Qué relación guarda esta expresión con $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \cdots + n^2$?

10. Encuentre una fórmula para cada una de las siguientes sumatorias.

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(1+i)$ (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(3+i^2)$

(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i^2-i)$ (d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2+i^3)$

(e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i+i^2+i^3)$.

11. Halle el error en la siguiente prueba.

    Todo natural n es igual a 0.

    Prueba: La demostración es por inducción. Es claro que para $n = 0$ se cumple que $0 = 0$. Supongamos que se cumple para k y mostrémoslo para $k+1$. Por hipótesis inductiva tenemos que $k = k-1 = 0$. Luego $k+1 = k$. Y por lo tanto $k+1 = 0$.

12. Halle el error en la siguiente prueba.

    Para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ se cumple que en todo conjunto de n caballos todos los caballos son del mismo color.

    Prueba: La demostración se hará por inducción. Es claro que en un conjunto con un sólo caballo, todos los caballos de ese conjunto son del mismo color. Supongamos que la afirmación se cumple para k y lo mostraremos para $k+1$. Sea A un conjunto de $k+1$ caballos. Elija uno de ellos cualquiera y considere el conjunto B de k caballos que se obtiene sacando el caballo escogido. Por hipótesis inductiva, todos los caballos de B tienen el mismo color. Como esto es válido para cualquier caballo que escojamos, es claro que todos los caballos de A tienen el mismo color.

13. Demostrar el teorema 4.27. *Sugerencia:* Sean m y A como en el enunciado del teorema 4.27. Defina
$$B = \{0, 1, 2, 3, ..., m-1\} \cup A.$$
    Muestre que B satisface las condiciones del principio de inducción y concluya que $B = \mathbb{N}$. De esto deduzca que $\{n \in \mathbb{N} : m \leq n\} \subseteq A$.

14. Demuestre el Teorema 4.31. Es decir, si A es un subconjunto de números naturales tal que:

    (i) $0 \in A$.

    (ii) Para todo $k \in \mathbb{N}$, si $\{0, 1, 2, 3, \cdots k\} \subseteq A$, entonces $k+1 \in A$.

    Entonces $A = \mathbb{N}$.

    (*Sugerencia:* Siga un razonamiento análogo al usado en la demostración del teorema 4.14. Es decir, suponga que A es como en la hipótesis. Razone por reducción al absurdo. Suponga que $A \neq \mathbb{N}$ y use el principio de buena ordenación en el conjunto $\mathbb{N} \setminus A$.)

15. Determine si el siguiente principio es válido. Sea A un subconjunto de números naturales tal que:

    (i) $0 \in A$.

    (ii) Para todo $k \in \mathbb{N}$, si existe m tal que $0 \leq m < k$ y $m \in A$, entonces $k \in A$.

    Entonces $A = \mathbb{N}$.

4.4. Definiciones por recursión

Un sucesión bastante famosa, por lo frecuente que aparece en problemas de índole muy variada, es la **sucesión de Fibonacci**. Esta sucesión, que denotaremos con $(r_n)_n$, cumple con las siguientes condiciones:

(i) $r_0 = r_1 = 1$

(ii) $r_n = r_{n-1} + r_{n-2}$ para todo $n \geq 2$

Analizando estas condiciones podemos ver que $r_2 = r_1 + r_0$ y por lo tanto $r_2 = 2$. De igual manera obtenemos que $r_3 = 2 + 1 = 3$, $r_4 = 3 + 2 = 5$, $r_5 = 5 + 3 = 8$, etc. Vemos entonces que si conocemos los primeros n elementos de la sucesión, podemos, usando la condición (ii), calcular el elemento $n + 1$ de la sucesión.

Los primeros términos de la sucesión de Fibonacci son los siguientes:

n	r_n
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34

Las sucesiones definidas de esta manera se conocen como **sucesiones recursivas** o definidas por **recursión**. La ecuación usada para definir la sucesión (por ejemplo, $r_n = r_{n-1} + r_{n-2}$ para todo $n \geq 2$) se conoce como **ecuación de recurrencia**.

Fibonacci (1180-1250) (cuyo verdadero nombre fue Leonardo de Pisa) fué un matemático italiano que en su libro *Liber Abaci* presentó un problema que dió origen a la sucesión que lleva su nombre. El problemas fué el siguiente:

Cuántas parejas de conejos tendremos mensualmente a partir de una pareja de conejos jóvenes si se cumplen las siguientes dos condiciones: (1) Cada conejo es fértil a partir del segundo mes de vida y cada pareja cuando es fértil produce dos conejillos y (2) supondremos que ningún conejo muere.

La suceción de Fibonacci también aparece relacionada con la distribución de las ramas de algunas plantas, el número de pétalos de algunas flores y en muchas otras situaciones.

Ejemplo 4.32. Considere la siguiente situación. El crecimiento anual de las ramas de un árbol es dos veces el del año anterior. Si denotamos por t_n la longitud de las ramas al finalizar el año n, tenemos que el crecimiento de las ramas del árbol en el año $n-1$ es

$$t_{n-1} - t_{n-2}.$$

Luego la condición descrita la podemos expresar de la manera siguiente

$$t_n = t_{n-1} + 2(t_{n-1} - t_{n-2}).$$

Es decir

$$t_n = 3t_{n-1} - 2t_{n-2}.$$

Por ejemplo, si durante el primer año, el crecimiento fué igual a 1 tendríamos que $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$. Con estos datos y la ecuación de recurrencia podemos conseguir cualquier término que queramos. Por ejemplo, para hallar t_3 debemos calcular primero t_2 y luego obtenemos que $t_3 = 2t_2 - t_1$. Los primeros cinco términos de esta sucesión son los siguientes:

n	t_n
0	0
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127
8	255

□

Algunas sucesiones definidas por recursión también pueden expresarse con una regla. Por ejemplo, la sucesión de Fibonacci también puede obtenerse de la siguiente manera:

$$r_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

En el ejercicio 3 pedimos al lector que verifique que en efecto la sucesión anterior satisface la recurrencia

$$r_n = r_{n-1} + r_{n-2}$$

y las condiciones iniciales $r_0 = r_1 = 1$.

La sucesión del ejemplo 4.32 también la podemos expresar de la siguiente forma

$$t_n = 2^n - 1.$$

Dejamos al lector verificar que en efecto esta sucesión satisface la ecuación de recurrencia

$$t_n = 3t_{n-1} - 2t_{n-2}$$

y las condiciones iniciales $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$.

Ejercicios 4.4

1. Halle el término indicado de cada una de las siguientes sucesiones definidas por recurción.
   a) $t_n = t_{n-1} - 4t_{n-2}$ con $t_0 = -1$ y $t_1 = 4$. Halle t_5.
   b) $s_{n+2} + 3s_{n+1} + 2s_n = 0$ con $s_0 = \frac{1}{2}$ y $s_1 = \frac{1}{4}$. Halle s_5.
   c) $t_n = \frac{t_{n-1}}{t_{n-2}}$ con $t_0 = 2$ y $t_1 = 3$. Halle t_6.
   d) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2} - n^2$ con $a_0 = \sqrt{2}$ y $a_1 = 0$. Halle a_4.
2. Las siguientes dos sucesiones definidas por recursión, son conocidas. ¿Puede el lector determinar cuál es en cada caso?
   a) $r_0 = 1$ y $r_n = n \cdot r_{n-1}$.
   b) $r_0 = 1$ y $r_n = 2 \cdot r_{n-1}$.
3. Verifique que la sucesión

$$r_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

   satisface la ecuación de recurrencia $r_n = r_{n-1} + r_{n-2}$ y las condiciones iniciales $r_0 = r_1 = 1$.
4. Verifique que la sucesión

$$t_n = 2^n - 1$$

   satisface la ecuación de recurrencia $t_n = 3t_{n-1} - 2t_{n-2}$ y las condiciones iniciales $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$.

5. Verifique que la sucesión
$$a_n = 3^n + 2^n$$
satisface la ecuación de recurrencia $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} - 2^n$ y las condiciones iniciales $a_0 = 2$ y $a_1 = 5$.

6. Muestre que la sucesión $(s_n)_n$ de Fibonacci satisface
$$\sum_{i=0}^{n-2} s_i = s_n - 1.$$
(*Sugerencia:* Pruébelo por inducción en n y use la ecuación de recurrencia que define la sucesión de Fibonacci.)

4.5. ¿Por qué se llama inducción matemática?

En esta sección haremos algunos comentarios sobre el uso de la palabra "inducción" para referirse al método de demostración que hemos estudiado.

Si uno busca en un diccionario (o en Wikipedia) la palabra inducción, encontrará que está asociada a un tipo de razonamiento donde se extrae, a partir de determinadas observaciones o experiencias particulares, el principio general que en ellas está implícito. Veamos un ejemplo que ilustre lo que acabamos de decir.

Imaginemos que sobre una mesa hay una bolsa llena de semillas y unas pocas semillas regadas sobre la mesa. Consideremos los siguientes tres escenarios.

I Supongamos nos dicen que todas las semillas que están en la bolsa son de color blanco. Y además que las semillas regadas sobre la mesa provienen de esa bolsa. Concluimos, sin necesidad de mirar con más detenimiento las semillas, que todas ellas son de color blanco.

Regla:	Todas las semillas de esta bolsa son blancas	$\forall x\ (x \in S \to x \in B)$
Premisa:	Estas semillas son de esta bolsa	$c \in S$
Conclusión:	Estas semillas son blancas	$c \in B$

La lógica en que se basa este razonamiento es la que hemos estado estudiando y es la que se usa en matemáticas. Se le conoce como **lógica deductiva** y el proceso de inferencia se llama **deducción**.

II De nuevo nos dicen que todas las semillas que están en la bolsa son de color blanco. Pero ahora nos acercamos a la mesa y observamos que las semillas que están sobre ella son todas de color blanco. De esta información podríamos inferir que todas esas semillas sueltas provienen de la bolsa. De alguna forma, nuestro razonamiento podría verse como una manera de "explicar" por qué las semillas que están sobre la mesa son de color blanco.

Regla:	Todas las semillas de esta bolsa son blancas	$\forall x\ (x \in S \to x \in B)$
Observación:	Estas semillas son blancas	$c \in B$
Explicación:	Estas semillas son de esta bolsa	$c \in S$

Este tipo de razonamiento no es lógicamente válido en el sentido de la lógica deductiva que hemos estado estudiando. Muy bien podría ser que las semillas no viniesen de la bolsa aunque sin duda son blancas. Sin embargo, es un tipo de razonamiento que usamos con frecuencia en la vida diaria. En algunos libros, esta forma de inferencia se llama **abducción**.

III Ahora tenemos una situación diferente. Llegamos en el momento en que estaban sacando algunas de las semillas de la bolsa y observamos que todas son de color blanco. Basados en esto nos atrevemos a afirmar que todas las semillas de la bolsa son blancas.

Observación:	Estas semillas son blancas	$c \in B$
Observación:	Estas semillas son de esta bolsa	$c \in S$
Generalización:	Todas las semillas de esta bolsa son blancas	$\forall x\ (x \in S \to x \in B)$

Hemos hecho una afirmación general basados en algunos casos particulares. Este razonamiento no es lógicamente válido, pues las observaciones son verdaderas y la conclusión puede que no lo sea. Esta forma de inferencia se conoce como **inducción**. La inducción es un tipo de razonamiento esencial para la ciencia. Las teorías científicas con frecuencia son generalizaciones basadas en un número reducido de observaciones o de experimentos.

Estrictamente hablando, la inducción matemática no es un razonamiento inductivo, pues tenemos un subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ y razonamos de la siguiente manera.

Base de la inducción:	$0 \in A$
Paso inductivo:	$\forall n\ (n \in A \to n+1 \in A)$
Conclusión:	$\forall n \in \mathbb{N}\ (n \in A)$

Este es un razonamiento deductivo, pues la conclusión se deduce de las premisas, es decir, si las premisas son válidas, la conclusión también lo es. Sin embargo, este razonamiento tiene la apariencia de ser una inferencia inductiva, pues pareciera que uno parte de casos particulares y llega a una regla general. Pero no es cierto, el único caso particular que uno verifica es la base de la inducción. En el paso inductivo, uno verifica una afirmación universal y es precisamente eso lo que permite que la conclusión también sea una proposición universal.

En el principio de inducción se conjugan tres aspectos de las matemáticas: La lógica, los conjuntos y los números. Primero que todo, como su nombre indica, se puede considerar una herramienta de la lógica. Por otra parte, como vimos en este capítulo, el principio de inducción es equivalente al principio de buena ordenación, que es una propiedad de un conjunto que tiene sus elementos ordenados de una manera especial. Nos referimos a $\mathbb{N}$ con su orden usual. Este es el punto de vista actual de la teoría de conjuntos. Por último, también se puede ver como una propiedad de un sistema numérico. Este es el enfoque usado por el matemático italiano G. Peano (1858-1932), quien presentó una lista de propiedades básicas que caracterizan al sistema de los números naturales. El principio de inducción es una de esas propiedades fundamentales de $\mathbb{N}$. Peano describe su sistema de la siguiente manera:

A1 El 0 es un número natural.

A2 A todo número natural n se le asocia otro número natural n' denominado el siguiente de n.

A3 Si n y m son números naturales y $n' = m'$, entonces $n = m$

A4 No existe un númeero natural n tal que $n' = 0$.

A5 Si S es una colección de números naturales que satisface:

(i) 0 pertenece a S.

(ii) Si $n \in S$, entonces $n' \in S$.

Entonces S es el conjunto de los números naturales.

CAPÍTULO 5

RELACIONES

En este capítulo introduciremos el concepto de relación sobre un conjunto. Este es un concepto importante en Matemáticas y en él se basa la definición de función que veremos en un capítulo posterior. Como ejemplo del uso del concepto de relación, incluimos una breve introducción a la noción de grafo.

5.1. Relaciones

La noción de relación es usada frecuentemente en la vida diaria. Un ejemplo muy "familiar" es la relación "*ser padre de*". Veamos otros ejemplos de relaciones antes de introducir la definición matemática.

Ejemplo 5.1. Consideremos la colección C de todas las ciudades de Colombia. Diremos que dos ciudades c y d están relacionadas si se puede viajar (no importa con que línea aérea) de c a d sin hacer escalas. Denotaremos este hecho con el símbolo cRd. Por ejemplo,

$$\text{Bogotá } R \text{ Bucaramanga} \quad \text{y} \quad \text{Bogotá } R \text{ Manizales}$$

pero no es cierto que Manizales R Bucaramanga. Cada par de ciudades relacionadas c y d puede ser considerado como el par ordenado (c, d). La relación R la podemos entonces representar como el siguiente conjunto de pares ordenados:

$$R = \{(c, d) \in C \times C : \text{ Existe un vuelo sin escalas de } c \text{ a } d\}.$$

Por ejemplo, tenemos que $(\text{Bogotá}, \text{Manizales}) \in R$ y $(\text{Manizales}, \text{Bucaramanga}) \notin R$.

Las bases de datos de las líneas aéreas y agencias de viajes guardan la información sobre los vuelos de la manera en que la hemos presentado en este ejemplo (esas bases de datos se conocen como *bases de datos relacionales*). □

Ejemplo 5.2. Consideremos la relación $<$ de orden estricto entre números naturales. Podemos representar esta relación como una colección de pares ordenados de la manera siguiente:

$$R = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n < m\}.$$

Por ejemplo, $(3, 5) \in R$ y $(4, 2) \notin R$. Por supuesto que ésta no es la manera usual de expresar la relación de orden, pero nos sirve para motivar la definición que daremos a continuación. □

Los dos ejemplos que hemos presentado tienen en común que la relación en cuestión fue representada en términos de colecciones de pares ordenados y esto es la clave de la siguiente definición.

Definición 5.3. *Una **relación** entre dos conjuntos A y B es un subconjunto de $A \times B$. En este caso diremos que R es una **relación de** A **en** B.*

Las relaciones entre *dos* conjuntos se conocen también por el nombre de **relaciones binarias**. Cuando A es igual a B diremos que R es una relación sobre A. Observe que decir que R es una relación de A en B **no** es lo mismo que decir que R es una relación de B en A.

El concepto de relación incluye muchas posibilidades como veremos en los ejemplos a continuación.

Ejemplos 5.4.

1. Sean $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ y $R = \{(1, 3), (1, 4)\}$. Tenemos que R es una relación entre A y B. Pero R no es una relación entre B y A.

2. Otro ejemplo de una relación de A en B consiste en tomar todos los pares ordenados $(a, b) \in A \times B$. Es decir, si ponemos R igual a $A \times B$, tenemos que R es una relación de A en B. Según esta relación cada uno de los elementos de A está relacionado con cada uno de los elementos de B (¿Puede imaginarse un ejemplo de la vida diaria donde ocurra esta situación?).

3. La relación de divisibilidad: sean a, b enteros con $a \neq 0$, diremos que a está relacionado con b (y escribimos $a|b$) si existe un entero k tal que $b = ka$. Por ejemplo, $3|6$ y $4 \not| 6$.

4. Sea A un conjunto cualquiera. Definimos una relación binaria entre A y $\mathcal{P}(A)$ de la manera siguiente

   $$R = \{(x, B) \in A \times \mathcal{P}(A) : x \in B\}.$$

   Entonces (x, B) está en R precisamente cuando $x \in B$. Es decir, $\in$ relaciona los elementos de A con los elementos de $\mathcal{P}(A)$.

   Por ejemplo, en el caso que $A = \{1, 2, 3\}$ tenemos que

   $$(3, \{1, 3\}) \in R \;\text{ y }\; (2, \{1, 3\}) \notin R.$$

5. La relación de subconjunto $\subseteq$. Para adaptar este ejemplo a la Definición 5.3 trabajaremos con subconjuntos de un conjunto universal U. Definimos R de la manera siguiente:
$$R = \{(C, D) \in \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) : \ C \subseteq D\}.$$
Dados dos subconjuntos C, D de U, se cumple que $C \subseteq D$ si y solamente si $(C, D) \in R$. Observe que R es una relación sobre $\mathcal{P}(U)$.

   Por ejemplo, en el caso que $U = \mathbb{N}$, tenemos que
$$(\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}) \in R \ \text{ y } \ (\{1, 2\}, \{1, 3\}) \notin R.$$

6. El conjunto vacío $\emptyset$ es un subconjunto de $A \times B$ y en consecuencia es otro ejemplo de relación de A en B. Este es un ejemplo "extremo" de relación, pues en realidad no relaciona a ningún elemento de A con ninguno de B.

□

Si R es una relación binaria, también escribiremos
$$xRy$$
cuando x e y están relacionados según R, es decir, si $(x, y) \in R$. Es muy frecuente que las relaciones se denoten con un símbolo especial. Por ejemplo, la relación de orden estricto $<$, la relación de divisibilidad $|$, la de pertenencia $\in$, la de subconjunto $\subseteq$, etc.

En muchos casos es importante conocer cuáles elementos de A realmente están relacionados con algún elemento de B. Y también es útil saber para cuáles elementos de B existe alguno de A relacionado con él. Estas ideas las precisamos a continuación.

Definición 5.5. *Sea R una relación binaria entre los conjuntos A y B. El **dominio** de R, denotado por $dom(R)$, es el conjunto formado por todos aquellos elementos a de A tales que (a, b) está en R para algún b en B.*

*El **rango** de R, denotado por $rango(R)$, es el conjunto formado por todos aquellos elementos b de B tales que (a, b) está en R para algún a en A.*

Usando otra notación podemos expresar las nociones de rango y dominio de una relación de la siguiente manera:
$$\begin{aligned} dom(R) &= \{a \in A : \ aRb \text{ para algún } b \in B\} \\ rango(R) &= \{b \in B : \ aRb \text{ para algún } a \in A\}. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.6. Sea $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ y $R = \{(1, 3), (1, 4)\}$. Entonces por inspección tenemos que $dom(R) = \{1\}$ y $rango(R) = \{3, 4\}$.

Dejemos A y B como en el ejemplo anterior, es decir, $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3, 4\}$. Pero ahora tomemos como R al conjunto $\{(1, 3), (2, 3)\}$. Entonces por inspección tenemos que $dom(R) = \{1, 2\}$ y $rango(R) = \{3\}$. Este ejemplo muestra que el rango y el dominio dependen de la relación R que estemos estudiando. □

Ejemplo 5.7. Consideremos la relación de orden estricto en $\mathbb{N}$. En términos de conjuntos tenemos que nuestra relación R viene dada por

$$R = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n < m\}.$$

Afirmamos que $dom(R) = \mathbb{N}$ y $rango(R) = \{n \in \mathbb{N} : 0 < n\}$. En efecto:

(1) Veamos que $rango(R) = \{n \in \mathbb{N} : 0 < n\}$. Para mostrar la igualdad de estos dos conjuntos debemos mostrar dos cosas: (i) $rango(R) \subseteq \{n \in \mathbb{N} : 0 < n\}$ y (ii) $\{n \in \mathbb{N} : 0 < n\} \subseteq rango(R)$.

  (i) Sea $n \in rango(R)$. De la definición de rango se concluye que $n \in \mathbb{N}$ y también, y esto es lo más importante, que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(m, n) \in R$. Es decir, $m < n$. Por consiguiente $n \neq 0$, luego $n \geq 1$.

  (ii) Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$, queremos ver que $n \in rango(R)$. Como $n \geq 1$, tenemos que $n-1 \geq 0$, luego $n-1 \in \mathbb{N}$ y además $n-1 < n$. Por lo tanto, $(n-1, n) \in R$. Es decir, $n \in rango(R)$.

(2) Veamos que $dom(R) = \mathbb{N}$. De manera similar, mostraremos dos cosas: (i) $\mathbb{N} \subseteq dom(R)$ y (ii) $dom(R) \subseteq \mathbb{N}$.

  (i) Sea $n \in \mathbb{N}$, queremos mostrar que $n \in dom(R)$. En efecto, simplemente notemos que $(n, n+1) \in R$ pues $n < n+1$.

  (ii) De la propia definición de $dom(R)$ se deduce que $dom(R) \subseteq \mathbb{N}$.

□

Ejemplo 5.8. Sea R la relación de pertenencia definida entre elementos de un conjunto A y el conjunto de partes de A. Es decir,

$$R = \{(x, B) \in A \times \mathcal{P}(A) : \; x \in B\}.$$

Vemos que $dom(R) = A$, pues dado cualquier $a \in A$ tenemos, por ejemplo, que $(a, A) \in R$. Por otra parte, $rango(R) = \mathcal{P}(A) - \{\emptyset\}$. En efecto, si $B \subseteq A$ no es vacío, entonces tomemos $x \in B$. Luego $(x, B) \in R$ y esto nos dice que $B \in rango(R)$. Por otra parte, es claro que ningún $a \in A$ cumple que $(a, \emptyset) \in R$, esto es, $\emptyset \notin rango(R)$. □

Ejercicios 5.1

1. Determine el dominio y el rango de las siguientes relaciones.

   a) $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\}$.

   b) $R = \{(-1,1), (-2,2), (-3,3), (-4,4), (-5,5)\}$.

   c) $R = \{(n, 2n) : \; n \in \mathbb{N}\}$.

   d) $R = \{(n, 2n+1) : \; n \in \mathbb{N}\}$.

e) $R = \{(1,1), (1,\frac{1}{2}), (1,\frac{1}{3}), (1,\frac{1}{4}), (1,\frac{1}{5}), (1,\frac{1}{6}), (1,\frac{1}{7})\}$.

2. Sea $A = \{0,1,2\}$. Definimos una relación R sobre A de la manera que se indica. Escriba R como un conjunto de pares ordenados y determine su dominio y su rango.

   a) nRm, si $n \leq m$.

   b) nRm, si $m \cdot n = 0$.

   c) nRm, si $m + n \in A$.

   d) nRm, si $m = \text{máx}\{n, 1\}$.

   e) nRm, si $m^2 + n^2 = 3$.

3. Considere la relación R de $\{1,2\}$ en $\mathcal{P}(\{1,2\})$ dada por

$$R = \{(x, B) \in \{1,2\} \times \mathcal{P}(\{1,2\}) : \ x \in B\}.$$

   a) Determine todos los elementos de R.

   b) Determine el rango y el dominio de R.

4. *a)* Sea $R = \{(1,2), (1,3)\}$ como relación sobre $\{1,2,3\}$. Suponga que Q es otra relación sobre $\{1,2,3\}$ tal que $dom(R) = dom(Q)$, $rango(R) = rango(Q)$. Muestre que $R = Q$.

   b) Halle dos relaciones R y Q sobre $\{1,2,3\}$ tales que $dom(R) = dom(Q)$, $rango(R) = rango(Q)$ pero $R \neq Q$.

   c) Sean R, Q dos relaciones binarias sobre un conjunto A. Suponga que $dom(R) = dom(Q)$ y $rango(R) = rango(Q)$. Muestre que si $dom(R)$ tiene un solo elemento, entonces $R = Q$.

5.2. Relaciones reflexivas, simétricas y transitivas

Ahora nos restringiremos a estudiar relaciones binarias definidas entre los elementos de un mismo conjunto: aquellas relaciones de A en A (es decir el caso en que $A = B$ en la Definición 5.3). En este caso diremos que R es una relación sobre A.

Antes de continuar con esta presentación de las relaciones sobre un conjunto, queremos responder una pregunta que es natural ¿Cuántas relaciones se pueden definir sobre un conjunto? De los ejemplos que hemos visto, es claro que en un conjunto se pueden definir varias relaciones. Precisemos esta idea. Una relación sobre A es, por definición, un subconjunto de $A \times A$. Por lo tanto, la colección de relaciones sobre un conjunto A es precisamente $\mathcal{P}(A \times A)$. Por esto existen tantas relaciones sobre A como elementos tenga $\mathcal{P}(A \times A)$. Ahora bien, ¿Cuántos elementos tiene $\mathcal{P}(A \times A)$? Antes vimos que si A tiene n elementos, entonces $A \times A$ tiene n^2 elementos (vea el Ejemplo 4.26). Por lo tanto $\mathcal{P}(A \times A)$ tiene 2^{n^2} elementos. Así que, si A tiene n elementos, entonces se pueden definir 2^{n^2} relaciones binarias sobre A. Por ejemplo, si A es $\{0,1\}$, entonces existen exactamente 16 relaciones binarias sobre $\{0,1\}$.

Cierto tipo de relaciones binarias aparecen con mucha frecuencia en Matemáticas y por esto han recibido un nombre especial. Introduciremos algunas de ellas a continuación.

Definición 5.9. *Sea R una relación binaria sobre un conjunto A.*

1. *Se dice que R es* ***reflexiva****, si $(a, a) \in R$ para todo $a \in A$. De manera equivalente, tenemos que R es reflexiva si*

$$aRa, \text{ para todo } a \in A.$$

2. *Se dice que R es* ***simétrica****, si cada vez que $(a, b) \in R$ entonces también se cumple que $(b, a) \in R$. Es decir*

$$\text{Si } aRb, \text{ entonces } bRa.$$

3. *Se dice que R es* ***antisimétrica****, si cada vez que $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$, entonces se tiene que $a = b$. Es decir*

$$\text{Si } aRb \text{ y } bRa, \text{ entonces } a = b.$$

4. *Se dice que R es* ***transitiva****, si dados $a, b, c \in A$ tales que $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, entonces se cumple que $(a, c) \in R$. Es decir*

$$\text{Si } aRb \text{ y } bRc, \text{ entonces } aRc.$$

En la vida diaria usamos con frecuencia relaciones transitivas. Por ejemplo, la relación *más temprano que* entre sucesos en el tiempo, *más pesado que* entre objetos, *dentro de* entre objetos son todas relaciones transitivas. También usamos relaciones que no son transitivas. Por ejemplo, la relación *ser padre de* entre personas no es una relación transitiva. Algunos juegos usan reglas que dan lugar a una relación no transitiva. Por ejemplo, la regla del conocido juego infantil *Piedra (I), Papel (P) o Tijera (T)* establece que I le gana a T, T le gana a P , P le gana a I. Pero I no le gana a P y por lo tanto esta relación no es transitiva.

Ejemplo 5.10. Consideremos la relación R sobre $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dada por

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}.$$

(a) R es reflexiva, pues para cada $a \in \{1, 2, 3, 4\}$ se cumple que $(a, a) \in R$.

(b) R no es simétrica, pues por ejemplo tenemos que $(1, 2) \in R$ pero $(2, 1) \notin R$.

(c) R es transitiva, para esto debemos verificar que si (a, b) y (b, c) están en R, entonces (a, c) también pertenece a R. Veamos algunos casos concretos. Por ejemplo, $(1, 2), (2, 4) \in R$ y vemos que $(1, 4)$ también pertenece a R. Otro ejemplo, $(1, 3), (3, 3)$ están en R y vemos que $(1, 3)$ también está en R. Por supuesto, los dos casos que hemos verificado no garantizan que la relación sea transitiva. Debemos verificar **todos** los casos posibles (¡esto lo dejamos al lector!). Otra manera de convencerse de que R es transitiva, más fácil que la de verificar todos los casos posibles, es observando que R es en realidad la relación de divisibilidad entre los elementos de $\{1, 2, 3, 4\}$. En efecto, observe que para $a, b \in \{1, 2, 3, 4\}$, se cumple que

$$(a, b) \in R \text{ si, y sólo si, } a \text{ divide a } b.$$

Ahora es más fácil convencerse que es R es transitiva, pues si a divide a b y b divide a c, entonces a divide a c. (¡Verifíquelo!).

(d) R es antisimétrica. Supongamos que $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$, entonces por una simple inspección vemos que necesariamente (a, b) es uno de los siguientes pares ordenados: $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ o $(4, 4)$. Esto muestra que R es antisimétrica.

□

Ejemplos 5.11. 1. Consideremos la relación R sobre $\{1, 2, 3, 4\}$ dada por

$$R = \{(1, 2), (2, 3), (4, 1), (4, 4)\}.$$

Vemos que esta relación no es reflexiva, pues $(1, 1) \notin R$. No es simétrica, pues $(4, 1) \in R$ pero $(1, 4) \notin R$. Tampoco es transitiva, pues $(1, 2) \in R$ y $(2, 3) \in R$ pero $(1, 3) \notin R$. Por último, R es antisimétrica, pues no existe un par (a, b) tal que $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$, con $a \neq b$.

2. Considere la relación $\subseteq$ sobre $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$. Esta relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva. La reflexividad se debe a que, como sabemos, para todo conjunto B se cumple que $B \subseteq B$. La transitividad fue mostrada en una sección anterior donde probamos que si $B \subseteq C$ y $C \subseteq D$, entonces $B \subseteq D$. Esta relación es antisimétrica, pues si $B \subseteq C$ y $C \subseteq B$ sabemos que esto implica que $B = C$. Y por último $\subseteq$ no es simétrica, pues por ejemplo $\{1\} \subseteq \{1, 2\}$ pero $\{1, 2\} \not\subseteq \{1\}$.

3. La relación de igualdad sobre un conjunto A. Podemos escribir esta relación de la manera siguiente

$$\{(a, b) \in A \times A : \; a = b\}.$$

Es claro entonces que esta relación consiste de los pares de la forma (a, a) para cada $a \in A$. Dejamos al lector la verificación de que esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva.

□

Los ejemplos anteriores ilustran la forma en que mostraremos que una relación R **no** tiene alguna de las cuatro propiedades que estamos estudiando (reflexividad, transitividad, simetría o antisimetría). Lo que hicimos fué conseguir un contraejemplo de la propiedad en cuestión. Por ejemplo, para mostrar que una relación R no es transitiva debemos conseguir tres elementos a, b y c en el conjunto donde está definida la relación tales que (a, b) y (b, c) **estén** en R pero (a, c) **no** esté en R.

Le dejamos al lector la tarea de decir explícitamente (de manera similar a como lo hicimos en el párrafo anterior con la transitividad) qué se debe buscar para mostrar que una relación R no es reflexiva. Haga lo mismo para las propiedades de simetría y antisimetría.

Para mostrar que una relación tiene alguna de estas cuatro propiedades no podemos dar una "receta" general que funcione para todos los casos. En cada caso debemos analizar la relación dada y buscar la manera de mostrar la propiedad en cuestión.

Ejercicios 5.2

1. Sea $X = \{1, 2, 3\}$. Considere las siguientes relaciones en X. ¿Cuáles son reflexivas?, ¿Cuáles son transitivas?, ¿cuáles son simétricas? y ¿Cuáles son antisimétricas?. Determine su dominio y su rango.
   a) $R = \emptyset$.
   b) $R = \{(1, 1)\}$.
   c) $R = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$.
   d) $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$.
   e) $R = X \times X$.
2. Considere las relaciones entre personas: "ser padre de", "ser hijo de", "ser esposo de" y "ser hermano de ". Determine si son reflexivas, simétricas y/o transitivas.
3. Considere cada una de las siguientes relaciones en $\mathbb{Z}$. ¿Cuáles son reflexivas?, ¿Cuáles son transitivas?, ¿Cuáles son simétricas? y ¿Cuáles son antisimétricas?. Determine su dominio y su rango.
   a) $xRy \Leftrightarrow x + y < 3$.
   b) $xRy \Leftrightarrow x + y = 1$.
   c) $xRy \Leftrightarrow x^2 + x = y^2 + y$.
   d) $xRy \Leftrightarrow y = 2$.
   e) $xRy \Leftrightarrow x$ divide a y.
   f) $xRy \Leftrightarrow$ x e y son primos relativos.

g) $xRy \Leftrightarrow |x| = |y|$ (donde $|x|$ es el valor absoluto de x).

4. Determine si las siguientes relaciones son reflexivas, simétricas, antisimétricas y/o transitivas. Determine su rango.

   a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \; x + y = 2\}$.
   b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Q} : \; x \cdot y = 0\}$.
   c) $R = \{(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \; A \cup B \subseteq \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$.

5. Dos mujeres están sentadas en el poyo de una ventana. Al ver que se acercan dos hombres una de ellas dice:

   " Allá vienen nuestros padres, padres de nuestros hijos, esposos de nuestras madres y nuestros propios maridos".

   Explique si lo que la mujer dijo es posible. En que caso que lo sea, ¿qué relación guardan entre sí las dos mujeres?

6. ¿Existirá alguna relación que sea a la vez simétrica y antisimétrica?

7. Sea R una relación sobre un conjunto A. Muestre que R es reflexiva si, y sólo si, $\{(a, a) : a \in A\} \subseteq R$.

8. En los siguientes ejercicios daremos una "demostración" que debe ser corregida. Justifique su respuesta.

   a) **Afirmación:** Si la relación R es simétrica y transitiva, entonces también es reflexiva.
   "Demostración": Ya que R es simétrica, tenemos que si $(x, y) \in R$, entonces $(y, x) \in R$. Luego como $(x, y), (y, x) \in R$ y R es transitiva, entonces $(x, x) \in R$ y por lo tanto R es reflexiva. □

   b) **Afirmación:** Si las relaciones R y S son transitivas, entonces la relación $R \cap S$ es transitiva.
   "Demostración": Supongamos que $(x, y) \in R \cap S$ y $(y, z) \in R \cap S$. Entonces $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in S$. Luego $(x, z) \in R \cap S$. □

   c) **Afirmación:** Si las relaciones R y S son simétricas, entonces la relación $R \cap S$ es simétrica.
   "Demostración": Sea

   $$R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (3, 2), (2, 3), (2, 2)\}$$

   y

   $$S = \{(2, 3), (3, 2), (2, 2), (3, 4), (4, 3)\}.$$

   Entonces $R \cap S = \{(2, 3), (3, 2), (2, 2)\}$. Tenemos que R, S y $R \cap S$ son simétricas. □

9. Existen 8 posibles combinaciones de las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad. A continuación le pedimos que muestre que todas esas combinaciones son posibles. Sea $A = \{1, 2, 3\}$. Defina una relación sobre A que satisfaga lo indicado.

    a) Que no sea ni reflexiva, ni simétrica ni transitiva.

    b) Que sea reflexiva y no sea ni simétrica ni transitiva.

    c) Que no sea reflexiva, sea simétrica y no sea transitiva.

    d) Que no sea reflexiva, ni simétrica, pero sea transitiva.

    e) Que sea reflexiva y simétrica, pero no sea transitiva.

    f) Que sea reflexiva, no sea simétrica y sea transitiva.

    g) Que no sea reflexiva, sea simétrica y transitiva.

    h) Que sea reflexiva, simétrica y transitiva.

10. Demuestre que si R es una relación binaria simétrica sobre un conjunto A, entonces el rango y el dominio de R son iguales.

11. Sea R una relación sobre un conjunto A. Para cada $x \in A$ definimos los conjuntos C_x y D_x de la manera siguiente:

$$C_x = \{z \in A : (x, z) \in R\} \qquad D_x = \{z \in A : (z, x) \in R\}.$$

    a) Considere la relación R sobre $\{1, 2, 3\}$ dada por $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$. Determine C_1, C_2, C_3, D_1, D_2 y D_3 y muestre que

$$C_1 \cup C_2 \cup C_3 = rango(R) \qquad \text{y} \qquad D_1 \cup D_2 \cup D_3 = dom(R).$$

    b) Para cada una de las relaciones del Ejercicio 1 de §5.2 determinar C_x y D_x para cada $x \in \{1, 2, 3\}$.

    c) Haga lo mismo que en la pregunta anterior pero ahora para cada una de las relaciones del Ejercicio 3 de §5.2 (en este caso A es $\mathbb{Z}$).

12. Sea R una relación sobre $\mathbb{N}$ y $C \subseteq \mathbb{N}$. Diga justificadamente si las siguientes afirmaciones son equivalentes.

    a) $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})\ [(x, y) \in R \to x \in C]$.

    b) $(\forall x \in \mathbb{N})\ [((\exists y \in \mathbb{N})\,(x, y) \in R) \to x \in C]$.

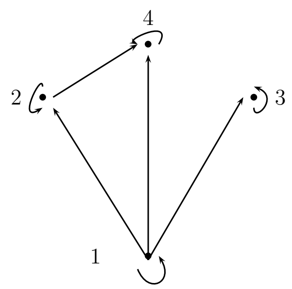
    Trate con ejemplos concretos para R y C.

5.3. Grafos y Digrafos

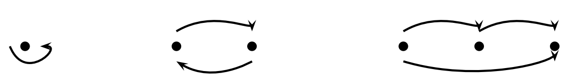
Las relaciones binarias sobre un conjunto pueden ser representadas gráficamente a través de unos diagramas que se conocen como **digrafos**. Veamos un ejemplo: consideremos la relación R sobre $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dada por

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}.$$

Ya vimos que R corresponde a la relación de divisibilidad sobre A. Para establecer el digrafo de esta relación, marcamos primero puntos o **vértices** que representan los elementos de A, en este caso debemos dibujar 4 puntos. A continuación, si un par (x, y) está en la relación, se traza una flecha (llamada **arco dirigido**) desde x hasta y. En nuestro caso, tenemos el siguiente digrafo



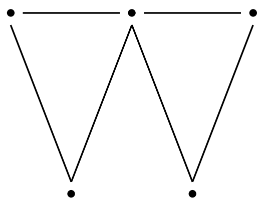
Las nociones de reflexividad, simetría y transitividad de una relación se pueden detectar observando los digrafos correspondientes. Por ejemplo, para que una relación sea reflexiva, en cada vértice de su digrafo debe existir un **lazo** (es decir, una arco de un vértice en sí mismo). Para que una relación sea simétrica, se debe cumplir que si existe una flecha de x a y, entonces también existe una de y a x. Para que la relación sea transitiva se debe cumplir que si existe un "camino" entre dos vértices x y z que sigan la dirección de las flechas debe existir la correspondiente flecha de x a z.



reflexividad simetría transitividad

En general un **grafo** es un conjunto de vértices y de **lados** o **aristas** entre los vértices (sin especificar la dirección). Así que los **di**grafos son los grafos donde se especifica la **di**rección de las aristas.

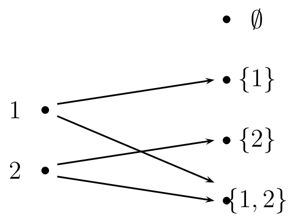
Ejemplo 5.12. El siguiente diagrama representa un grafo



Una relación binaria entre dos conjuntos A y B también la podemos representar gráficamente. En este caso ubicaremos el conjunto A a la izquierda, B a la derecha y dibujaremos flechas que salen de los puntos de A y terminan en los puntos de B de acuerdo a lo especificado por la relación. Veamos un ejemplo. Sea R la relación de pertenencia entre los elementos de $\{1,2\}$ y sus subconjuntos. Es decir,

$$R = \{(x, A) \in \{1,2\} \times \mathcal{P}(\{1,2\}) : \ x \in A\}.$$

Podemos representar R con el siguiente diagrama:



Ejercicios 5.3

1. Haga el digrafo de la relación de prelación entre las siguientes asignaturas del pensum de Matemáticas: Cálculo 1, 2 y 3; Elementos; Conjuntos; Geometría Euclidiana; Geomertría diferencial; Algebra Lineal 1 y 2; Análisis 1 y 2.

2. Determine explícitamente todas las relaciones binarias que puedan ser definidas sobre el conjunto $\{0,1\}$. Haga el digrafo de cada una de ellas. Determine cuáles de ellas son reflexivas, simétricas, transitivas y/o antisimétricas.

3. Haga el digrafo de cada una las relaciones binarias que puedan ser definidas entre los conjuntos $\{0,1\}$ y $\{a,b\}$. ¿Qué puede decir si en lugar de $\{0,1\}$ usamos $\{0,1,2\}$?

4. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : \ 1 \leq n \leq 12\}$. Sea R la relación de divisibilidad entre los elementos de A, es decir $(x,y) \in R$ si x divide a y. Haga el digrafo de R.

5. Considere la siguiente relación sobre $\mathcal{P}(\{1,2\})$:

$$R = \{(A,B) \in \mathcal{P}(\{1,2\}) : \; A \cap B = \emptyset\}.$$

(i) Haga el digrafo de R.

(ii) Determine el dominio y el rango de R.

(iii) Determine si R es reflexiva, simétrica, transitiva o antisimétrica.

6. Considere la siguiente relación sobre $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$:

$$R = \{(A,B) \in \mathcal{P}(\{1,2,3\}) : \; A \cap B \neq \emptyset\}.$$

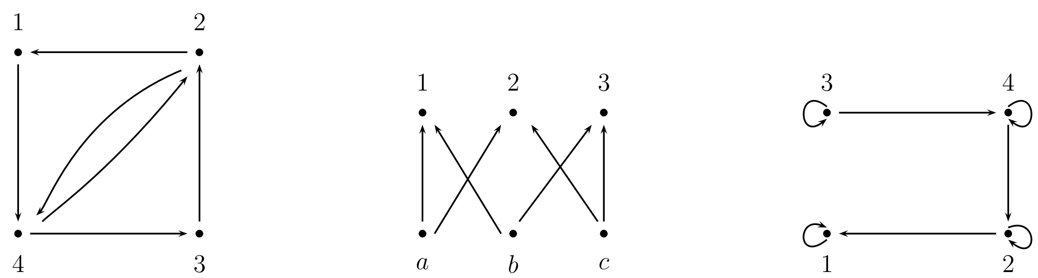
(i) Haga el digrafo de R.

(ii) Determine el dominio y el rango de R.

(iii) Determine si R es reflexiva, simétrica, transitiva o antisimétrica.

7. Considere la relación $\subseteq$ sobre el conjunto $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$. Haga el digrafo.

8. Escriba la relación correspondiente a cada digrafo de la figura.



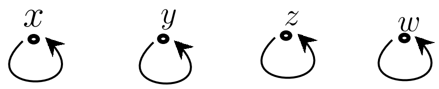
5.4. Relaciones de equivalencia

Una relación R sobre un conjunto A es de **equivalencia**, si es reflexiva, simétrica y transitiva. Las relaciones de equivalencia son de uso muy frecuente en matemáticas. En esta sección las estudiaremos con un poco más de atención. Veamos primero un ejemplo de relación de equivalencia.

Ejemplo 5.13. La relación de equivalencia mas sencilla posible es la igualdad. En efecto, en cualquier conjunto X considere la relación

$$R = \{(x,x) : \; x \in X\}.$$

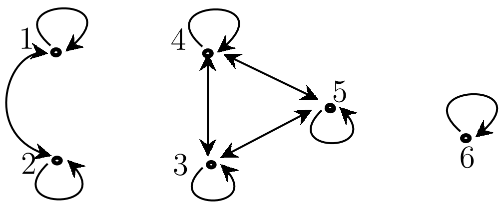
Es inmediato verificar que R es reflexiva, simétrica y transitiva. El digrafo de R luciría como el que sigue que corresponde al caso cuando $X = \{x,y,w,z\}$.



Ejemplo 5.14. Considere la siguiente relación sobre el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$R = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (1, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (6, 6)\}$.

El lector puede verificar que R es reflexiva, simétrica y transitiva. El digrafo de R se indica a continuación.



Ejemplo 5.15. Considere la siguiente relación sobre $\mathbb{Z}$:

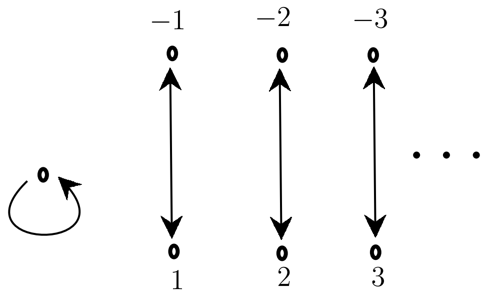
$$(x, y) \in R \text{ si } y = x \text{ ó } y = -x.$$

Afirmamos que R es una relación de equivalencia. Es claro que $(x, x) \in R$ para todo $x \in \mathbb{Z}$, es decir R es reflexiva. Para verificar que es simétrica, sean x, y enteros tales que $(x, y) \in R$. Entonces tenemos dos alternativas:

(i) Suponga que $y = x$. En este caso se cumple que $(y, x) \in R$.

(ii) Suponga que $y = -x$. En este caso se tiene que $x = -y$ y por lo tanto $(y, x) \in R$.

Falta verificar que R es transitiva. Dejamos al lector la tarea de convencerse de que si tenemos tres enteros x, y, z tales que $x \neq y$, $y \neq z$, $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, entonces necesariamente $x = z$. A continuación mostramos el digrafo de R.



A continuación introducimos un concepto asociado a las relaciones de equivalencia.

Definición 5.16. *Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Una* ***clase de equivalencia*** *respecto de la relación R es un subconjunto C de A que satisface la siguiente propiedad: Existe $x \in X$ tal que $C = \{y \in X : (x, y) \in R\}$.*

Lo primero que debemos observar es que una clase de equivalencia satisface que todos sus elementos están relacionados entre si. En efecto, sea C una clase de equivalencia y x el elemento dado por la defінción de clase, es decir, $C = \{y \in X : (x, y) \in R\}$. Sean $y, z \in C$, queremos mostrar que $(y, z) \in R$. Tenemos que $(x, y), (x, z) \in R$. Como R es simétrica, entonces $(y, x) \in R$. Por ser R transitiva, tenemos que $(y, z) \in R$.

Es claro que el concepto de clase de equivalencia depende de la relación R en cuestión, por esto es común (y a veces necesario) referirse a ellas como R-clases de equivalencia. Como las relaciones de equivalencia son tan importantes en Matemáticas, con frecuencia usaremos el símbolo $\sim$ para denotarlas. Así, en lugar de escribir xRy, usaremos la notación

$$x \sim y,$$

que se acostumbra leer como *x es equivalente a y* [1].

Dado $x \in X$, usaremos la siguiente notación:

$$[x]_R = \{y \in X : (x, y) \in R\},$$

o también $[x]_\sim$, si usamos $\sim$ para denotar la relación de equivalencia.

De la propia definición de clase de equivalencia, obtenemos que $[x]_R$ es una clase de equivalencia para cada $x \in X$. Y recíprocamente, si C es una R-clase de equivalencia, entonces existe $x \in X$ tal que $C = [x]_R$.

Ejemplo 5.17. Considere la relación sobre el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ que vimos en el Ejemplo 5.14:

$$R = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (1, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (6, 6)\}.$$

Tenemos que hay tres clases de equivalencia:

$$\{1, 2\}, \ \{3, 4, 5\}, \ \{6\}.$$

Observe además que $[1]_R = [2]_R = \{1, 2\}$, $[3]_R = [4]_R = [5]_R = \{3, 4, 5\}$ y $[6]_R = \{6\}$.

Ejemplo 5.18. Recordemos (ver el Ejemplo 5.15) la relación de equivalencia $\sim$ sobre $\mathbb{Z}$ dada por:

$$x \sim y, \ \text{ si } y = x \text{ ó } y = -x.$$

Una clase de equivalencia respecto de $\sim$ es un conjunto de la forma $\{x, -x\}$ donde x es un entero. Por ejemplo, $\{1, -1\}$, $\{2, -2\}$ son clases de equivalencia. Pero $\{5, -5, 6, -6\}$ no lo es, pues 5 y 6 no están relacionados. ¿Existirá alguna clase de equivalencia que no tenga dos elementos? $\square$

Ejemplo 5.19. Considere la siguiente relación binaria sobre $\mathbb{Z}$.

$$x \sim y \ \Leftrightarrow \ x - y \text{ es un múltiplo de } 3.$$

[1] También es común usar los símbolos $\approx$, $\cong$ para denotar relaciones de equivalencia.

Como 0 es múltipo de 3, entonces $x \sim x$, es decir $\sim$ es reflexiva. Por otra parte, si $x-y$ es un múltiplo de 3, entonces $x-y = 3m$ para un entero m. En consecuencia, $y-x = 3\cdot(-m)$ y también es un múltiplo de 3. Esto muestra que $\sim$ es simétrica. Por último, veamos que también es transitiva. Supogamos que $x \sim y$ y $y \sim z$. Entonces existen enteros m y n tales que $x - y = 3m$ y $y - z = 3n$. Sumando término a término esas igualdades, obtenemos $x - z = 3n + 3m = 3(n + m)$ y en consecuencia $x \sim z$, esto dice que $\sim$ es transitiva. En resumen, hemos mostrado que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Afirmamos que existe exactamente 3 clases de equivalencia. Para mostrar esa afirmación debemos recordar un resultado que vimos antes: Todo entero n satisface alguna de las siguientes alternativas: (i) $n = 3m$ para algún entero m, (ii) $n = 3m+1$ para algún entero m o (iii) $n = 3m + 2$ para algún entero m (ver el Ejemplo 4.21). Mostraremos que las tres clases de equivalencia respecto de $\sim$ son: la clase del 0, la del 1 y la del 2. En efecto, mostraremos que cada una de las alternativas (i), (ii) y (iii) corresponde a estar en una clase. Sea n un entero. Entonces

(1) Si $n = 3m$ para algún entero m, entonces $0 \sim n$.
(2) Si $n = 3m + 1$ para algún entero m, entonces $n - 1 = 3n$ y asi $1 \sim n$.
(3) Si $n = 3m + 2$ para algún entero m, entonces $n - 2 = 3m$ y así $2 \sim n$.

Finalmente, observemos que $0, 1$ y 2 no son equivalentes entre si, esto es, su respectivas clases de equivalencia son diferentes. Por lo tanto, $[0]_\sim$, $[1]_\sim$ y $[2]_\sim$ son las únicas clases de equivalencia respecto de $\sim$. □

Ejemplo 5.20. Considere la siguiente relación binaria sobre $\mathbb{R}$:

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; x - y \in \mathbb{Z}.$$

Afirmamos que $\sim$ es una relación de equivalencia. En efecto, como $x - x = 0$ y 0 es un entero, entonces $\sim$ es reflexiva. Para ver que es simétrica, supongamos que $x \sim y$. Esto dice que $x - y \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $y - x = -(x - y)$ también es un entero y esto indica que $y \sim x$. Por último, verifiquemos que $\sim$ es transitiva. Supongamos que $x \sim y$ e $y \sim z$. Queremos mostrar que $x \sim z$. En efecto, por hipótesis tenemos que $x-y \in \mathbb{Z}$ y $y-z \in \mathbb{Z}$. Notemos que

$$x - z = (x - y) + (y - z).$$

Como la suma de dos enteros es un número entero, entonces $x - z \in \mathbb{Z}$. Es decir, $x \sim z$. Por ejemplo, $\mathbb{Z}$ es una clase de equivalencia, en efecto, $\mathbb{Z} = \{y \in \mathbb{R} : \; 0 \sim y\}$. En general, dado un real r cualquiera tenemos que

$$[r]_\sim = \{r + m : \; m \in \mathbb{Z}\}$$

Por ejemplo, veamos cual es la clase de equivalencia $\sqrt{2}$:

$$[\sqrt{2}]_\sim = \{\sqrt{2} + m : \; m \in \mathbb{Z}\} = \{\cdots, \sqrt{2} - 2, \sqrt{2} - 1, \sqrt{2}, \sqrt{2} + 1, \sqrt{2} + 2, \cdots\}$$

□

Ejemplo 5.21. Considere los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$. Sea $n \in \mathbb{Z}$,

$$C_n = \{x \in \mathbb{R} : n \leq x < n+1\} = [n, n+1)$$

Observemos que $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} C_n$ y además que los conjuntos C_n son disjuntos entre si, esto es, $C_n \cap C_m = \emptyset$ si $n \neq m$. Mostraremos que se puede definir una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$ de tal manera que sus clases de equivalencia sean precisamente los conjuntos C_n. En efecto, considere la siguiente relación binaria sobre $\mathbb{R}$:

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x, y \in C_n.$$

Afirmamos que $\sim$ es una relación de equivalencia. En efecto,

(i) Reflexividad y simetría son evidentes.

(ii) Veamos que $\sim$ es transitiva. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$ y supongamos que $x \sim y$ e $y \sim z$. Entonces existen $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que $x, y \in C_n$ y $y, z \in C_m$. Como $y \in C_n \cap C_m$ y los C_k son disjuntos entre si, entonces necesariamente $n = m$ y en consecuencia $x, z \in C_n$. Esto muestra que $x \sim z$.

Por último, observemos que si $x \in C_n$, entonces $[x]_\sim = C_n$. Esto muestra que los conjuntos C_n son exactamente las clases de equivalencia respecto de $\sim$.

Quiza el lector ya observó que los reales en C_n son precisamente los reales que tienen a n como parte entera. Así que $x \sim y$ simplemente significa que x y y tienen la misma parte entera. □

Una colección de conjuntos como los C_n del ejemplo anterior se llaman una *partición* del conjunto X.

Como lo mostraremos a continuación, el ejemplo anterior ilustra lo que ocurre con todas las relaciones de equivalencia.

Teorema 5.22. *Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto X.*

(i) Si C y D son dos R-clases de equivalencia distintas, entonces $C \cap D = \emptyset$.

(ii) La unión de todas las R-clases de equivalencia es igual a X.

Demostración. (i) Sean C, D dos clases de equivalencia distintas. Entonces existen $x, y \in X$ tales que $C = [x]_R$ y $D = [y]_R$. Supongamos que $C \cap D \neq \emptyset$ y llegaremos a una contradicción. Sea $z \in C \cap D$, entonces $(x, z) \in R$ y $(y, z) \in R$. Luego $(z, y) \in R$ por ser R simétrica y en consecuencia $(x, y) \in R$ por la transitividad de R. Mostraremos que $C = D$, lo que contradice la hipótesis. En efecto, sea $w \in C$. Entonces $(x, w) \in R$, como $(y, x) \in R$, entonces $(y, w) \in R$ y esto dice que $w \in D$. Recíprocamente, si $w \in D$ de manera similar se muestra que $w \in C$. Es decir, $C = D$, una contradicción.

(ii) Es inmediato que la unión de todas las clases de equivalencia es un subconjunto de X, pues cada clase de equivalencia es un subconjunto de X. Para la otra inclusión, sea $x \in X$ un elemento arbitrario. Entonces por ser R reflexiva, se tiene que $x \in [x]_R$, y esto muestra que x pertenece a la unión de todas las clases de equivalencia. □

Ejemplo 5.23. Vamos a definir una relación binaria sobre $\mathbb{R}^2$. Ponga atención a la notación, pues los elementos de $\mathbb{R}^2$ son pares ordenados.

Recordemos que si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $c \cdot (a,b) = (ca, cb)$. Por ejemplo $(2,-1) \sim (4,-2)$ pues $(4,-2) = 2 \cdot (2,-1)$.

$$(x,y) \sim (w,z) \text{ si } (w,z) = c \cdot (x,y) \text{ para algún real } c \in \mathbb{R} \text{ con } c \neq 0\ .$$

Es decir,

$$(x,y) \sim (w,z) \text{ si } w = c \cdot x \text{ y } z = c \cdot y \text{ para algún real } c \in \mathbb{R} \text{ con } c \neq 0\ .$$

Afirmamos que $\sim$ es una relación de equivalencia.

(i) $\sim$ es reflexiva. En efecto, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tenemos que $(x,y) \sim (x,y)$, pues $(x,y) = 1 \cdot (x,y)$.

(ii) $\sim$ es simétrica. En efecto, sean $(x,y),(w,z) \in \mathbb{R}^2$ tales que $(x,y) \sim (w,z)$. Entonces existe un real no nulo c tal que $(w,z) = c \cdot (x,y)$. De esto se tiene que $(x,y) = (1/c) \cdot (w,z)$. Es decir, $(w,z) \sim (x,y)$.

(iii) Falta verificar que $\sim$ es transitiva. Supongamos que $(x,y),(w,z),(u,v) \in \mathbb{R}^2$ son tales que $(x,y) \sim (w,z)$ y $(w,z) \sim (u,v)$. Debemos mostrar que $(x,y) \sim (u,v)$. Por definición de la relación $\sim$, tenemos que existen dos reales no nulos c, d tales que $(w,z) = c \cdot (x,y)$, y $(u,v) = d \cdot (w,z)$. De lo anterior tenemos que $(u,v) = dc \cdot (x,y)$. Como $dc \neq 0$, entonces hemos mostrado que $(x,y) \sim (u,v)$.

□

Ejercicios 5.4

1. Considere las siguientes relaciones binarias definidas sobre el conjunto de todos los estudiantes de la UIS. Determine si son de equivalencia.
   a) x está relacionado con y, si tienen la misma edad.
   b) x está relacionado con y, si están inscritos en el mismo curso.
   c) x está relacionado con y, si sus números cédula de terminan en un número par.
2. A continuación daremos una lista de propiedades que sirven para definir un relación binaria sobre $\mathbb{R}$. Determine si son de equivalencia. En caso que lo sea, describa lo mejor que pueda las clases de equivalencia.
   a) $x^2 = y^2$.
   b) $x^3 = y^3$.
   c) $x - y \in \mathbb{Q}$.
   d) $x - y \notin \mathbb{Z}$.

e) $x - y \in \mathbb{N}$.

f) $x - y \in \mathbb{R}$.

g) $x - y \notin \mathbb{R}$.

h) $-1 \leq x - y \leq 1$.

3. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y $B \subseteq A$. Considere la siguiente relación sobre A:

$$R = (B \times B) \cup (A \setminus B) \times (A \setminus B).$$

Muestre que R es una relación de equivalencia. Dibuje el digrafo asociado a R.

4. Halle todas las relaciones de equivalencia sobre el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$.

5. Sea $\sim$ definida en $\mathbb{Z}$ de la siguiente manera: $x \sim y$, si $x - y$ es divisible por 4. Muestre que $\sim$ es de equivalencia y que existen exactamente 4 clases de equivalencia. Generalize este problema usando ahora divisibilidad por un entero diferente de 4.

6. Considere la siguiente relación sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

$$(n, m) \sim (n', m') \Leftrightarrow n = n'.$$

Muestre que $\sim$ es una relación de equivalencia y halle las clases de equivalencia. ¿Podría hacer el digrafo de esa relación?

7. Considere la siguiente relación sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

$$(n, m) \sim (n', m') \Leftrightarrow n = m'.$$

¿Es $\sim$ una relación de equivalencia?

8. Considere las siguientes relaciones sobre el conjunto indicado. Muestre que son de equivalencia y determine la clase de equivalencia indicada.

   a) Sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por $(x, y) \sim (w, z)$, si $x + y = w + z$. Determine todos los elementos de la clase de $(1, 2)$.

   b) Sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por $(x, y) \sim (w, z)$, si $x - y = w - z$. Determine todos los elementos de la clase de $(1, 1)$.

   c) Responda las preguntas anteriores, pero ahora sobre el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ usando las mismas reglas que en los dos ejercicios anteriores. ¿Qué puede decir si definimos esas relaciones sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?

9. Considere la siguiente relación sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$(x, y) \sim (w, z) \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R}\ [(y = x^2 + r) \wedge (z = w^2 + r)].$$

Muestre que

$$(x, y) \sim (w, z) \Leftrightarrow\ (y - x^2 = z - w^2).$$

Muestre que $\sim$ es una relación de equivalencia. Dibuje en el plano la clase de equivalencia de $(0, 0)$ y la de $(0, 1)$.

10. Considere la siguiente relación sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Diremos que A está relacionado con B, si $A \triangle B$ es finito. Muestre que esta relación es de equivalencia.

11. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Considere la siguiente relación sobre A:

$$x \sim y, \text{ si existen reales } a \leq b \text{ tales que } x, y \in [a, b] \text{ y } [a, b] \subseteq A.$$

Muestre que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre A.

12. *a*) Sean R y S dos relaciones transitivas sobre un conjunto A. Muestre que $R \cap S$ es una relación transitiva sobre A. ¿Podemos decir lo mismo sobre la propiedad reflexiva y la propiedad simétrica?

    b) Responda la misma pregunta pero ahora en relación a $R \cup S$.

5.5. Relaciones de orden

Otro tipo de relaciones que usamos con frecuencia en Matemáticas son las relaciones de orden. Una relación R sobre un conjunto A es de **orden**, si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Ejemplo 5.24. 1. La relación $\leq$ en $\mathbb{N}$ es una relación de orden. Observe que nos estamos refiriendo a la siguiente colección de pares ordenados:

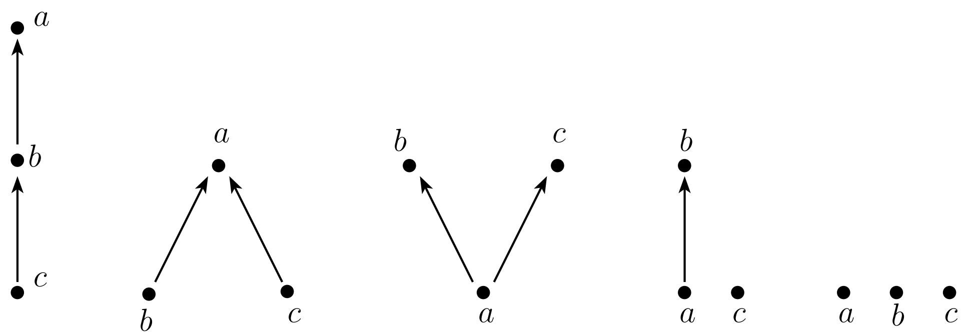
$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \; x \leq y\}.$$

Veamos que R es reflexiva. En efecto, para todo natural n tenemos que $n \leq n$. Por otra parte, si $n \leq m$ y $m \leq p$, entonces $n \leq p$, es decir R es transitiva. Por último, si $n \leq m$ y $m \leq n$, entonces necesariamente tenemos que $n = m$. Por lo tanto R es antisimétrica.

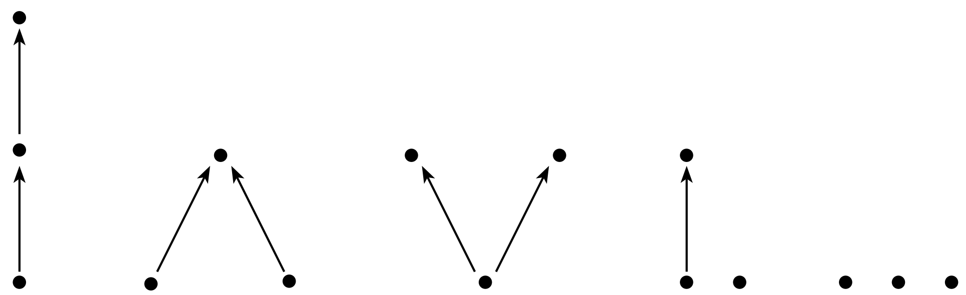
2. En el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, la relación de subconjunto $\subseteq$ es un orden. Dejamos como ejercicio al lector verificar que es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

□

Ejemplo 5.25. *Sea $X = \{a, b, c\}$. Podemos describir todos los ordenes posibles en X. Comencemos con algunos ejemplos:*



Observemos que si no tomamos en cuenta las “etiquetas” a, b y c, esas son todas las “formas” posibles para ordenar tres puntos:



En la siguiente tabla indicamos el número de órdenes posibles en conjuntos de a lo sumo 6 elementos. La columna “sin etiquetas” se refiere al número de órdenes posibles si no tomamos en cuenta los elementos específicos.

$\|X\|$	# órdenes	Sin etiquetas
1	1	1
2	3	2
3	19	5
4	219	16
5	4.231	63
6	130.023	318

Ejemplo 5.26. (El orden lexicográfico en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$). *Consideremos el siguiente orden* $\preceq_{lex}$ *sobre* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

$$(a, b) \preceq_{lex} (c, d) \ \textit{ si (i) } a < b \textit{ o (ii) } a = b \textit{ y } c \leq d$$

El orden lexicográfico debe su nombre a que se basa en el mismo criterio usado para ordenar las palabras en un diccionario. En efecto, los pares en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *que comienzan con* 0 *son todos menores que los que comienzan con un* 1. *Por ejemplo,*

$$(0,0) \ \prec_{lex} \ (0,1) \ \prec_{lex} \ (0,2) \ \prec_{lex} \ \cdots \ (1,0) \ \preceq_{lex} \ (1,1) \ \preceq_{lex} \ (1,2) \ \preceq_{lex} \ \cdots$$

Ejercicios 5.5

1. Haga un diagrama de todos los órdenes posibles sobre los conjuntos $\{a, b\}$ y $\{a, b, c, d\}$ (la última pregunta tiene una larga respuesta!)

2. Sea A un conjunto. Verifique que $\subseteq$ es una relación de orden sobre $\mathcal{P}(A)$.

3. Haga un diagrama que represente el orden $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$.

4. Sea R una relación de orden sobre un conjunto A. Considere la siguiente relación

$$S = \{(y, x) \in A \times A : \ (x, y) \in R\}.$$

Muestre que S es una relación de orden.

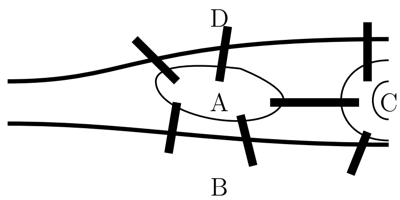
5. Sean R y S dos relaciones de orden sobre un conjunto A. Muestre que $R \cap S$ es una relación de orden.

5.6. Aplicaciones de los grafos

Los grafos tienen mucha importancia por la gran variedad de sus aplicaciones. En esta sección presentaremos tres problemas que se resolvieron usando grafos.

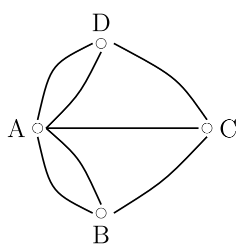
5.6.1. El problema de los puentes de Königsberg

El estudio de los grafos lo inició el matemático Leonhard Euler en 1736 resolviendo un viejo problema conocido como el *problema de los Puentes de Königsberg*. El problema era el siguiente: Dos islas que se hallan en el río Pregel en Königsberg (en la antigua Unión Soviética) están conectadas entre sí y con las márgenes del río por puentes como lo indica la figura.



El problema consiste en partir de cualquier lugar (A, B, C o D); seguir caminando y pasar por cada uno de los puentes exactamente una vez, y luego regresar al punto de partida. Tal ruta se llama un **circuito de Euler**.

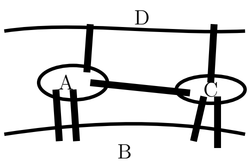
Euler representó este problema con un grafo donde los vértices corresponden a los lugares y los lados (arcos ó aristas) corresponden a los puentes.

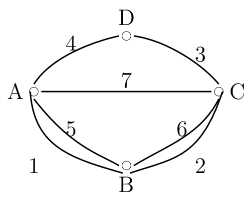


Euler demostró que no existe una solución para el problema de los puentes. De hecho mostró un resultado general sobre grafos que resuelve problemas similares al de los puentes de Königsberg. El método ideado por Euler para resolver este problema usa el concepto de la **valencia o grado** de un vértice. Se define la valencia de un vértice como el número de arcos que "tocan" al vértice. Por ejemplo, en el caso del problema de los puentes tenemos que las valencias de los vértices son: A tiene valencia 5, B, C y D tienen cada uno valencia 3. El teorema de Euler dice que para que exista un circuito de Euler es necesario que la valencia de cada vértice sea un número par. Como en el grafo asociado al problema de los puentes no se cumple esa condición, entonces no existe un circuito de Euler.

Euler también mostró que el recíproco es válido para cierto tipo de grafos. Diremos que un grafo es **conexo** si uno puede "viajar" entre dos vértices cualesquiera. Euler mostró que si la valencia de cada uno de los vértices de un grafo conexo es par, entonces en el grafo existe un circuito de Euler.

Consideremos ahora la siguiente situación.





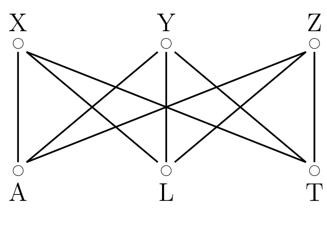
El digrafo correspondiente lo hemos dibujado a la derecha. En este caso si existe un circuito Euleriano. Por ejemplo,

$$A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{2} C \xrightarrow{3} D \xrightarrow{4} A \xrightarrow{5} B \xrightarrow{6} C \xrightarrow{7} A.$$

En la vida diaria surgen problemas donde se requiere construir circuitos Eulerianos. Considere, por ejemplo, el problema de conseguir una ruta para un cartero da tal manera que el cartero recorra cada calle una sola vez (este problema se conoce como el *problema del cartero chino*).

5.6.2. El problema "Agua, Luz y Teléfono"

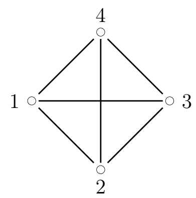
Imagínese que tenemos tres casas X, Y y Z a las que queremos instalar el servicio de agua (A), luz (L) y teléfono (T).

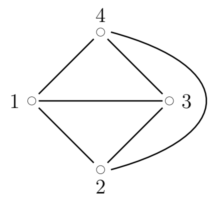


Quisiéramos hacer la instalación de tal forma que las líneas de luz y teléfono y las tuberías de agua no se crucen. ¿Es posible hacerlo? Para responder esta pregunta necesitaremos introducir otros conceptos sobre grafos.

En general en un grafo los lados pueden cruzarse. Los grafos que se pueden representar en un plano sin que se crucen su lados se llaman grafos **planos** o **planares**.

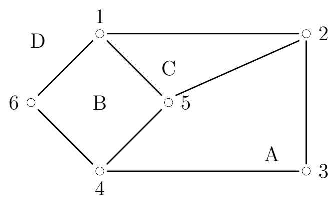
Por ejemplo, el grafo de la izquierda es planar, pues también lo podemos representar como en el diagrama de la derecha.





Podemos entonces enunciar el problema del Agua, Luz y Teléfono de manera equivalente preguntando si su grafo es planar. Si lo es, entonces la respuesta a la pregunta inicial es "sí" y si no es planar, entonces la respuesta es "no".

Cuando se representa en un plano un grafo conexo y plano, queda dividido en regiones contiguas llamadas **caras**. Por ejemplo, considere el siguiente grafo:



Hemos indicado sus 4 caras: A, B, C y D. Observe que D es la cara "exterior" del grafo. Euler notó que no importa como tracemos el grafo en un plano, el número de caras es el mismo. El número de caras (f) está determinado por el número de vértices (v) y el número de lados (e) mediante la fórmula siguiente

Fórmula de Euler para Grafos: Si G es un grafo plano, conexo, con e lados, v vértices y f caras, entonces

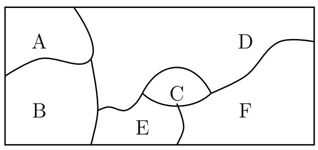
$$f = e - v + 2.$$

Por ejemplo, el grafo anterior tiene $f = 4$ caras, $e = 8$ lados y $v = 6$ vértices. Tenemos que $4 = 8 - 6 + 2$.

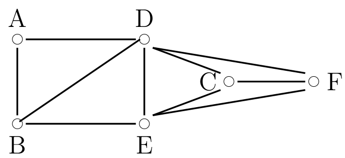
Usando esta fórmula es posible mostrar que el problema del Agua, Luz y Teléfono no tiene solución pues su grafo no es plano.

5.6.3. El problema de los cuatro colores

Cuando se colorea un mapa de países (o estados) se evita asignarle el mismo color a países que tengan frontera común. ¿Cuál es el mínimo número de colores que hace falta? La respuesta es que son suficientes cuatro colores. Esta pregunta estuvo sin responder desde el siglo XIX hasta el año 1976, cuando Kenneth Apel y Wolfgang Haken la respondieron (por cierto, haciendo uso del computador). Para ver qué relación guarda este problema con los grafos, considere por ejemplo el siguiente mapa



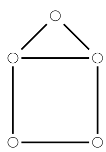
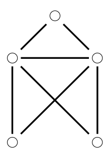
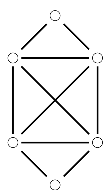
Le asociaremos un grafo a este mapa de la siguiente manera. A cada "país" le asociamos un vértice y colocamos un arco entre cada dos países que tengan frontera común. De esta manera obtenemos el siguiente grafo



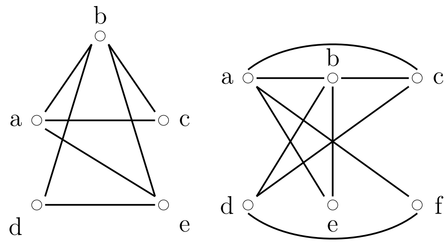
La pregunta original puede ser enunciada de manera equivalente en términos de grafos: ¿Cuántos colores son necesarios para colorear los vértices de un grafo de tal manera que dos vértices adyacentes no se les asigne el mismo color? Esta fué la pregunta que respondieron Apel y Haken.

Ejercicios 5.6

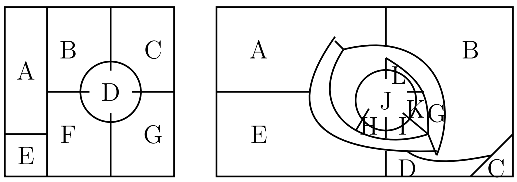
1. Considere los siguientes diagramas. Determine si existe un circuito de Euler.

2. Los siguiente grafos son planares. Trácelos de tal manera que no se crucen sus aristas.



3. Coloree los siguiente mapas usando a lo sumo cuatro colores. Haga el grafo asociado a cada mapa.



CAPÍTULO 6

FUNCIONES

El concepto de función es quizá uno de los conceptos más importantes de la Matemática. Todas las teorías matemáticas hacen uso de las funciones. En este capítulo estudiaremos las propiedades básicas de las funciones.

6.1. El concepto de función como relación

Un caso especial y muy importante de relación entre dos conjuntos es el que corresponde a la noción de función.

Definición 6.1. *Una relación R entre dos conjuntos A y B se dice que es una* ***función de*** *A* ***en*** *B si satisface la siguiente condición:*

$$\text{Para todo } a \in A \text{ existe un único } b \in B \text{ tal que } (a, b) \in R.$$

□

Observemos que en la definición de función se requiere que la relación cumpla con dos condiciones:

(1) Para cada elemento de $a \in A$ existe un elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$.

(2) El elemento b mencionado en la condición (1) es único.

Notemos que (1) nos dice que el conjunto A es el **dominio** de R y (2) nos asegura aún más, pues cada elemento de A está relacionado con un sólo elemento de B. El único elemento b al que a está asociado se le llama la **imagen** de a. Así que una función de A en B asigna a cada elemento de A uno de B y es por esto que las funciones también son llamadas **asignaciones**.

Ejemplos 6.2. 1. Sea $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ y $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3)\}$. Tenemos que R es una relación entre A y B. Pero R no es una función. Pues el 1 está relacionado con dos elementos de B, esto es, la condición (2) no se cumple. Observe que la condición (1) sí se cumple en este ejemplo.

2. Sea $A = \{a, b, c\}$, $B = \{3, 4\}$ y $R = \{(a, 3), (b, 3)\}$. Tenemos que R es una relación entre A y B. Pero R no es una función. Pues el elemento c no está relacionado con ningún elemento de B, esto es, la condición (1) no se cumple.

3. Sea $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ y $R = \{(1, 3), (2, 4)\}$. En este caso R es una función. Pues para cada $a \in A$ existe un único $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$.

$\square$

Las funciones se denotan generalmente con las letras f, g, h y en lugar de escribir "$a\ f\ b$", para indicar que a está relacionado con b, se escribe

$$f(a) = b.$$

Diremos que $f(a)$ (que se lee "f de a") es la **imagen** de a bajo f. También se dice "la imagen de a por f" o que b es el "valor" que toma f en a. Para indicar que f es una función de A en B escribimos

$$f : A \to B.$$

Ya dijimos que A se llama el **dominio** de f y a B se le llama **contradominio** o **codominio**. Un subconjunto de B que juega un papel importante en el estudio de las funciones es el **rango** el cual se define de la siguiente manera:

$$rango(f) = \{b \in B :\ b = f(a) \text{ para algún } a \in A\}.$$

El rango de una función es el conjunto formado por las imágenes de los elementos del dominio y es por esto que también se acostumbra llamarlo el **conjunto imagen**. Como veremos en los ejemplos, en general, B no es igual al rango.

El conjunto de todas las funciones de un conjunto A en un conjunto B se denota por

$$B^A.$$

Ejemplos 6.3. 1. Usualmente las funciones se presentan a través de una "regla" que asigna a cada elemento de A un único elemento de B. Por ejemplo, consideremos los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y la regla que asigna a cada número $a \in A$ el número $2a$. Usualmente expresamos esta regla de asignación escribiendo

$$f(a) = 2a,$$

pero también se acostumbra a escribir

$$a \mapsto 2a.$$

De esta manera hemos definido una función de A en B. El siguiente conjunto representa a f como un conjunto de pares ordenados:

$$\{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}.$$

2. Consideremos la regla $f(n) = n + 1$ que asigna a cada número natural n el número natural $n + 1$. Entonces $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función. Podemos expresar f como un conjunto de pares ordenados de la siguiente manera
$$\{(n, n + 1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \ n \in \mathbb{N}\}.$$
3. Sea A un conjunto cualquiera y consideremos la asignación $i(a) = a$, entonces i es una función de A en A llamada la **función identidad** del conjunto A.

$\square$

Para definir correctamente una función debemos especificar tres cosas:

(i) El dominio de la función.

(ii) El contradominio de la función.

(iii) La regla de asignación (o **ley de correspondencia**) entre los elementos del dominio y los del contradominio.

Al definir una ley de correspondencia es importante estar seguros de que en realidad los valores que le asignamos a cada elemento del dominio pertenecen al contradominio y además debemos verificar que a todo elemento del dominio le hemos asignado un elemento del contradominio.

Ejemplo 6.4. Considere la siguiente regla
$$x \mapsto \frac{x}{x-2}.$$
Con sólo esta información no tenemos bien definida una función. Pues no hemos especificado los valores que puede tomar la variable x. En otras palabras, debemos especificar el dominio de la función que queremos definir. Por otra parte, también debemos aclarar cuál es el contradominio de la función que estamos definiendo. Veamos algunas de las posibles alternativas:

(a) Sea $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \mathbb{Q}$ y $g(x) = \frac{x}{x-2}$. Entonces $g : A \to B$ es una función bien definida.

(b) Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \mathbb{Q}$ y $h(x) = \frac{x}{x-2}$. Entonces $h : A \to B$ no está bien definida, pues existe un elemento del dominio al cual la regla $x \mapsto \frac{x}{x-2}$ no le asigna ninguna imagen (¿cuál es?).

(c) Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$, $B = \mathbb{R}$ y $f(x) = \frac{x}{x-2}$. Entonces $f : A \to B$ es una función bien definida.

$\square$

¿Cuándo dos funciones son iguales? Para que dos funciones f y g sean iguales se deben cumplir las tres condiciones siguientes:

(i) f y g tienen el mismo dominio.

(ii) f y g tienen el mismo contradominio.

(iii) f y g tienen igual ley de correspondencia. Es decir, para todo x en el dominio de f (que debe ser igual al dominio de g) se debe cumplir que $f(x) = g(x)$.

Ejemplos 6.5. 1. En el Ejemplo 6.4 tenemos que las funciones f y g son distintas pues, aunque usan la misma ley de correspondencia, sus respectivos dominios no son iguales.

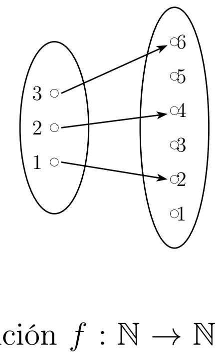
2. Considere las funciones $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dadas por $f(n) = 3n + 3$ y $g(n) = 5n + 3$. Estas funciones no son iguales, pues por ejemplo $f(1) = 6$ y $g(1) = 8$, es decir las leyes de correspondencia no asignan la misma imagen al número 1.

□

6.1.1. Representación gráfica de funciones

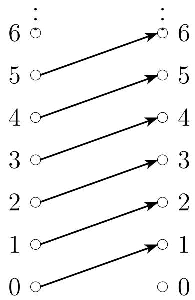
Como vimos en una sección anterior, las relaciones binarias se pueden representar con diagramas. En los ejemplos que presentamos a continuación veremos cómo se representan algunas funciones.

Ejemplo 6.6. Consideremos la función $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, dada por $f(a) = 2a$. Podemos representar esta función con el siguiente digrafo (a veces llamados *diagramas sagitales* pues se representan con flechas):



□

Ejemplo 6.7. Considere la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n) = n + 1$. Podemos representar esta función con el siguiente diagrama:



□

Ejemplo 6.8. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. La representación gráfica más usada es la siguiente:

Incluir gráfica

□

6.1.2. Funciones por partes y funciones características

Existen diferentes maneras de definir funciones, pero lo importante es dejar bien claro cuál es su dominio, su contradominio y la ley de correspondencia.

Ejemplo 6.9. Considere la función $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por:

$$h(x) = \begin{cases} 2x & \text{, si } x \text{ es par;} \\ 3x & \text{, si } x \text{ es impar.} \end{cases}$$

En este caso la imagen asignada a un elemento del dominio depende de si el número es par o impar. Por ejemplo, $h(0) = 0$, $h(2) = 4$, $h(4) = 8$, $h(1) = 3$, $h(3) = 9$, $h(5) = 15$, etc. Pero no hay ninguna duda sobre cómo determinar la imagen de cada número natural. Este tipo de función se dice que está *definida por partes.* □

Veremos en seguida un ejemplo importante de función definida por partes. Consideremos un subconjunto $A \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ cualquiera y definamos una función $f_A : \{1, 2, 3, 4\} \to \{0, 1\}$:

$$f_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{, si } x \notin A; \\ 1 & \text{, si } x \in A. \end{cases}$$

Observe que le hemos puesto el subíndice A a la notación de la función pues queremos indicar que la función está relacionada con el conjunto A. La función f_A se llama la **función característica de** A. También se le llama la **función indicatríz de** A. Veamos algunos ejemplos:

(i) Para $A = \{1\}$, tenemos que $f_{\{1\}}(1) = 1$ y $f_{\{1\}}(2) = f_{\{1\}}(3) = f_{\{1\}}(4) = 0$.

(ii) Para $A = \emptyset$, tenemos que $f_\emptyset(x) = 0$ para todo $x \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Las funciones características las podemos definir en general para cualquier conjunto U y cualquier subconjunto $A \subseteq U$ de la misma manera que los hicimos en el apartado anterior.

Definición 6.10. *Sea U un conjunto y A un subconjunto de U. La función característica de A es la función $f_A : U \to \{0, 1\}$ definida por*

$$f_A(x) = \begin{cases} 0 & , \textit{si } x \in U \setminus A; \\ 1 & , \textit{si } x \in A. \end{cases}$$

□

Ejemplo 6.11. Observemos que para cada U y cada $A \subseteq U$ tenemos una función.

1. Si $U = \mathbb{N}$, $A = \{1, 3, 5, 7\}$ y $B = \{2, 3, 7, 10, 15\}$ entonces

$$f_{\{1,3,5,7\}}(x) = \begin{cases} 0 & , \text{si } x \in \mathbb{N} \setminus \{1, 3, 5, 7\}; \\ 1 & , \text{si } x \in \{1, 3, 5, 7\}. \end{cases}$$

   Observemos que $A \cap B = \{3, 7\}$. El lector puede verificar que se cumple lo siguiente para todo $x \in \mathbb{N}$:

$$f_{A\cap B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x),$$

   esto tiene sentido, pues $f_A(x)$ y $f_B(x) \in \{0, 1\}$ y por lo tanto los podemos multiplicar.

2. Si $U = \mathbb{R}$ y $A = (1, 5)$, entonces

$$f_{(1,5)}(x) = \begin{cases} 0 & , \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus (1, 5); \\ 1 & , \text{si } x \in (1, 5). \end{cases}$$

□

Vamos a demostrar ahora que si $f_A = f_B$, entonces $A = B$. Mostraremos primero que $A \subseteq B$. En efecto, sea $x \in A$. Entonces $f_A(x) = 1$, como $f_A = f_B$, entonces $f_B(x) = 1$. Es decir, $x \in B$. La otra inclusión, $B \subseteq A$, se verifica de manera completamente análoga (hágalo!).

En el ejercicio #13 el lector interesado encontrará algunas propiedades algebraicas de las funciones características.

6.1.3. ¿Cuántas funciones existen entre dos conjuntos?

En esta sección contaremos la funciones entre dos conjuntos finitos y mostraremos que si A tiene n elementos y B tiene m elementos entonces existen m^n funciones de A en B.

Teorema 6.12. *Sean A y B conjuntos no vacíos. Si A tiene n elementos y B tiene m elementos, entonces existen m^n de A en B.*

Demostración. La demostración se hará por inducción en n. Para esta prueba usaremos la notación relacional para las funciones, es decir, una función f entre A y B será vista como un subconjunto de $A \times B$.

Base de la inducción: Para $n = 1$, es inmediato que existen tantas funciones de A en B, como elementos tenga B, es decir, existe m funciones de A en B, que es lo que se quería demostrar.

Hipótesis inductiva: Supongamos que para todo conjunto A con n elementos y todo conjunto B con m elementos se cumple que B^A tiene m^n elementos. Demostraremos que lo mismo vale para un conjunto A con $n+1$ elementos.

Sea C un conjunto con $n+1$ elementos, escojamos un elemento cualquiera de C, que denotaremos c. Sea $A = C \setminus \{c\}$. Entonces A tiene n elementos. La clave para contar las funciones de C en B es observar que hay tantas como elementos tenga $B^A \times B$. En efecto, si $f \subseteq C \times B$ es una función, entonces $g = f \cap (A \times B)$ es una función de A en B y si $b = f(c)$, es decir, si $(c, b) \in f$. Entonces

$$f = g \cup \{(c, b)\} \text{ y } (g, (c, b)) \in B^A \times B.$$

Y reciprocamente, si $(h, d) \in B^A \times B$, entonces $f = h \cup (c, b)$ es una función de C en B.

Por hipótesis inductiva, B^A tiene m^n elementos. Como B tiene m elementos, entonces $A^B \times B$ tiene $m^n \cdot m$ elementos, es decir B^C tiene m^{n+1} elementos, que es lo que se quería demostrar.

□

Nos queda por analizar el caso cuando A o B es vacío. Supongamos que $A = \emptyset$. Qué puede ser una función que tenga como dominio el conjunto vacío? Si vemos a una función de A en B como una relación, es decir, como un subconjunto de $A \times B$, es inmediato que la única relación, cuando A es vacío, es la relación vacía, es decir, $\emptyset$ es una relación entre $\emptyset$ y B. Y es también es inmediato verificar que $\emptyset$ es una función de $\emptyset$ en B. Por lo tanto, $B^\emptyset$ tiene un sólo elemento, la función vacía. Por otra parte, si B es vacío, un razonamiento análogo muestra que la función vacía es la única función de un conjunto cualquiera A en $\emptyset$. En resumen, B^A tiene un sólo elemento, si A o B es vacío.

Ejercicios 6.1

1. Determine cuáles de las siguientes relaciones entre $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{m, n, r\}$ son funciones. En caso que no sea una función diga por qué no lo es.

a) $R = \{(1, m), (2, n)\}$,

b) $T = \{(1, n), (2, r), (3, r)\}$,

c) $S = \{(1, n), (2, r), (3, m), (3, n)\}$,

d) $H = \{(1, m), (2, m), (3, m)\}$.

2. Determine si las siguientes relaciones definen una función de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. En caso que no lo sea diga por qué no lo es y en caso que sí lo sea halle la regla de correspondencia.

   a) $R = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \ m \text{ divide a } n\}$,

   b) $R = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \ m - n = 3\}$,

   c) $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), \cdots\}$,

   d) $R = \{(n, 3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \ n \in \mathbb{N}\}$,

   e) $R = \{(n, n^3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \ n \in \mathbb{N}\}$.

3. En cada caso determine las imágenes indicadas.

   a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, definida por $f(n) = -n$. Hallar $f(3)$ y $f(12)$.

   b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $f(n) = 6$. Hallar $f(5)$ y $f(134)$.

   c) $f : \{0, 1, 2, 3, \cdots, 10\} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(n) = (n-3)(n-6)$. Hallar $f(3)$ y $f(5)$.

   d) Sea $f : \{0, 1, 2, 3, \cdots, 10\} \to \{0, 1, 2, 3, \cdots, 10\}$ definida por partes de la manera siguiente
   $$f(x) = \begin{cases} x + 3 & , \text{si } 0 \le x \le 3 \\ 10 - x & , \text{si } 4 \le x \le 10. \end{cases}$$
   Hallar $f(2)$ y $f(8)$.

   e) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por $f(n) = (n+1, n+2)$. Hallar $f(25)$ y $f(1000)$.

   f) $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definida por $f(n) = \{n\}$. Hallar $f(5)$ y $f(13)$.

4. Determine si existe alguna función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que satisfaga la condición que se indica. Justifique su respuesta.

   a) $\forall n \in \mathbb{N}, \ \exists m \in \mathbb{N}, \ f(m) = n$,

   b) $\forall n \in \mathbb{N}, \ \exists m \in \mathbb{N}, \ f(n) = m$,

   c) $\exists m \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ f(m) = n$,

   d) $\exists n \in \mathbb{N}, \ \forall m \in \mathbb{N}, \ f(m) = n$.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Suponga que f satisface que
   $$f(x)f(y) = f(x - y)$$
   para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y además que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Halle $f(1)$ y muestre que $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Suponga que f satisface que

$$f(x) + f(x-1) = x^2$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y además que $f(1) = 1$. Halle $f(10)$.

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Suponga que f satisface que

$$f(x)f(y) = f(x+y)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y además que $f(\frac{-1}{4}) = \frac{1}{4}$. Halle $f(1995)$.

8. *a*) Halle todas las funciones características de los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ (ver la definición 6.10. Note que en este caso $U = \{1, 2, 3\}$). Verifique que existen 8 funciones características.

   b) Considere la función $g : \{1, 2, 3\} \to \{0, 1\}$ definida por $g(1) = 1$, $g(2) = 0$ y $g(3) = 1$. ¿Existirá un subconjunto A de $\{1, 2, 3\}$ tal que $g = f_A$? Si la respuesta es "si", encuentre tal conjunto.

   c) Para cada $A, B \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ demuestre que $A \neq B$ si, y sólo si $f_A \neq f_B$. (Ver la definición 6.10 con $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. En este caso existen 32 funciones características, pero para responder la pregunta no hace falta hallarlas!).

9. Sea A un conjunto no vacío con n elementos y B un conjunto no vacío con m elementos. Fije un elemento $a \in A$. Defina la siguiente relación en B^A:

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad f(a) = g(a).$$

   Muestre que $\sim$ es una relación de equivalencia en B^A. Determine cuántas clases de equivalencia existen y cuantos elementos tiene cada clase.

10. Considere la siguiente relación entre las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$:

$$R = \{(f, g) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \ \forall n \in \mathbb{N}, f(n) \leq g(n)\}.$$

    Determine si R es un orden sobre $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

11. Considere las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$: $g(x) = x^2$ y

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{, si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{, si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

    Determine para cuáles reales x se cumple que $h(x) \leq g(x)$.

12. Considere la función

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{, si } x \text{ es racional} \\ \frac{1}{x} & \text{, si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

    Determine para cuáles reales x se cumple que $h(x) \leq x$.

13. Sean A y B subconjuntos de un conjunto U. Muestre que
    a) $f_{A\cap B} = f_A \cdot f_B$, es decir, $f_{A\cap B}(x) = f_A(x)\cdot f_B(x)$ para todo $x \in U$.
    b) $f_{A^c} = 1 - f_A$,
    c) $f_{A\cup B} = f_A + f_B - f_A \cdot f_B$,
    d) $f_{A\triangle B} = f_A + f_B - 2f_A \cdot f_B$,
    e) Use las propiedades de la funciones características descritas arriba para demostrar que $\triangle$ es asociativa.
14. Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ funciones. Determine qué hay que suponer para que $f \cup g$ sea una función de $A \cup C$ en $B \cup D$, cuando f y g se interpretan como relaciones. ¿Qué puede decir acerca de $f \cap g$? ¿Qué tiene que ver este ejercicio con las funciones definidas por partes?

6.2. Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

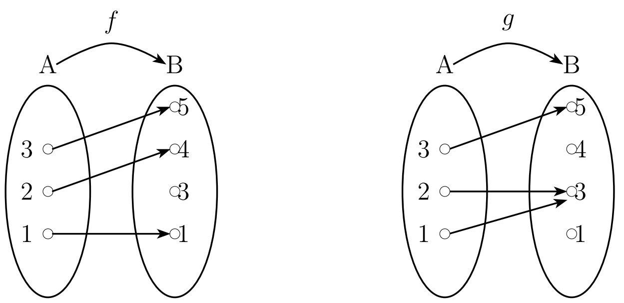
En esta sección estudiaremos tres conceptos básicos sobre funciones.

6.2.1. Funciones inyectivas

Definición 6.13. *Sea f una función de A en B. Diremos que f es **inyectiva** si dados $a, a' \in A$ con $a \neq a'$, se tiene que $f(a) \neq f(a')$.*

A una función inyectiva también se le llama una función *uno a uno* (a veces se escribe: f es $1-1$). Este nombre se debe a que elementos distintos del dominio son "enviados" por la función a elementos distintos del contradominio. La inyectividad tiene una interpretación en términos del grafo de la función: *A cada elemento del contradominio le llega a lo sumo una flecha.*

Ejemplo 6.14. Consideremos los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 4, 5\}$. En los diagramas que siguen se tiene que la función f es inyectiva y la función g no lo es.



□

Podemos expresar el concepto de inyectividad de la manera siguiente:

> Sea $f : A \to B$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
>
> (i) f es inyectiva.
> (ii) Para todo $a, a' \in A$, si $f(a) = f(a')$, entonces $a = a'$.

Dejamos la verificación de este hecho al lector (ver ejercicio 11). En los siguientes ejemplos haremos uso de esta caracterización de la inyectividad.

Ejemplo 6.15. Considere la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n) = n + 1$. Mostraremos que f es inyectiva. Usaremos el criterio de inyectividad enunciado en el recuadro anterior. Fijemos dos naturales n, m y supongamos que $f(n) = f(m)$. Debemos mostrar que $n = m$. En efecto, nuestra suposición nos asegura que $n + 1 = m + 1$. Restando 1 en ambos lados de la igualdad obtenemos que $n = m$. $\square$

Ejemplo 6.16. Considere la función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $g(n) = n^2$. Mostraremos que g es inyectiva. Usaremos otra vez el criterio anterior. Debemos probar que

$$\text{Si } g(n) = g(m), \text{ entonces } n = m.$$

Es decir,

$$\text{Si } n^2 = m^2, \text{ entonces } n = m.$$

En efecto, fijemos $n, m \in \mathbb{N}$ y supongamos que $n^2 = m^2$. De esto tenemos que $n^2 - m^2 = 0$. Factorizando obtenemos que

$$(n + m)(n - m) = 0.$$

Hay dos casos a considerar: (i) $n + m = 0$ y (ii) $n - m = 0$. Como $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $n, m \geq 0$. Por lo tanto en el caso (i) tenemos que $n = -m$ y entonces necesariamente se cumple que $n = m = 0$. En el caso (ii) tenemos obviamente que $n = m$.

Considere ahora la función $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ dada por $h(x) = x^2$. Uno estaría tentado a rápidamente concluir a partir de lo anterior que h es inyectiva. Pero no es así. Esta función no es inyectiva, pues $h(2) = h(-2) = 4$. ¿Cuál es la diferencia con lo que hicimos para la función g? $\square$

En el ejemplo que sigue usaremos la definición original de inyectividad.

Ejemplo 6.17. Defina $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ de la siguiente manera:

$$h(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , \text{si } x < 0 \\ 3x + 1 & , \text{si } 0 \leq x. \end{cases}$$

Mostraremos que h es inyectiva. Tomemos dos enteros x, y distintos y mostremos que $h(x) \neq h(y)$. Hay cuatro casos posibles, los consideraremos por separado.

(i) Supongamos que $x < 0$ y $y < 0$. En este caso, por la definición de h, tenemos que $h(x) = 2x - 1$ y $h(y) = 2y - 1$. Como $x \neq y$ es claro que $2x \neq 2y$ y por lo tanto $2x - 1 \neq 2y - 1$. Es decir que $h(x) \neq h(y)$.

(ii) Supongamos que $x \geq 0$ y $y \geq 0$. En este caso, por la definición de h, tenemos que $h(x) = 3x + 1$ y $h(y) = 3y + 1$. Como $x \neq y$ es claro que $3x \neq 3y$ y por lo tanto $3x + 1 \neq 3y + 1$. Es decir, $h(x) \neq h(y)$.

(iii) Supongamos que $x < 0$ y $y \geq 0$. Por la definición de h tenemos que $h(x) = 2x - 1$ y $h(y) = 3y + 1$. Como $x < 0$ entonces $2x - 1 < 0$ y como $y \geq 0$, entonces $3y + 1 \geq 0$. Por lo tanto $h(x) \neq h(y)$.

(iv) Supongamos que $y < 0$ y $x \geq 0$. Este caso se analiza como en el apartado anterior.

Hemos mostrado que en cada uno de los casos se cumple que $h(x) \neq h(y)$. Como estos cuatro casos son todos los posibles, podemos concluir que h es inyectiva. $\square$

Es importante tener claro cuándo una función **no** es inyectiva. En el siguiente recuadro lo resaltamos:

> Sea $f : A \to B$ una función. Las afirmaciones (i) y (ii) son equivalentes
>
> (i) f **no** es inyectiva
> (ii) Existe un par de elementos $a, a' \in A$ tales que $a \neq a'$ y $f(a) = f(a')$.

Notemos entonces que para mostrar que una función **no es inyectiva** debemos conseguir **DOS** elementos del dominio que tengan la misma imagen.

Ejemplo 6.18. Consideremos la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = x^2 - x + 4$. Para mostrar que h no es inyectiva debemos conseguir un par de reales distintos a, a' que tengan la misma imagen bajo h. Por ejemplo, $h(-1) = 6 = h(2)$. Por esta razón h no es inyectiva. $\square$

6.2.2. Funciones sobreyectivas

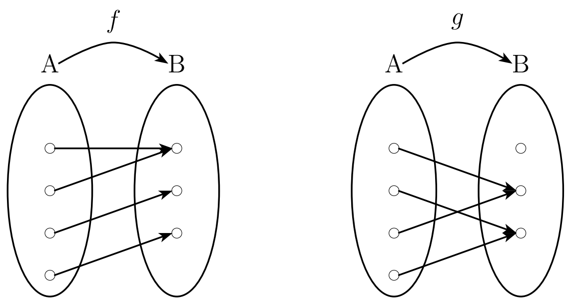
Definición 6.19. *Sea $f : A \to B$ una función. Diremos que f es **sobreyectiva** si dado $b \in B$ existe algún $a \in A$ tal que $b = f(a)$.*

Es claro que una función $f : A \to B$ es sobreyectiva cuando el rango de f es igual al contradominio. Esto lo resaltamos en el próximo recuadro.

> Sea $f : A \to B$ una función. Las afirmaciones (i) y (ii) son equivalentes
>
> (i) f es sobreyectiva
> (ii) $rango(f) = B$.

Recordemos que cuando $f(x) = y$, decimos que y es la imagen de x y también se dice que x es una **preimagen** de y. En el caso que $y \notin rango(f)$, diremos que y no tiene preimagen.

Notemos que la sobreyectividad indica que en el grafo de la función *a todo elemento del contradominio le llega al menos una flecha (pero puede ser más de una).* El primero de los diagramas que siguen corresponde a una función sobreyectiva, en cambio el segundo no.



Ejemplo 6.20. Considere la función $f : \{-1, 0, 1, 2\} \to \{0, 1, 4\}$ definida por $f(x) = x^2$. Mostraremos que f es sobreyectiva. Debemos mostrar lo siguiente:

$$\text{Para todo } y \in \{0, 1, 4\} \text{ existe } x \in \{-1, 0, 1, 2\} \text{ tal que } f(x) = y.$$

Como el contradominio de f tiene sólo 3 elementos, podemos verificar esta afirmación con una simple inspección de todos los casos posibles.

(i) Para $y = 0$, en efecto existe $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$ tal que $f(x) = 0$, precisamente $x = 0$. Es decir, la preimagen del 0 es el 0.

(ii) Para $y = 1$, tenemos que existe $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$ tal que $x^2 = 1$. En realidad existen dos elementos del dominio que tiene imagen igual a 1: $f(1) = 1^2 = 1$ y $f(-1) = (-1)^2 = 1$. Es decir, 1 tiene dos preimágenes: 1 y -1.

(iii) Para $y = 4$, tenemos que $f(2) = 2^2 = 4$. Es decir, la preimagen del 4 es el 2.

Hemos entonces verificado que todo elemento del contradominio de f es la imagen de algún elemento del dominio de f. En otras palabras, el rango de f es $\{0, 1, 4\}$. $\square$

Ejemplo 6.21. Sea $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida por $g(x) = 2x + 1$. Mostraremos que g es sobreyectiva. Debemos mostrar lo siguiente:

$$\text{Para todo } y \in \mathbb{Q} \text{ existe } x \in \mathbb{Q} \text{ tal que } 2x + 1 = y.$$

Por ejemplo, tomando y igual a 4 es claro que $g(\frac{3}{2}) = 3 + 1 = 4$. Es decir, $\frac{3}{2}$ es una preimagen de 4. En este ejemplo no podemos mostrar la sobreyectividad de g analizando todos los casos posibles como lo hicimos en el ejemplo anterior, pues el contradominio de g tiene una cantidad infinita de elementos. Es por esta razón que necesitamos un argumento general. Fijemos un elemento y cualquiera del contradominio, es decir $y \in \mathbb{Q}$. Queremos hallar $x \in \mathbb{Q}$ tal que

$$2x + 1 = y.$$

En ejemplos como este, para hallar tal x lo que hacemos es "despejar" x de esa ecuación. Tenemos que

$$2x = y - 1$$

y por lo tanto

$$x = \frac{y-1}{2}.$$

Es claro que $\frac{y-1}{2} \in \mathbb{Q}$ y ahora verificaremos que la imagen de $\frac{y-1}{2}$ es y. En efecto,

$$g\left(\frac{y-1}{2}\right) = 2\left(\frac{y-1}{2}\right) + 1 = (y-1) + 1 = y.$$

$\square$

Ejemplo 6.22. Consideremos la función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $f((n,m)) = n$. Mostraremos que f es sobreyectiva. Para entender mejor la definición de f calculemos algunas imágenes. Por ejemplo, tenemos que

$$f((5,0)) = 5, \quad f((1,1)) = 1, \quad f((0,0)) = 0.$$

Esto nos dice que 5, 1 y 0 tienen (al menos una) preimagen, respectivamente $(5,0)$, $(1,1)$ y $(0,0)$. Pero esto no es suficiente para garantizar que g es sobreyectiva. Debemos mostrar que dado **cualquier** elemento del contradominio $n \in \mathbb{N}$, existe un elemento del dominio $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $f((x,y)) = n$. Los ejemplos anteriores sugieren una respuesta. En efecto, notemos que

$$f((n,0)) = n$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$, esto dice que $(n,0)$ es una preimagen de n y por lo tanto $n \in rango(f)$ para todo natural n.

Observemos que en el ejemplo anterior, el conjunto de preimágenes de cada elemento del contradominio es un conjunto infinito. Por ejemplo, las preimágenes del 3 son todos los pares ordenados que tienen la forma $(3,m)$, en símbolos,

$$\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \ f((n,m)) = 3\} = \{(3,m) : m \in \mathbb{N}\}.$$

$\square$

Para determinar si una función es sobreyectiva, es crucial poder conseguir su rango. En los próximos ejemplos calcularemos el rango de algunas funciones.

Ejemplo 6.23. Considere la función $f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ dada por $f(n) = 2n$. Entonces por simple inspección se verifica que el rango de f es el conjunto $\{2,4,6,8\}$. □

Ejemplo 6.24. Considere la función $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{x-2}.$$

Para hallar el rango de f debemos determinar cuales números reales son de la forma $\frac{x}{x-2}$. Para hacerlo consideremos la ecuación

$$\frac{x}{x-2} = y.$$

Debemos "despejar" x de esta ecuación. Tenemos entonces que

$$x = (x-2)y.$$

Luego

$$x - xy = -2y.$$

Y por lo tanto

$$x = \frac{-2y}{1-y}.$$

Usando esta última ecuación mostraremos que si $y \neq 1$, entonces y está en el rango de f. En efecto, sea $y \neq 1$, conseguiremos un real z tal que $f(z) = y$. Sea

$$z = \frac{-2y}{1-y}.$$

Verificaremos que $f(z) = y$. En efecto,

$$f(z) = \frac{\frac{-2y}{1-y}}{\frac{-2y}{1-y} - 2} = \frac{\frac{-2y}{1-y}}{\frac{-2y-2+2y}{1-y}} = \frac{-2y}{-2} = y.$$

Hemos mostrado que

$$\text{rango}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

□

Ejemplo 6.25. Considere la función $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por

$$f(A) = A \cup \{2,3\}.$$

Mostraremos que el rango de f consiste de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que contienen al 2 y al 3.

En efecto, sea $B \subseteq \mathbb{N}$ tal que $2, 3 \in B$. Entonces tenemos que

$$f(B) = B \cup \{2, 3\} = B.$$

Por esto B está en el rango de f. Recíprocamente, sea $B \in \text{rango}(f)$. Entonces existe $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que $f(A) = B$. Luego $B = A \cup \{2, 3\}$. Por lo tanto $2, 3 \in B$. $\square$

Es importante que también quede claro cuando una función **no** es sobreyectiva. En el siguiente recuadro lo resaltaremos.

Sea $f : A \to B$ una función. Las afirmaciones (i) y (ii) son equivalentes

(i) f **no** es sobreyectiva
(ii) Existe un elemento $b \in B$ tal que para ningún $a \in A$ se tiene que $b = f(a)$.

Notemos que para mostrar que una función **no es sobreyectiva** debemos encontrar **UN** elemento del contradominio que no tenga preimagen.

Ejemplos 6.26. 1. $f : \{0, 1, \cdots, 6\} \to \{0, 1, \cdots, 6\}$ definida por partes de la manera siguiente

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{, si } 0 \le x \le 2 \\ 7 - x & \text{, si } 3 \le x \le 6. \end{cases}$$

¿Será f sobreyectiva? Como el dominio de f tiene sólo 7 elementos es sencillo responder esta pregunta simplemente analizando por inspección todos los casos posibles. Vemos que

$$\text{rango(f)} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

De esto vemos que 5 no tiene preimagen y por lo tanto f no es sobreyectiva.

2. Podemos modificar el contradominio de la función dada en el ejemplo anterior y obtener otra función que sí sea sobreyectiva. Definimos $g : \{0, 1, \cdots, 6\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ usando la misma ley de correspondencia que la de f. Como el dominio de g es igual al de f y usamos la misma regla, entonces se tiene que $rango(g)$ es de nuevo $\{1, 2, 3, 4\}$ y por lo tanto g sí es sobreyectiva.

$\square$

En el último ejemplo hemos usado un hecho general acerca de las funciones que enunciaremos a continuación.

Teorema 6.27. *Sea $f : A \to B$ una función. Defina $g : A \to rango(f)$ por $g(x) = f(x)$. Entonces g es sobreyectiva.* $\square$

Ejemplo 6.28. Sea $f : (-1, -1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 3$. Afirmamos que f no es sobreyectiva. En efecto, notemos que si $x \in (-1, 1)$ entonces

$$-1 < x < 1.$$

Multiplicando por 2 la desigualdad anterior obtenemos que

$$-2 < 2x < 2.$$

Ahora sumamos 3 a ambos miembros de la desigualdad anterior y obtenemos

$$1 < 2x + 3 < 5.$$

De esto se deduce que el rango de f está contenido en $(1, 5)$. Y por consiguiente podemos entonces concluir que f no es sobreyectiva pues, por ejemplo, 6 no tiene preimagen. Podemos de hecho hallar el rango de f. En efecto, afirmamos que

$$\text{rango(f)} = (1, 5).$$

Nos falta mostrar que $(1, 5) \subseteq$ rango(f). Sea $x \in (1, 5)$. Es decir, $1 < x < 5$. Entonces restando 3 obtenemos

$$-2 < x - 3 < 2.$$

Ahora dividiendo entre 2 obtenemos

$$-1 < \frac{x-3}{2} < 1.$$

Dejamos al lector la verificación que

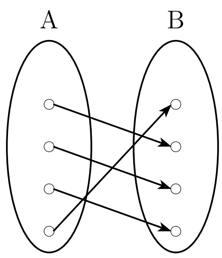
$$f\left(\frac{x-3}{2}\right) = x.$$

Con esto queda demostrado que todo $x \in (1, 5)$ tiene preimagen y por lo tanto que $(1, 5)$ es el rango de f. Definimos $g : (-1, 1) \to (1, 5)$ por $g(x) = 2x + 3$. El teorema 6.27 nos dice que g es sobreyectiva. □

6.2.3. Funciones biyectivas

Definición 6.29. *Una función es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.*

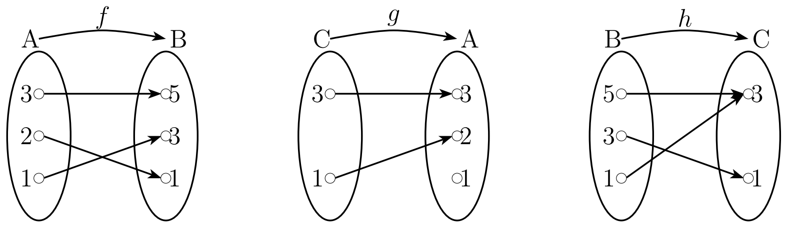
Una función es biyectiva cuando su digrafo tiene la propiedad que *a todo elemento del contradominio le llega una y sólo una flecha*, como se indica en el siguiente diagrama



Por esta razón se dice que una biyección establece una correspondencia biunívoca entre los elementos del dominio y del contradominio.

Las funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas son las herramientas básicas para comparar el número de elementos de dos conjuntos. Observando el digrafo de una función biyectiva $f : A \to B$ vemos que A y B tienen el mismo número de elementos. Ahora bien, si $f : A \to B$ es inyectiva, sólo podemos afirmar que B tiene al menos tantos elementos como A (pero puede suceder que B tenga más elementos que A). Por último, si $f : A \to B$ es sobreyectiva, sólo podemos afirmar que A tiene al menos tantos elementos como B (pero puede suceder que A tenga más elementos que B).

Ejemplo 6.30. Consideremos los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ y $C = \{1, 3\}$. Es fácil encontrar una función biyectiva de A en B, una inyectiva de C en A y una sobreyectiva de B en C. Como lo mostramos en los gráficos que siguen. Sin embargo, no es posible encontrar una inyección de A en C, ni tampoco una función sobreyectiva de C en A. En particular, esto nos dice además que no existe un función biyectiva entre A y C, lo cual es claro pues A tiene 3 elementos y C sólo 2 elementos.



□

A continuación enunciaremos un resultado general que usaremos con frecuencia.

Teorema 6.31. *Sea $f : A \to B$ una función inyectiva y sea $g : A \to rango(f)$ dada por $g(x) = f(x)$. Entonces g es biyectiva.* □

Terminaremos esta sección presentando algunos ejemplos de funciones biyectivas.

Ejemplos 6.32. 1. Consideremos los conjuntos $\{1, 2, 3\}$ y $\{a, b, c\}$. ¿Existirá una función biyectiva entre ellos? Es claro que sí . Por ejemplo, definimos la función $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$ por $f(1) = a$, $f(2) = b$ y $f(3) = c$. Por una simple inspección vemos que f es inyectiva y sobreyectiva. De hecho existen 6 funciones biyectivas distintas entre estos dos conjuntos (ver ejercicio 2).

2. Consideremos los conjuntos $\{1, 2, 3, 4\}$ y $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$. ¿Existirá una función biyectiva entre ellos?. Recordemos que $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$ consiste de los pares ordenados $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$. Podemos definir entonces una función $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ de la manera siguiente: $f(1) = (0, 0)$, $f(2) = (0, 1)$, $f(3) = (1, 0)$ y $f(4) = (1, 1)$. De hecho, entre los conjuntos $\{1, 2, 3, 4\}$ y $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$ existen 24 funciones biyectivas distintas.

3. Una función biyectiva $f : \{1, 2, 3, \cdots, n\} \to B$ se puede ver como una enumeración de los elementos de B. Es decir, la función f sirve para "etiquetar" los n elementos de B. Observe el lector lo que se hizo en los ejemplos anteriores y verá que la regla de correspondencia implícitamente enumeró los elementos del contradominio.

4. Veamos ahora un ejemplo con conjuntos infinitos. Sea E el conjunto de todos los números pares, es decir, E consiste de todos los números naturales de la forma $2n$ con n otro natural. Definimos $f : \mathbb{N} \to E$ por $f(n) = 2n$. Mostraremos que f es biyectiva. Debemos mostrar dos cosas:

   (i) f es inyectiva: sean $n, m \in \mathbb{N}$ y supongamos que $f(n) = f(m)$. Es decir, supongamos que $2n = 2m$. De esto inmediatamente concluimos que $n = m$. Esto muestra que f es inyectiva.

   (ii) f es sobreyectiva: sea $k \in E$ cualquiera, entonces k es un número par. Por lo tanto k es de la forma $2n$ para un natural n. De esto vemos que la preimagen de k es n. Por ejemplo, $48 \in E$ y $48 = 2 \cdot 24$ así que 24 es la preimagen de 48.

$\square$

Ejercicios 6.2

1. En cada uno de los ejercicios que siguen determine si existe (y en caso que sea posible, encuentre) una función $f : A \to B$ que sea (a) inyectiva, (b) sobreyectiva, (c) biyectiva.

   a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \mathcal{P}(\{1\})$.
   b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{0\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
   c) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \mathcal{P}(\{0, 1\})$.
   d) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \mathcal{P}(\{0, 1\})$.
   e) $A = \mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$ y $B = \{1, 2, \cdots, 8\}$.
   f) $A = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ y $B = \{0, 1, 2, \cdots, 7\}$.

2. *a*) Halle todas las funciones biyectivas que se puedan definir de $\{1, 2, 3\}$ en $\{a, b, c\}$. ¿Puede conseguir una función inyectiva entre estos conjuntos que no sea biyectiva?. ¿Existirá una función sobreyectiva entre estos conjuntos que no sea biyectiva?

   b) Halle una función inyectiva de $\{1, 2, 3\}$ en $\{a, b, c, d\}$. ¿Puede hallarla biyectiva?.

   c) Halle una función sobreyectiva de $\{a, b, c, d\}$ en $\{1, 2, 3\}$. ¿Puede hallarla inyectiva?

3. Determine cuáles de las siguientes funciones son inyectivas.

   a) Sea $A = \{0, 1, 2, \cdots, 10\}$ y $f : A \to A$ dada por $f(n) = 10 - n$. Haga el diagrama de f.

b) $f : \{0, 1, 2, 3, \cdots, 10\} \to \{0, 1, 2, 3, \cdots, 10\}$ definida por partes de la manera siguiente

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{, si } 0 \le x \le 3 \\ 10-x & \text{, si } 4 \le x \le 10. \end{cases}$$

(*Sugerencia:* Haga el diagrama de f).

c) $f : \{0, 1, 2, 3, \cdots, 10\} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n) = n + 3$.

d) $f : \{0, 1, 2, 3, \cdots, 10\} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n) = (n-3)(n-4)$.

e) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, definida por $f(x) = 3$.

f) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $f(n) = 3^n$.

g) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, definida por $f(n) = -n$.

h) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $f((n, m)) = m + n$.

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{2}{3}x - \sqrt{2}$.

j) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$.

k) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$.

4. Determine el rango de cada una de las funciones definidas en el ejercicios 3. Determine cuáles de ellas son sobreyectivas y cuáles son biyectivas.

5. Determine el rango de las siguientes funciones.

   a) $f : (-1, 3) \to (0, 7]$ dada por $f(x) = \frac{5}{4}x + \frac{13}{4}$.

   b) $f : (-3, -2) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3 - 2x$.

   c) $f : (-1, 0) \to (0, \frac{1}{4})$ dada por $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$.

   d) $f : (-1, 2) \cup (7, 9] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 5$.

   e) $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{x-2}$.

   f) $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{3x}{x-2}$.

6. Muestre que la siguiente función no es inyectiva (hallando pares de elementos distintos con igual imagen). Determine su rango.

   $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

7. Halle el rango de las siguientes funciones y determine si son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

   a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x) = (x, x^2)$.

   b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x) = (\cos(x), \sin(x))$.

   c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (3x + y, 2y)$.

   d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (y^3, x + 2y)$.

   e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y) = (3x + y, 2y, y)$.

8. Sea A un conjunto con 3 elementos y B un conjunto con 4 elementos. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifique sus respuestas:

   a) Existe una función biyectiva de A en B.

   b) Existe una función inyectiva de A en B.

   c) Existe una función inyectiva de B en A.

   d) Existe una función sobreyectiva de A en B.

   e) Existe una función sobreyectiva de B en A.

9. *a*) Diremos que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **estrictamente creciente** si para todo $r, s \in \mathbb{R}$ se cumple que
$$r < s \Rightarrow f(r) < f(s).$$
   Determine cuáles de las siguientes funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son estrictamente crecientes.

   1) $f(r) = r^2$,

   2) $f(r) = 2r + 1$,

   3) $f(r) = \frac{r}{r^2+1}$,

   4) $f(r) = 5 - 4r$,

   5) $f(r) = r^3$.

   b) Muestre que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente, entonces f es inyectiva.

   c) Defina el concepto de función estrictamente decreciente y muestre que ellas también son inyectivas.

10. Determine el rango de las siguientes funciones y si son inyectivas, sobreyectivas y/o biyectivas.

    a) $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $f(A) = A \cup \{0, 3, 7\}$

    b) $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $f(A) = A \cap \{n \in \mathbb{N} : \ n \text{ es par}\}$

    c) $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $f(A) = A \triangle \{0, 3, 7\}$.

    d) $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $f(A) = A \cup (\mathbb{N} \setminus \{0\})$.

11. Sea $f : A \to B$ una función. Verifique que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) f es inyectiva.

    b) Para todo $a, a' \in A$ $(f(a) = f(a') \to a = a')$.

    (*Sugerencia:* Recuerde que una proposición condicional es lógicamente equivalente a su contrarrecíproca. Enuncie la contrarrecíproca de la proposición condicional que aparece en b)).

12. En los siguientes ejercicios daremos una "demostración" para que la evalúe y determine si es correcta. Justifique su respuesta.

    a) **Afirmación:** La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x + 5$ es inyectiva.

    "Demostración": Sean x, x' dos números reales con $f(x) \neq f(x')$. Entonces $3x + 5 \neq 3x' + 5$. Luego $3x \neq 3x'$ y por lo tanto $x \neq x'$. Esto muestra que f es inyectiva.

    b) **Afirmación:** La función $f : (1, 5) \to (8, 30)$ dada por $f(x) = 3x + 5$ es sobreyectiva.

    "Demostración": Considere la ecuación

    $$y = 3x + 5.$$

    Despejando x obtenemos que

    $$x = \frac{y-5}{3}.$$

    Por lo tanto f es sobreyectiva.

13. Sean A, B, C, D conjuntos tales que $A \cap B = \emptyset$ y $C \cap D = \emptyset$. Sean $f : A \to C$ y $g : B \to D$ funciones inyectivas. Defina $h : A \cup B \to C \cup D$ de la siguiente manera:

    $$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{, si } x \in A \\ g(x) & \text{, si } x \in B. \end{cases}$$

    a) Muestre que la función definida en 6.17 es un caso particular de este ejemplo (*Sugerencia*: Tome A como el conjunto de todos los enteros negativos y B como el conjunto de los enteros no negativos. Así que $A \cup B = \mathbb{Z}$. Tome $C = A$ y $D = B$ y sean $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = 3x + 1$).

    b) Muestre que h es inyectiva.

14. Modifique el ejercicio anterior y obtenga un criterio para determinar cuándo una función definida por partes es sobreyectiva.

15. Lea el ejercicio 14 de la sección §6.1, bajo las condiciones de ese ejercicio, suponga que f y g son biyecciones, ¿es $f \cup g$ biyectiva?

6.3. Composición de funciones

Cuando calculamos

$$2(5)^3$$

lo hacemos por partes: primero calculamos

$$5^3$$

que es igual a 125 y después calculamos

$$2(125)$$

que nos da el resultado final 250. Podemos ver esta secuencia de operaciones en términos de funciones. Consideraremos las funciones $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dadas por

$$f(n) = n^3 \qquad \text{y} \qquad g(n) = 2n.$$

Es claro que $250 = g(125)$ y $125 = f(5)$ y de esto tenemos que

$$250 = g(f(5)).$$

Podemos entonces definir una nueva función, llamémosla h, a partir de f y g de la siguiente manera $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$h(n) = g(f(n)).$$

La regla de correspondencia de h es: $h(n) = g(n^3) = 2n^3$.

$$n \overset{f}{\mapsto} n^3 \overset{g}{\mapsto} 2n^3$$

Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$ podemos, como hicimos antes, definir una función de A en C como se indica a continuación

$$a \mapsto g(f(a)).$$

Esta nueva función se llama la **compuesta** de f y g y se denota por

$$g \circ f$$

y su regla de correspondencia es

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

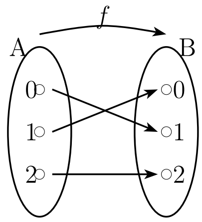
Observe que el orden en que leemos $g \circ f$ es *"f compuesta con g"* y que es el inverso al de como lo escribimos [1]. La operación entre funciones así definida se denomina **composición** de funciones.

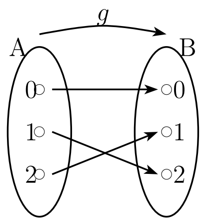
La composición de dos funciones se suele representar con cualquiera de los siguientes diagramas.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

[1] Esto es una convención. En algunos textos se acostumbra a leer $g \circ f$ como g compuesta con f.

Ejemplo 6.33. Consideremos las siguientes funciones





Note que en este ejemplo particular podemos componer f con g y también g con f:

$$\begin{array}{rclclcl}
(f\circ g)(0) & = & f(g(0)) & = & f(0) & = & 1\\
(g\circ f)(0) & = & g(f(0)) & = & g(1) & = & 2\\
(f\circ g)(1) & = & f(g(1)) & = & f(2) & = & 2\\
(g\circ f)(1) & = & g(f(1)) & = & g(0) & = & 0\\
(f\circ g)(2) & = & f(g(2)) & = & f(1) & = & 0\\
(g\circ f)(2) & = & g(f(2)) & = & g(2) & = & 1
\end{array}$$

Vemos entonces que $f\circ g \neq g\circ f$. □

Ejemplo 6.34. Consideremos las funciones $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ definida por

$$f(n)=\frac{n}{n+2}$$

y $g:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ definida por

$$g(x)=x^2.$$

Entonces $g\circ f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ viene dada por

$$(g\circ f)(n)=\left(\frac{n}{n+2}\right)^2.$$

Por ejemplo $(g\circ f)(4)=\dfrac{4}{9}$. □

Ejemplo 6.35. Considere $f,g,h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ dadas por

$$\begin{array}{rcl}
f(n) & = & n^3\\
g(n) & = & 2n+4\\
h(n) & = & n^2+2.
\end{array}$$

Podemos definir 9 funciones componiendo cualesquiera dos de las anteriores.

$$\begin{array}{lllllllll}
(f\circ g)(n) & = & f((g(n)) & = & f(2n+4) & = & (2n+4)^3 & & \\
(g\circ f)(n) & = & g(f(n)) & = & g(n^3) & = & 2n^3+4 & & \\
(f\circ h)(n) & = & f(h(n)) & = & f(n^2+2) & = & (n^2+3)^3 & & \\
(g\circ h)(n) & = & g(h(n)) & = & g(n^2+2) & = & 2(n^2+2)+4 & = & 2n^2+8 \\
(h\circ f)(n) & = & h(f(n)) & = & h(n^3) & = & (n^3)^2+2 & = & n^6+2 \\
(h\circ g)(n) & = & h(g(n)) & = & h(2n+4) & = & (2n+4)^2+2 & & \\
(f\circ f)(n) & = & f(f(n)) & = & f(n^3) & = & (n^3)^3 & = & n^9 \\
(g\circ g)(n) & = & g(g(n)) & = & g(2n+4) & = & 2(2n+4)+4 & = & 4n+12 \\
(h\circ h)(n) & = & h(h(n)) & = & h(n^2+2) & = & (n^2+2)^2+2 & = & n^4+4n^2+6
\end{array}$$

□

Observación: Hemos definido la composición de funciones cuando $f : A \to B$ y $g : B \to C$. Sin embargo, también se puede definir la compuesta $g\circ f$ cuando se cumple la siguiente condición:

$$f : A \to B,\ g : C \to D$$

y

$$\text{rango}(f) \subseteq C.$$

Lo importante es que dado $x \in A$ se cumpla que $f(x) \in C$ para que así tenga sentido la expresión $g(f(x))$. □

Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ tres funciones. Podemos definir

$$h\circ g : B \to D \quad \text{y} \quad g\circ f : A \to C.$$

También podemos definir

$$(h\circ g)\circ f : A \to D \quad \text{y} \quad h\circ (g\circ f) : A \to D.$$

El siguiente teorema dice que las dos últimas funciones son iguales. Es decir, la composición de funciones es una operación asociativa.

Teorema 6.36. *Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ tres funciones. Se tiene que*

$$(h\circ g)\circ f = h\circ (g\circ f).$$

Demostración: Ya que las dos funciones $(h\circ g)\circ f$ y $h\circ (g\circ f)$ tienen dominio A y contradominio D sólo resta verificar que tienen la misma ley de correspondencia. Sea x cualquier elemento de A, entonces

$$((h\circ g)\circ f)(x) = (h\circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

y por otra parte

$$(h\circ (g\circ f))(x) = h((g\circ f)(x)) = h(g(f(x))).$$

Esto muestra lo deseado. □

Ejemplo 6.37. Considere $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dadas por $f(n) = n^3$, $g(n) = 2n + 4$ y $h(n) = n^2 + 2$. Entonces usando los cálculos hechos en el ejercicio anterior tenemos que

$$\begin{array}{lllllll} ((f \circ g) \circ h)(n) & = & (f \circ g)(h(n)) & = & (f \circ g)(n^2 + 2) & = & [2(n^2 + 2) + 4]^3 \\ (f \circ (g \circ h))(n) & = & f((g \circ h)(n)) & = & f(2n^2 + 8) & = & [2n^2 + 8]^3 \end{array}$$

Observe que $[2(n^2 + 2) + 4]^3 = [2n^2 + 8]^3$. □

Ejemplo 6.38. Considere la función $f : [0, 1] \to [0, 1]$ definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \text{si } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2(1 - x) & , \text{si } 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

La función $f \circ f$ esta dada por la siguiente fórmula:

Incluir gráfica

$$(f \circ f)(x) = \begin{cases} 4x & , \text{si } 0 \leq x \leq 1/4, \\ 2(1 - 2x) & , \text{si } 1/4 < x \leq 1/2, \\ 2(2x - 1) & , \text{si } 1/2 < x \leq 3/4, \\ 4(1 - x) & , \text{si } 3/4 < x \leq 1. \end{cases}$$

Incluir gráfica

□

Mostraremos ahora que la composición de funciones preserva la inyectividad, la sobreyectividad y por lo tanto también la biyectividad.

Teorema 6.39. *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. Se cumple que*

1. *Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ también es inyectiva.*
2. *Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ también es sobreyectiva.*
3. *Si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ también es biyectiva.*

Demostración:

1. En efecto, sean $x, x' \in A$ con $x \neq x'$. Entonces como hemos supuesto que f es inyectiva, tenemos que $f(x) \neq f(x')$. Ahora como g también es inyectiva, entonces $g(f(x)) \neq g(f(x'))$. Es decir, $(g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(x')$.

2. En efecto, sea $z \in C$ cualquiera. Como g es sobreyectiva, entonces existe $y \in B$ tal que $g(y) = z$. Como $y \in B$ y f es sobreyectiva, entonces existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Afirmamos que $(g \circ f)(x) = z$, pues $(g \circ f)(x) = g((f(x)) = g(y) = z$.

3. Esto se deduce de las dos afirmaciones anteriores, pues si f y g son biyectivas, en particular son inyectivas y sobreyectivas.

$\square$

Es natural preguntarse si vale la recíproca de alguna de las afirmaciones del teorema 6.39.

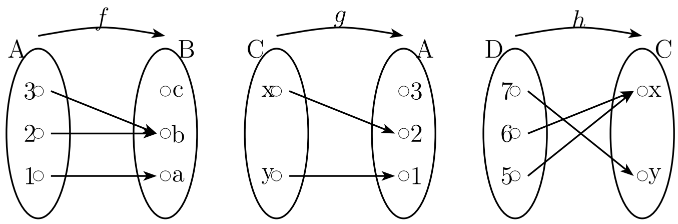
Teorema 6.40. *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.*

Demostración. Sea $x, x' \in A$. Suponga que $f(x) = f(x')$. Entonces $g(f(x)) = g(f(x'))$. Es decir $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Como $g \circ f$ es inyectiva, entonces $x = x'$. En consecuencia, f es inyectiva. $\square$

En el ejercicio #9 analizaremos otras posibilidades.

Ejercicios 6.3

1. Considere los siguientes diagramas que definen tres funciones:



Haga el diagrama de $f \circ g$, $g \circ h$ y $(f \circ g) \circ h$.

2. Sean $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ las funciones definidas por $f(n) = 3n + 2$, $g(n) = n^4$ y $h(n) = n + 1$. Existen 9 posibilidades para componer dos entre las funciones f, g y h. y existe 27 para componer 3 cualquieras de ellas (repitiendo si se quiere). Determine la ley de correspondencia de las siguientes funciones:

   a) $f \circ g$, $f \circ h$, $g \circ f$, $h \circ h$.

   b) $f \circ g \circ h$, $g \circ h \circ g$, $h \circ h \circ h$, $h \circ g \circ f$.

3. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = \tfrac{1}{1+x^2} \quad \text{y} \quad g(x) = \tfrac{1}{2+x^2}.$$

Determine la ley de correspondencia de $f \circ g$ y $g \circ f$.

4. Considere las funciones $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dadas por $f(x) = 2^x$ y $g(x) = x^2$. Muestre que $f \circ f \neq g \circ g$. Observemos que, en general,

$$f(f(f(2))) = 2^{(2^{(2^2)})} \neq ((2^2)^2)^2 = g(g(g(2))).$$

Es decir, la exponenciación no es una operación asociativa. [2]

5. Considere la función f definida en el Ejemplo 6.38. Muestre que $f(x) = 2\min\{x, 1-x\}$ para todo $x \in [0,1]$, donde mín es una abreviación de *mínimo*, asi que $\min\{x, y\}$ es el mínimo entre x y y.

6. En cada uno de los siguientes ejercicios f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Calcule la regla de correspondencia de $f \circ f$

a)

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , \text{ si } x \leq 1. \\ 3x & , \text{ si } x > 1. \end{cases}$$

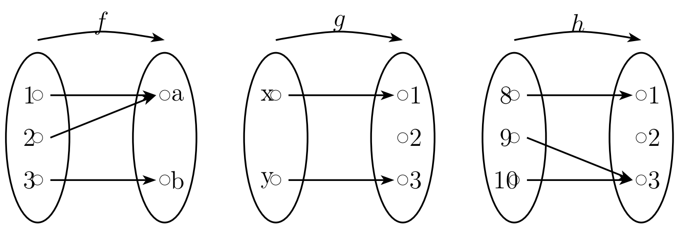
b)

$$f(x) = \begin{cases} 5x-1 & , \text{ si } x \leq 1. \\ x^2 & , \text{ si } x > 1. \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} 6x+8 & , \text{ si } x \leq 1. \\ 2-7x & , \text{ si } x > 1. \end{cases}$$

7. Considere las siguientes funciones



(i) Verifique que $f \circ g$ es inyectiva (note que f no es inyectiva).

(ii) Verifique que $f \circ h$ es sobreyectiva (note que h no es sobreyectiva).

(iii) ¿Qué relación guardan estos ejemplos con lo mostrado en el teorema 6.39?

[2] La funciones $f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f$ sirven para construir (y denotar) enteros muy grandes, esa operacion repetida de la exponenciación se llama *tetración* (el lector interesado puede buscar mas información en Wikipedia).

8. Considere las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{si } x > 0. \\ 1 & , \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , \text{si } x \geq 0. \\ 1 & , \text{si } x < 0. \end{cases}$$

   Determine $f \circ f$, $f \circ f \circ f$,... y $g \circ g$, $g \circ g \circ g$.... ¿Qué patrón observa?

9. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. Muestre que las siguientes afirmaciones son verdaderas:
   a) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.
   b) Si $g \circ f$ es inyectiva y f es sobreyectiva, entonces g es inyectiva.
   c) Si $g \circ f$ es sobreyectiva y g es inyectiva, entonces f es sobreyectiva.
   d) Sea $h : A \to B$. Suponga que $g \circ f = g \circ h$. ¿Es cierto que $f = h$?

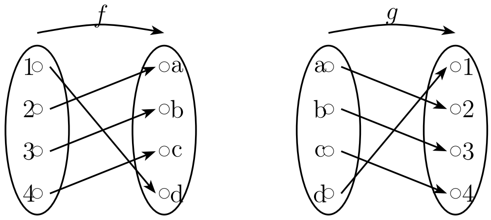
10. Halle ejemplos de funciones $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tales que $(f \circ f)(x) = x$ para todo $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. *Sugerencia:* Dibuje el digrafo de la función.

11. Determine si existen funciones $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que $(f \circ g)(n) = n^2$ para todo n. Consiga, si es posible, una par de esas funciones tales que ni f ni g sean la función indentidad. ¿Qué puede decir sin en lugar de n^2 usamos n^3?

6.4. La función inversa

Como dijéramos antes, una función biyectiva establece una correspondencia biunívoca entre los elementos del dominio y los del contradominio. En el siguiente ejemplo mostraremos algo muy importante acerca de las funciones biyectivas y la composición de funciones.

Ejemplo 6.41. El diagrama de la izquierda define una función $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{a, b, c, d\}$ El diagrama de la derecha define una función $g : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ que se obtuvo invirtiendo el sentido de las flechas en el diagrama de f.



Podemos componer f con g y obtenemos la función $g \circ f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$; notemos que

$$(g \circ f)(x) = x, \quad \text{para cada } x \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Por otra parte, también podemos componer g con f; obtenemos la función $f \circ g : \{a, b, c, d\} \to \{a, b, c, d\}$; notemos que

$$(f \circ g)(x) = x, \quad \text{para cada } x \in \{a, b, c, d\}.$$

Las funciones compuestas obtenidas reciben el nombre de **función identidad**, pues no alteran los elementos del dominio. Obsérvese que esas funciones no son iguales. La primera tiene dominio $\{1, 2, 3, 4\}$ y la segunda $\{a, b, c, d\}$. Las funciones identidad son cruciales para caracterizar las funciones biyectivas. Por esta razón usaremos una notación especial para ellas. Dado un conjunto cualquiera A, denotaremos por 1_A a la función

$$1_A : A \to A$$

definida por

$$1_A(x) = x, \quad \text{para cada } x \in A.$$

Hemos usado el subíndice A para denotar la función identidad de A pues obviamente esta función depende del conjunto A. Es fácil verificar que la función identidad 1_A es biyectiva.

Podemos expresar la propiedad que tiene la función g del ejemplo que estamos analizando diciendo que

$$g \circ f = 1_{\{1,2,3,4\}} \;\; \text{y} \;\; f \circ g = 1_{\{a,b,c,d\}}.$$

□

Las propiedades de la función g en el ejemplo anterior se deben a que f es biyectiva, como lo demostramos a continuación.

Teorema 6.42. *Sea $f : A \to B$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) f es biyectiva.

(ii) Existe una función $g : B \to A$ tal que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$.

Demostración: Para demostrar esta equivalencia debemos mostrar dos implicaciones.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Supongamos que (ii) se cumple. Es decir, supongamos que existe una función $g : B \to A$ tal que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$. Primero mostraremos que f es inyectiva. Sean $x, x' \in A$ y supongamos que $f(x) = f(x')$. Queremos ver que $x = x'$. Como $g \circ f = 1_A$, entonces de la definición de composición de funciones obtenemos lo siguiente

$$\begin{array}{rcccccl} g(f(x)) & = & (g \circ f)(x) & = & 1_A(x) & = & x. \\ g(f(x')) & = & (g \circ f)(x') & = & 1_A(x') & = & x'. \end{array}$$

Por hipótesis $f(x) = f(x')$, entonces obviamente

$$g(f(x) = g(f(x')).$$

De las igualdades de arriba obtenemos que $x = x'$, como queríamos demostrar.

Ahora mostraremos que f es sobreyectiva. Fijemos $y \in B$. Debemos hallar $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Como $y \in B$, entonces $g(y) \in A$. Afirmamos que $g(y)$ es la preimagen de y bajo f. En efecto, como $f \circ g = 1_B$, entonces

$$f(g(y)) = y.$$

De esta manera hemos mostrado que f es biyectiva y por lo tanto que $(ii) \Rightarrow (i)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Ahora supongamos que f es biyectiva y mostremos que (ii) se cumple. Para esto debemos definir una función $g : B \to A$ que tenga las propiedades deseadas. La idea para definir g es la misma que usamos para definir g en el ejemplo 6.41, es decir, g se define "invirtiendo las flechas" en el diagrama de f.

Veamos la función f como una relación de A en B. Es decir, consideremos el siguiente conjunto:

$$R = \{(x, f(x)) \in A \times B : \ x \in A\}.$$

Ahora "invirtamos" el orden y obtenemos

$$R' = \{(f(x), x) \in B \times A : \ x \in A\}.$$

Afirmamos que R' es una función. En efecto,

(a) Sea $y \in B$ cualquiera. Por ser f sobreyectiva, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Luego $(x, f(x)) = (x, y)$ y por definición de R', tenemos que $(y, x) \in R'$.

(b) Supongamos que (y, x) y (y, x') ambas están en R'. Mostraremos que necesariamente $x = x'$. En efecto, de la definición de R' tenemos que $f(x) = y$ y $f(x') = y$. Ahora, como f es inyectiva, concluimos que $x = x'$.

Ya que R' es una función usaremos la notación de funciones y la denotaremos por g. Así que $g : B \to A$ y por la definición de R' tenemos que

$$g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Veamos que $g \circ f = 1_A$. En efecto, sea $x \in A$. Sea $y \in B$ tal que $y = f(x)$. Entonces tenemos por la igualdad anterior que

$$g(f(x)) = g(y) = x.$$

De igual manera se muestra que $f \circ g = 1_B$. □

Dada una función biyectiva $f : A \to B$, podemos preguntarnos si existirán dos funciones distintas con las propiedades mencionadas en la parte (ii) del teorema 6.42. Si analizamos con cuidado la demostración de ese teorema, es natural pensar que no existen dos funciones con esas propiedades. Daremos una justificación más formal de esto que acabamos de decir.

Supongamos que f es biyectiva y además que existen dos funciones $g, g' : B \to A$ ambas satisfaciendo lo dicho en (ii) de 6.42. Es decir que

$$g \circ f = g' \circ f = 1_A \text{ y } f \circ g = f \circ g' = 1_B. \tag{6.1}$$

Mostraremos que $g = g'$. Ya que estamos suponiendo que g y g' tienen el mismo dominio y contradominio, sólo debemos verificar que tienen la misma ley de correspondencia. Fijemos entonces $y \in B$ y mostremos que $g(y) = g'(y)$. Como f es biyectiva, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. De las ecuaciones (6.1) obtenemos que

$$g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = x = (g' \circ f)(x) = g'(f(x)) = g'(y).$$

Es decir, $g = g'$.

En vista de esta propiedad que tienen la funciones biyectivas, se define la inversa de una función de la manera siguiente

Definición 6.43. *Sea $f : A \to B$ una función biyectiva. La **inversa** de f, que se denota por f^{-1}, es la única función de B en A que satisface las dos condiciones siguientes*

$$f^{-1} \circ f = 1_A \text{ y } f \circ f^{-1} = 1_B.$$

□

Observación: Es importante notar que si f es biyectiva, entonces f^{-1} también es biyectiva.

Ejemplo 6.44. Sea $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida por $g(x) = 2x + 1$. Ya vimos anteriormente que g es sobreyectiva. Verifiquemos que g es inyectiva. En efecto, supongamos que $g(x) = g(x')$, es decir, que $2x + 1 = 2x' + 1$. Si restamos 1 a ambos miembros y luego dividimos entre 2 obtenemos que $x = x'$. Por lo tanto g es biyectiva y tiene inversa. Usualmente la demostración de la sobreyectividad de la función da bastante información acerca de la regla de correspondencia de la inversa. Recordemos que mostramos que dado $y \in \mathbb{Q}$, se cumple que

$$g\left(\frac{y-1}{2}\right) = 2\left(\frac{y-1}{2}\right) + 1 = (y-1) + 1 = y.$$

Esto nos dice que la inversa de g esta dada por

$$g^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}.$$

□

Ejemplo 6.45. Considere la función $f : (1, 4) \to (-13, -1)$ dada por

$$f(x) = 3 - 4x.$$

Mostraremos que f es biyectiva y calcularemos la ley de correspondencia de su inversa.

Supongamos que $f(x) = f(x')$, es decir, que $3 - 4x = 3 - 4x'$. De aquí se deduce inmediatamente que $x = x'$. Esto muestra que f es inyectiva.

Para ver que f es sobreyectiva, consideremos la ecuación

$$y = 3 - 4x.$$

Despejando x obtenemos que

$$x = \frac{3 - y}{4}.$$

Verificaremos que si $y \in (-13, -1)$, entonces $\frac{3-y}{4} \in (1, 4)$. En efecto, tenemos que

$$-13 < y < -1.$$

Luego multiplicando por -1 obtenemos

$$1 < -y < 13.$$

Sumando 3 obtenemos

$$4 < 3 - y < 16.$$

Dividiendo entre 4 obtenemos

$$1 < \frac{3 - y}{4} < 4.$$

Esto muestra que f es sobreyectiva. Además sugiere que la inversa de f es la función

$$f^{-1} : (-13, -1) \to (1, 4)$$

dada por

$$f^{-1}(y) = \frac{3 - y}{4}.$$

En efecto, tenemos que

$$(f \circ f^{-1})(y) = f\left(\frac{3 - y}{4}\right) = 3 - 4\left(\frac{3 - y}{4}\right) = y$$

y

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(3 - 4x) = \frac{3 - (3 - 4x)}{4} = x.$$

□

En el teorema 6.42 sobre la existencia de la inversa de una función f se pide que existe una función $g : B \to A$ tal que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$. Quizá el lector se haya preguntado si es suficiente pedir una sola de estas dos condiciones para garantizar que f sea biyectiva. La respuesta es no. Le dejamos al lector la tarea de mostrarlo (ver el ejercicio 9).

Para terminar esta sección mostraremos una propiedad importante de las funciones identidad.

Teorema 6.46. *Sea $f : A \to B$ una función. Se tiene que*

$$1_B \circ f = f \quad \text{ y } \; f \circ 1_A = f.$$

Demostración: Mostraremos la primera igualdad, la otra la dejamos como ejercicio. Es claro que $1_B \circ f$ y f tienen el mismo dominio y contradominio. Veamos que tienen la misma ley de correspondencia. Sea $x \in A$, entonces por definición de composición y de la función identidad 1_B tenemos que

$$(1_B \circ f)(x) = 1_B(f(x)) = f(x).$$

□

Ejercicios 6.4

1. Considere las siguientes funciones. Muestre que son biyectivas y halle sus respectivas inversas.
   a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = x + 5$.
   b) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dada por $f(x) = 5x - 8$.
   c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x+2}{4}$.
   d) $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$ dada por $f(x) = \frac{3x}{x-2}$.
   e) $f : \{0, 1, \cdots, 10\} \to \{0, 1 \cdots, 10\}$ definida por $f(x) = 10 - x$.
   f) $f : (-1, 3) \to (2, 7)$ dada por $f(x) = \frac{5}{4}x + \frac{13}{4}$.
   g) $f : (-1, 0) \to (0, \frac{1}{4})$ dada por $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$.
   h) $f : (-8, 8) \to (1, 2)$ dada por $f(x) = \frac{1}{16}(x - 8) + 2$.
2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biyectiva. Suponga que $f^{-1}(y) = 3y - 5$. Halle f.
3. Considere la siguiente función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{, si } x \text{ es par.} \\ x - 1 & \text{, si } x \text{ es impar.} \end{cases}$$

   Muestre que f es biyectiva y halle su inversa. (*Sugerencia:* haga un esbozo del diagrama de f).
4. Halle ejemplos de funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que $f^{-1} = f \circ f$.

5. Defina una biyección de $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ en $\{1,2,\cdots,8\}$ y halle su inversa. (*Sugerencia:* Puede definirla usando un diagrama).

6. Defina una biyección de $\{1,2,3,4\}$ en $\{a,b\}\times\{a,b\}$ y halle su inversa. (*Sugerencia:* Puede definirla usando un diagrama).

7. Sean A y B dos conjuntos, suponga que existe una función biyectiva de A en B. ¿Será cierto que existe una función biyectiva de B en A?

8. Sea $f : A \to B$. Muestre que
$$f \circ 1_A = f.$$

9. Muestre que existen funciones $f : A \to B$ y $g : B \to A$ tales que $g \circ f = 1_A$ pero ni f ni g son biyectivas. Compare esto con lo que dice el teorema 6.42.

   Sugerencia: El ejemplo es sencillo. Se puede resolver con A y B finitos. Haga un diagrama sagital.

10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x(x-1)^2$. Muestre que existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $(g \circ f)(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. *Sugerencia:* Haga la gráfica de f y defina g por partes.

11. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to A$ funciones. Muestre que si $g \circ f = 1_A$, entonces f es inyectiva y g es sobreyectiva.

6.5. La imagen y preimagen de un conjunto

Sea $f : A \to B$ y $C \subseteq A$. La **imagen** de C, que denotaremos por
$$f[C],$$
se define como el conjunto formado por las imágenes de los elementos de C. En símbolos
$$f[C] = \{f(x) :\ x \in C\}.$$
Notemos que cuando $C = A$ tenemos que $f[A]$ es precisamente el rango de f.

Ejemplo 6.47. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = x + 2.$$
Sea $C = [0,1)$. Afirmamos que
$$f[C] = [2,3).$$
En efecto, tenemos que
$$f[C] = \{x+2 :\ x \in [0,1)\} = \{x+2 :\ 0 \le x < 1\} = [2,3).$$

□

Ejemplo 6.48. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^2.$$

Entonces tenemos que

$$f[(-1,2)] = [0,4) \qquad\qquad f[\{-2,-1,2,3\}] = \{1,4,9\}.$$

□

Ejemplo 6.49. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = 6 - 3x$$

y $A = (1,2]$. Sea $x \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$1 < x \leq 2 \;\;\Leftrightarrow\;\; 0 \leq 6 - 3x < 3.$$

Por lo tanto $f[(1,2]] = [0,3)$.

□

Dada una función $f : A \to B$ y un conjunto $D \subseteq B$ definimos la **preimagen** de D como el conjunto formado por todas las preimágenes de los elementos de D. La preimagen de un conjunto la denotaremos por

$$f^{-1}(D).$$

En símbolos, tenemos que

$$f^{-1}(D) = \{x \in A : \; f(x) \in D\}.$$

Observación: Es importante notar que la preimagen de un conjunto está bien definida aún en el caso que f no sea biyectiva (y por lo tanto no tenga inversa). Aquí se abusa de la notación, pues se usa el símbolo f^{-1} aún cuando f no sea biyectiva. Al comienzo hay que prestar más atención para no equivocarse: cuando se escribe $f^{-1}(D)$, NO se está implícitamente afirmando que f tiene inversa.

Cuando el conjunto D tiene sólo un elemento se usa la siguiente notación

$$f^{-1}(b).$$

Es decir

$$f^{-1}(b) = \{a \in A : \; f(a) = b\}.$$

Ejemplo 6.50. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = 2 - x.$$

Tenemos que

$$f^{-1}(\{1,2,3,4,5\}) = \{1,0,-1,-2,-3\} \qquad\qquad f^{-1}((1,3]) = [-1,1)$$

$$f^{-1}(2) = \{0\} \qquad\qquad f^{-1}(4) = \{-2\}.$$

$\square$

Ejemplo 6.51. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^2 + 1.$$

Entonces tenemos que

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}((2,4]) & = & (1,\sqrt{3}] \cup [-\sqrt{3},-1) \\ f^{-1}(\{1,2,3,4,5\}) & = & \{0,\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{3},-\sqrt{3},2,-2\} \\ f^{-1}(7) & = & \{\sqrt{6},-\sqrt{6}\} \\ f^{-1}(\frac{5}{4}) & = & \{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\}. \end{array}$$

La preimagen de un conjunto puede ser vacía. Por ejemplo

$$f^{-1}((-3,0)) = \emptyset \qquad\qquad f^{-1}(\tfrac{1}{2}) = \emptyset.$$

$\square$

Ejemplo 6.52. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x^2 + x + 1$. Defina una relación S sobre $\mathbb{R}$ dada por

$$(x,x') \in S \quad \Leftrightarrow f(x) = f(x').$$

Mostraremos que S es una relación reflexiva, simétrica y transitiva (es decir, S es una relación de equivalencia). En efecto, como $f(x) = f(x)$, es obvio que $(x,x) \in S$ para todo $x \in R$, esto dice que S es reflexiva. Para ver que S es simÃ©trica, tomemos $(x,x') \in S$, entonces $f(x) = f(x')$. Claramente, $f(x') = f(x)$ y en consecuencia $(x',x) \in S$. Finalmente, para verificar que S es transitiva, sean $(x,y),(y,z) \in S$. Entonces $f(x) = f(y)$ y $f(y) = f(z)$. Luego $f(x) = f(z)$. Esto es $(x,z) \in S$ y así hemos mostrado que S es transitiva.

Observemos que

$$f^{-1}(1) = \{x \in \mathbb{R} : \ f(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} : \ 3x^2 + x + 1 = 1\} = \{x \in \mathbb{R} : \ (x,1) \in S\}.$$

Y en general, tenemos que si $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$f^{-1}(a) = \{x \in \mathbb{R} : \ f(x) = a\} = \{x \in \mathbb{R} : \ (x,a) \in S\}.$$

$\square$

Ejercicios 6.5

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 1$. Halle los conjuntos que se indican.

(a)	$f[[1,3]]$,	(b)	$f^{-1}((-1,3])$,	(c)	$f[\mathbb{N}]$
(d)	$f[(1,4) \cup (\sqrt{27},15)]$	(e)	$f^{-1}([5,20))$	(f)	$f^{-1}((2,5) \cup [7,15])$

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x - 1$. Halle los conjuntos que se indican.

(a)	$f[[1,3]]$,	(b)	$f^{-1}(\mathbb{R})$,	(c)	$f[\{1,2,3,4\}]$
(d)	$f[(1,15)]$	(e)	$f^{-1}(\{1,2,3\})$	(f)	$f^{-1}((0,\frac{1}{5}])$

3. Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f(n,m) = 2^n(2m+1) - 1.$$

Halle los conjuntos que se indican

a) $f^{-1}(\{1,2,3,4,5,6\})$

b) $f[C]$ donde $C = \{(1,1),(1,2),(2,3),(3,3),(2,1),(3,2)\}$.

4. Sea $f : A \to B$ una función. Defina una relación S sobre A dada por

$$(x,x') \in S \quad \Leftrightarrow f(x) = f(x').$$

Muestre que S es una relación reflexiva, simétrica y transitiva (es decir, S es una relación de equivalencia).

5. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f(n) = 3n + 1.$$

Defina una función $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ de la siguiente manera

$$g(A) = f[A].$$

a) Halle los conjuntos que se indican

(a) $g(\{1,3,5\})$, (b) $g(\{2,3,5\})$, (c) $g(P)$ donde P son los números pares.

b) Muestre que g es inyectiva.

6. Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = x^2 + 4$. Defina $g : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ por $g(A) = f[A]$. Muestre que g no es inyectiva.

7. Sea $f : A \to B$ una función

a) Muestre que $f^{-1}(B) = A$.

b) Sea $C \subseteq D \subseteq A$. Muestre que $f[C] \subseteq f[D]$

c) Sea $E \subseteq F \subseteq B$. Muestre que $f^{-1}(E) \subseteq f^{-1}(F)$.

8. Sea $f : A \to B$ una función

a) Sea $C \subseteq A$. Muestre que
$$C \subseteq f^{-1}(f[C])$$

b) Sea $D \subseteq B$. Muestre que
$$f[(f^{-1}(D)] \subseteq D$$

c) Determine cuándo se cumple la igualdad en los ejercicios anteriores.

d) ¿Cuándo es correcto escribir $f^{-1}[f[C]]$, para $C \subseteq A$?

9. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n) = 3n + 1$ defina $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ por
$$g(A) = f^{-1}(A).$$
¿Es g sobreyectiva? ¿Es g inyectiva?

10. Sea $f : A \to B$ una función. Defina $g : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ y $h : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ por
$$g(D) = f[D] \text{ con } D \subseteq A$$
y
$$h(E) = f^{-1}(E) \text{ con } E \subseteq B.$$
Es decir, $g(D)$ es la imagen de D bajo f y $h(E)$ es la preimagen de E bajo f. Muestre que

a) f es inyectiva si, y sólo si, g es inyectiva.

b) f es sobreyectiva si, y sólo si, g es sobreyectiva.

c) f es inyectiva si, y sólo si, h es sobreyectiva.

d) f es inyectiva si, y sólo si, $g(A \setminus D) = g(A) \setminus g(D)$ para todo $D \subseteq A$.

e) Si h es inyectiva, entonces f es sobreyectiva. ¿Es válido el recíproco?

11. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. Muestre que

a) $(g \circ f)^{-1}(c) = f^{-1}(g^{-1}(c))$ para todo $c \in C$.

b) $(g \circ f)[D] = g[f[D]]$ para todo $D \subseteq A$.

12. Sea $f : A \to B$ una función. Muestre que existe un conjunto C y funciones $g : A \to C$ y $h : C \to B$ tales que g es sobreyectiva, h es inyectiva y $f = h \circ g$. *Sugerencia: C* es $f[A]$.

Ejercicios suplementarios del capítulo 6

1. Determine si las siguientes reglas definen una función de $\mathbb{N}$ en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
   a) $n \mapsto \{n\}$,
   b) $n \mapsto \{m : \ m \text{ es un múltiplo de } n\}$,
   c) $n \mapsto \{m \in \mathbb{N} : n \leq m\}$,
   d) $n \mapsto \emptyset$.
2. Determine las imágenes indicadas.
   a) $f : \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ dada por $f(A) = A \cup \{1,2\}$. Hallar $f(\emptyset)$ y $f(\{1,2\})$.
   b) $f : \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ dada por $f(A) = A \triangle \{1,2\}$. Hallar $f(\emptyset)$ y $f(\{1,3\})$.
   c) $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $f(n) = \{m \in \mathbb{N} : n \leq m\}$. Hallar $f(0)$ y $f(3)$.
   d) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por partes de la manera siguiente
   $$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{, si } x \text{ es par} \\ x & \text{, si } x \text{ es impar.} \end{cases}$$
   Hallar $f(2)$ y $f(3)$.
   e) $f : \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ dada por $f(A) = A \cap \{1,2\}$. Hallar $f(\emptyset)$ y $f(\{1,3\})$.
3. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una función. Suponga que f satisface
   $$f(n) = (n-1)f(n-1)$$
   para todo $n > 1$ y también que $f(1) = 1$. Halle $f(4)$.
4. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una función. Suponga que f satisface
   $$f(n) = n \cdot f(n-1) + 1$$
   para todo $n > 1$ y también que $f(1) = 997$. Halle $f(5)$.
5. En cada uno de los ejercicios que siguen determine si existe (y en caso que sea posible, encuentre) una función $f : A \to B$ que sea (a) inyectiva, (b) sobreyectiva, (c) biyectiva.
   a) $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\}$,
   b) $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{0\} \times \{1,2,3,4,5,\}$,
   c) $A = \mathcal{P}(\{0,1,2\})$ y $B = \{0,1,2,\cdots,7\}$,

d) $A = \mathcal{P}(\{0,1\})$ y $B = \{0,1\} \times \{0,1\}$,

e) $A = \mathcal{P}(\{0,1,2\})$ y $B = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\}$,

f) $A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ divide a } 12\}$ y $B = \{1,2,3,4,5\}$.

6. Determine si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas y/o biyectivas. Determine el rango de cada una de ellas.

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $f(n) = 3n + 2$.

b) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $f((n,m)) = m$.

c) $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definida por $f(n) = \{n\}$.

d) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $f((n,m)) = m \cdot n$.

e) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, definida por $f((n,m)) = (m,n)$.

f) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por $f(n) = (1,n)$.

g) $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $f(n) = \{m \in \mathbb{N} : n \leq m\}$.

h) $f : \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ dada por $f(A) = A \triangle \{1,2\}$

i) $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $f(A) = A \cup \{1,2,3,4\}$.

j) $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $f(A,B) = A \setminus B$.

k) $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $f(A,B) = A \triangle B$.

l) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por partes de la manera siguiente

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{, si } x \text{ es par} \\ x & \text{, si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

7. Muestre que la función dada es biyectiva y halle su inversa.

a) $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ dada por $f(x) = \frac{x}{x-2}$

b) $f : (5,15) \to (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ dada por $f(x) = \frac{1}{60}(x + 15)$.

c) $f : (-3,-2) \to (5,10)$ dada por $f(x) = 5x + 20$.

d) $f : \mathcal{P}(\{0,1,2\}) \to \mathcal{P}(\{0,1,2\})$ definida por $f(A) = A \triangle \{1\}$.

6.6. Cardinalidad de conjuntos finitos

En esta sección estudiaremos el concepto de cardinalidad de un conjunto finito. Este concepto es la versión matemática de la noción común de “número de elementos de un conjunto”.

6.6.1. Conjuntos finitos y métodos de conteo

¿De cuántas maneras podemos ordenar 3 libros distintos en un estante? Designemos con las letras a, b y c los 3 libros. Podemos hacer una lista de todas las posibles ordenaciones:

$$\begin{array}{ccc} abc & acb & bac \\ bca & cab & cba \end{array}$$

Vemos entonces que hay 6 posibles maneras de ordenarlos. Ahora bien, si en lugar de 3 tenemos 1000 libros, no podemos hacer una lista exhaustiva de todas las posibilidades pues es un número extraordinariamente grande. Por esto se han desarrollado los *métodos de conteo*. En esta sección presentaremos algunos de estos métodos. Lo primero que haremos es precisar la noción de "un conjunto con n elementos". Aunque su significado es para todos intuitivamente claro, es importante que lo expresemos usando el lenguaje de las Matemáticas. Al igual que en todo proceso de medición (en el caso que nos ocupa, estamos interesados en medir el número de elementos de un conjunto) es fundamental fijar un patrón de referencia. El conjunto con n elementos que usaremos como patrón es $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ (¿Cuál otro podría ser?). También es conveniente tener a la mano una notación práctica para trabajar con estos conceptos. Todo esto lo haremos a continuación.

Definición 6.53. *Sea A un conjunto y un número natural positivo n. Diremos que A tiene n* ***elementos*** *si existe una función biyectiva*

$$f : \{1, 2, 3, \cdots, n\} \to A.$$

En este caso escribiremos

$$|A| = n.$$

Diremos que A es ***finito*** *si A es vacío o si tiene n elementos para algún n. Diremos que el conjunto vacío tiene 0 elementos.*

El lector debería convencerse que la definición que acabamos de dar captura la noción intuitiva de un conjunto con n elementos.

El símbolo $|A|$ se lee "el número de elementos de A", también se dice "la cardinalidad de $|A|$". La ecuación $|A| = |B|$, se lee "A y B tienen el mismo número de elementos" o " A y B tienen la misma cardinalidad".

Ejemplo 6.54. Sea $A = \{2, 4, a, b, 8\}$. Veamos que A satisface la definición de un conjunto con 5 elementos. Para esto debemos conseguir una función biyectiva de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ en A. En efecto, considere la siguiente regla

$$\begin{array}{rcl} f(1) & = & 2 \\ f(2) & = & 4 \\ f(3) & = & a \\ f(4) & = & b \\ f(5) & = & 8 \end{array}$$

□

Teniendo aclarado la noción de "número de elemento de un conjunto" o "cardinalidad de un conjunto finito" nos dedicaremos a estudiar sus propiedades. El primer resultado es sumamente útil.

Teorema 6.55. *Sean A y B dos conjuntos finitos. Si A y B son disjuntosá (es decir, $A \cap B = \emptyset$), entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$.*

Antes de dar la demostración de este resultado veremos un ejemplo.

Ejemplo 6.56. Sea $A = \{1, 4, 6\}$ y $B = \{3, 7, 8, 9\}$. Tenemos que $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B$ es igual a $\{1, 4, 6, 3, 7, 8, 9\}$ y $A \cup B$ tiene $3 + 4$ elementos.

Observe que es crucial que los conjuntos sean disjuntos. Por ejemplo, sea $C = \{1, 4, 6\}$ y $D = \{1, 7, 8, 9\}$. En este caso $C \cap D = \{1\}$ y $C \cup D$ tiene sólo 6 elementos. □

El teorema 6.55 se puede desmotrar por inducción en el número de elementos de A (vea el ejercicio 8). Pero también se puede hacer de forma mas directa. Daremos a continuación las indicaciones.

Demostración del teorema 6.55: Sea $n = |A|$ y $m = |B|$. Primero observemos que cuando A o B es el conjunto vacío (es decir, si $n = 0$ o $m = 0$) en realidad no hay nada que demostrar; pues si $A = \emptyset$, entonces $A \cup B = B$ y por lo tanto $A \cup B$ tiene m elementos. Por lo dicho anteriormente, supondremos que $n, m \geq 1$.

La hipótesis acerca de A y B nos asegura que existen dos funciones biyectivas: $f : \{1, 2, 3, \cdots, n\} \to A$ y $g : \{1, 2, 3, \cdots, m\} \to B$. La primera garantiza que A tiene n elementos y la segunda nos asegura que B tiene m elementos. Usando estas dos funciones tenemos que ingeniárnosla para definir una función

$$h : \{1, 2, 3, \cdots, n + m\} \to A \cup B$$

que sea biyectiva. Haremos la demostración para el caso particular $n = 4$ y $m = 7$. Dejaremos como ejercicio al lector escribir una demostración para el caso general (ver ejercicio 7).

Tenemos entonces dos funciones biyectivas

$$f : \{1, 2, 3, 4\} \to A \quad \text{y} \quad g : \{1, 2, 3, \cdots, 7\} \to B.$$

La definición de h es la siguiente

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{, si } x \in \{1, 2, 3, 4\} \\ g(x - 4) & \text{, si } x \in \{5, 6, \cdots, 11\}. \end{cases}$$

A continuación verificaremos tres cosas: (i) h está bien definida. Es decir, verificaremos que h en realidad asigna a cada x en $\{1, 2, \cdots, 11\}$ un elemento de $A \cup B$, (ii) h es inyectiva y (iii) h es sobreyectiva.

(i) *h está bien definida.* Sea $x \in \{1, 2, \cdots, 11\}$. Hay dos casos a considerar:

(a) Supongamos que $x \in \{1,2,3,4\}$. Entonces x pertenece al dominio de f y por lo tanto $f(x)$ está bien definida y así $h(x) \in A$ (y en consecuencia, $h(x) \in A \cup B$).

(b) Supongamos que $x \in \{5,6,\cdots,11\}$. Entonces $5 \leq x \leq 11$. De aquí se concluye que $1 \leq x-4 \leq 7$. Es decir $x-4$ pertenece al dominio de g y por lo tanto $g(x-4)$ está bien definido. Además, en este caso $h(x) \in B$ y por lo tanto $h(x) \in A \cup B$.

(ii) *h es inyectiva.* Sean $x, x' \in \{1,2,\cdots,11\}$ con $x \neq x'$. Mostraremos que $h(x) \neq h(x')$. Como h está definida por partes consideraremos todos los casos posibles.

(1) Supongamos que $x, x' \in \{1,2,3,4\}$. En este caso $h(x) = f(x)$ y $h(x') = f(x')$. Como f es inyectiva y $x \neq x'$, entonces $f(x) \neq f(x')$ y por lo tanto $h(x) \neq h(x')$.

(2) Supongamos que $x, x' \in \{5,6,\cdots,,11\}$. Este caso es similar al anterior.

(3) Supongamos que $x \in \{1,2,3,4\}$ y $x' \in \{5,6,\cdots,,11\}$. En este caso $h(x) = f(x)$ y $h(x') = g(x'-4)$. Como $f(x) \in A$, $g(x'-4) \in B$ y por la hipótesis $A \cap B = \emptyset$, tenemos que $f(x) \neq g(x'-4)$. Por lo tanto $h(x) \neq h(x')$.

(4) Supongamos que $x' \in \{1,2,3,4\}$ y $x \in \{5,6,\cdots,,11\}$. Este caso se trata como se hizo con el tercer caso. Dejamos a cargo del lector completar los detalles.

Hemos mostrado que en cada uno de los casos posibles $h(x) \neq h(x')$ por lo tanto h es inyectiva.

(iii) *h es sobreyectiva.* Fijemos $y \in A \cup B$ y mostremos que existe $x \in \{1,2,\cdots,11\}$ tal que $h(x) = y$. Tenemos dos casos a considerar

(1) Supongamos que $y \in A$. Como f es sobreyectiva, entonces existe $x \in \{1,2,3,4\}$ tal que $f(x) = y$. Por la definición de h tenemos que $h(x) = y$.

(2) Supongamos que $y \in B$. Como g es sobreyectiva, entonces existe $z \in \{1,\cdots,7\}$ tal que $g(z) = y$. Uno estaría tentado a decir que $h(z) = y$, pero esto no es cierto. Lo que si podemos decir es que $5 \leq z+4 \leq 11$ y por lo tanto por la definición de h tenemos que $h(z+4) = g(z)$ y en consecuencia $h(z+4) = y$. Es decir $z+4$ es la preimagen de y.

Hemos mostrado en cada uno de los casos que y tiene preimagen. Por lo tanto h es sobreyectiva.

□

Podemos generalizar el resultado anterior para la unión de tres o más conjuntos disjuntos de la manera siguiente.

Teorema 6.57. *Sean A, B y C tres conjuntos finitos tales que $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$, entonces $A \cup B \cup C$ es finito y además*

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|.$$

Demostración: Sean A, B y C tres conjuntos como en la hipótesis. Considere el siguiente conjunto

$$D = A \cup B.$$

Tenemos entonces que D y C son disjuntos (¿por qué?). Luego por el teorema 6.55 concluimos que

$$|D \cup C| = |D| + |C|.$$

Análogamente, como A y B son disjuntos, tenemos que

$$|D| = |A \cup B| = |A| + |B|.$$

De la dos igualdades anteriores obtenemos

$$|A \cup B \cup C| = |D \cup C| = |D| + |C| = |A| + |B| + |C|.$$

□

Cuando una familia de conjuntos $\{A_i\}_i$ tiene la propiedad que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para cada par de índices distintos i, j se dice que la familia es **disjunta dos a dos**. El resultado anterior se puede generalizar: Sea $\{A_i\}_{i=1}^n$ una familia de conjuntos finitos disjuntas dos a dos, entonces

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n|.$$

La demostración de este hecho queda como ejercicio (ver ejercicio 9).

Otra propiedad de los conjuntos finitos es la siguiente:

Teorema 6.58. *Sea A un conjunto finito y $B \subseteq A$, entonces B es finito y además $|B| \leq |A|$.*

□

En otras palabras, si A tiene n elementos y $B \subseteq A$, entonces B tiene a lo sumo n elementos. El lector que quiera ver una prueba formal de este resultado puede ver el ejercicio 10 donde encontrará algunas indicaciones de como hacerlo.

El siguiente resultado es similar al teorema 6.55 pero ahora también incluiremos el caso donde los conjuntos A y B no son necesariamente disjuntos.

Teorema 6.59. *Sean A y B conjuntos finitos, entonces se cumple que*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Demostración: Comencemos observando que

$$A \cup B = (A \setminus B) \ \cup \ (A \cap B) \ \cup \ (B \setminus A)$$

y además que

$$\begin{aligned}
(A \cap B) \cap (A \setminus B) &= \emptyset \\
(A \cap B) \cap (B \setminus A) &= \emptyset \\
(A \setminus B) \cap (B \setminus A) &= \emptyset.
\end{aligned}$$

Es decir, cada par de estos tres conjuntos son disjuntos. Ya que $A \cap B \subseteq A$, $A \setminus B \subseteq A$ y $B \setminus A \subseteq B$, entonces cada uno de ellos es finito (por el teorema 6.58). Podemos ahora usar el teorema 6.57 y concluir que

$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|. \tag{6.2}$$

Observe que $A \setminus B$ y $B \cap A$ son disjuntos, es decir

$$(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

y además que

$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B).$$

Ya que $A \setminus B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq A$, entonces ambos son conjuntos finitos (por el teorema 6.58). Por lo tanto por el teorema 6.55 tenemos que

$$|A| = |A \cap B| + |A \setminus B|. \tag{6.3}$$

Análogamente para el conjunto B tenemos que

$$|B| = |A \cap B| + |B \setminus A|. \tag{6.4}$$

Sumando las igualdades dadas en (6.3) y (6.4) obtenemos que

$$|A| + |B| = |A \cap B| + |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|.$$

Comparando con (6.2) obtenemos

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

y ésta es la ecuación buscada.

□

El resultado anterior se puede generalizar para tres o más conjuntos finitos. Este resultado se conoce como el **principio de inclusión y exclusión**.

Teorema 6.60. *(Principio de inclusión y exclusión) Sean A, B y C tres conjuntos finitos, entonces $A \cup B \cup C$ es finito y además se cumple que*

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

□

La utilidad de este resultado reside en que en general es más fácil contar el número de elementos de la intersección de conjuntos que el de la unión de conjuntos. En el ejercicio 11 el lector encontrará algunas indicaciones de como demostrar este resultado.

Ejemplos 6.61. ¿Cuántos enteros del conjunto $S = \{1, 2, 3, \cdots, 1000\}$ son divisibles por 3 o 5? Definimos dos conjuntos D_3 y D_5 de la siguiente manera

$$D_3 = \{n \in S : \ n \text{ es divisible por } 3\} \ \text{ y } \ D_5 = \{n \in S : \ n \text{ es divisible por } 5\}.$$

Estamos buscando el número de elementos de $D_3 \cup D_5$. Haciendo uso del teorema 6.59 bastaría que consiguiéramos $|D_3|$, $|D_5|$ y $|D_3 \cap D_5|$. Notemos que n es divisible por 3 si n es de la forma $3k$ para algún entero k. Como $3 \cdot 333 = 999$, $3 \cdot 334 = 1002$, y $5 \cdot 200 = 1000$ podemos concluir que

$$D_3 = \{3k : 1 \leq k \leq 333\} \ \text{ y } \ D_5 = \{5k : 1 \leq k \leq 200\}.$$

Esto nos dice que $|D_3| = 333$ y $|D_5| = 200$. Por otra parte, observemos que si $n \in D_3 \cap D_5$, entonces n es divisible por 15 (pues la factorización de n en factores primos incluirá tanto al 3 como al 5). Recíprocamente, si n es divisible por 15 entonces n es divisible por 3 y por 5. Esto nos dice que

$$D_3 \cap D_5 = \{n \in S : \ n \text{ es divisible por } 15\}.$$

Por lo tanto, como $15 \cdot 66 = 990$ y $15 \cdot 67 = 1005$, entonces

$$D_3 \cap D_5 = \{15k : 1 \leq k \leq 66\}.$$

De esto tenemos que $|D_3 \cap D_5| = 66$. Finalmente

$$|D_3 \cup D_5| = |D_3| + |D_5| - |D_3 \cap D_5| = 333 + 200 - 66 = 467.$$

Veamos otro ejemplo. ¿Cuántos enteros en S son divisibles por 3, 5 o 7? Sea D_7 el conjunto

$$D_7 = \{n \in S : \ n \text{ es divisible por } 7\}.$$

Al igual que antes se tiene que $|D_7| = 142$, pues $7 \cdot 142 = 994$ y $7 \cdot 143 = 1001$. Por otra parte, como 7, 3 y 5 son números primos, entonces

$$\begin{array}{rcl}
D_3 \cap D_7 & = & \{n \in S : \ n \text{ es divisible por } 21\} \\
D_5 \cap D_7 & = & \{n \in S : \ n \text{ es divisible por } 35\} \\
D_3 \cap D_5 \cap D_7 & = & \{n \in S : \ n \text{ es divisible por } 105\}.
\end{array}$$

Razonando análogamente a como hiciéramos antes, obtenemos que $|D_3 \cap D_7| = 47$, $|D_5 \cap D_7| = 28$ y $|D_3 \cap D_5 \cap D_7| = 9$. Por el principio de inclusión y exclusión tenemos que

$$\begin{array}{rcl}
|D_3 \cup D_5 \cup D_7| & = & |D_3| + |D_5| + |D_7| - |D_3 \cap D_5| - |D_3 \cap D_7| - \\
& & |D_5 \cap D_7| + |D_3 \cap D_5 \cap D_7| \\
& = & 333 + 200 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9 \\
& = & 543.
\end{array}$$

$\square$

Observación 6.62. El principio de inclusión y exclusión se puede generalizar a un número arbitrario de conjuntos. Por ejemplo, para cuatro conjuntos A, B, C y D se tiene que

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C \cup D| &= |A| + |B| + |C| + |D| \\ &\quad -|A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |C \cap D| - |B \cap D| \\ &\quad +|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| \\ &\quad -|A \cap B \cap C \cap D|.\end{aligned}$$

Le dejamos al lector la tarea de comprobar esa fórmula.

□

Si entre dos conjuntos A y B se puede definir una función biyectiva, entonces A y B tienen el mismo número de elementos. Esa afirmación es "intuitivamente" clara, pero de todas maneras la demostraremos para ilustrar que la definición 6.53 sí captura el significado intuitivo de cardinalidad.

Teorema 6.63. *Sea A un conjunto finito y supongamos que existe un función biyectiva $f : A \to B$, entonces B es finito y además $|A| = |B|$.*

Demostración: Sea n el número de elementos de A, es decir, $|A| = n$ y sea $g : \{1, 2, \cdots, n\} \to A$ una biyección. Queremos encontrar una biyección $h : \{1, 2, \cdots, n\} \to B$. La función compuesta $f \circ g : \{1, 2, \cdots, n\} \to B$ es la candidata natural para h. En efecto, ya hemos visto en el teorema 6.39 que la composición de funciones biyectivas es biyectiva, así que $f \circ g$ es la biyección buscada. □

Ejemplo 6.64. Consideremos los conjuntos

$$A = \{2, 5, 7, 8\}\ ,\ B = \{a\} \times \{2, 5, 7, 8\}.$$

Es fácil ver que B tiene 4 elementos (¿cuáles son?). Podemos también definir una biyección $f : A \to B$ entre A y B de la siguiente manera

$$f(x) = (a, x).$$

Es decir, a cada elemento x de A lo enviamos al par ordenado (a, x).

Para ilustrar lo que hicimos en la demostración del teorema 6.63 busquemos una biyección $g : \{1, 2, 3, 4\} \to \{2, 5, 7, 8\}$. Por ejemplo: $g(1) = 2$, $g(2) = 5$, $g(3) = 7$ y $g(4) = 8$. Ahora podemos calcular la función compuesta $f \circ g : \{1, 2, 3, 4\} \to \{a\} \times \{2, 5, 7, 8\}$ y obtenemos $(f \circ g)(1) = (a, 2)$, $(f \circ g)(2) = (a, 5)$, $(f \circ g)(3) = (a, 7)$ y $(f \circ g)(4) = (a, 8)$. La función $f \circ g$ es biyectiva.

□

Observación 6.65. *Si A y B tienen n elementos cada uno, ¿Cúantas biyecciones existen entre A y B? La respuesta es que existen $n!$ funciones biyectivas entre A y B [3]. El lector interesado puede hacer la demostración de esta afirmación por inducción en n.*

[3]Recordemos que el factorial de un número natural se define por $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$. Por ejemplo, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

6.6.2. Cardinalidad del conjunto potencia

Ya vimos en el Ejemplo 4.18 que si A tiene n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tienes 2^n elementos. Vamos a repetir el argumento usado en la demostración pero ahora en términos de funciones. Comenzaremos analizando el caso cuando A es el conjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$.

Teorema 6.66. *Sea n un natural con $n \geq 1$, entonces $\mathcal{P}(\{1, 2, \cdots, n\})$ tiene 2^n elementos.*

Demostración: La demostración la haremos por inducción.

Base de la inducción: Para $n = 1$, tenemos que $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$ tiene 2^1 elementos.

Paso inductivo: Supongamos que el resultado es cierto para k y mostrémoslo para $k + 1$. La hipótesis inductiva es que $\mathcal{P}(\{1, 2, 3 \cdots, k\})$ tiene 2^k elementos. Consideremos los siguientes conjuntos:

$$A = \{X \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3 \cdots, k+1\}) : \ k+1 \in X\}$$

$$B = \{X \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3 \cdots, k+1\}) : \ k+1 \notin X\}.$$

Observemos que B es igual a $\mathcal{P}(\{1, 2, 3 \cdots, k\})$ (verifíquelo!). Tenemos que $A \cap B = \emptyset$ y además que $\mathcal{P}(\{1, 2, 3 \cdots, k+1\}) = A \cup B$ (verifíquelo!). La hipótesis inductiva nos dice que B tiene 2^k elementos. Mostraremos en seguida que A también tiene 2^k elementos. Supongamos esto por un momento y terminemos la verificación del paso inductivo. Como $A \cup B$ es igual a $\mathcal{P}(\{1, 2, 3 \cdots, k+1\})$ y A y B son disjuntos, entonces podemos usar el teorema 6.55 y concluir que $\mathcal{P}(\{1, 2, 3 \cdots, k+1\})$ tiene $2^k + 2^k$ elementos. Como $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$, hemos mostrado que $\mathcal{P}(\{1, 2, 3 \cdots, k+1\})$ tiene 2^{k+1} elementos. Con esto terminamos la verificación del paso inductivo.

Nos quedó pendiente mostrar que A tiene 2^k elementos. Considere la siguiente función: $f : B \to A$ dada por

$$f(X) = X \cup \{k+1\}.$$

Observe que $f(X)$ es un subconjunto de $\{1, 2, 3 \cdots, k+1\}$. Veamos que f es inyectiva. Sean $X, Y \in B$ con $X \neq Y$. Entonces al agregarles a estos conjuntos el número $k+1$ siguen siendo distintos, en otras palabras, $X \cup \{k+1\} \neq Y \cup \{k+1\}$. Esto muestra que $f(X) \neq f(Y)$ y por lo tanto que f es inyectiva. Dejamos como ejercicio al lector la verificación que f es sobreyectiva (ver ejercicio 16).

□

Ahora completamos el trabajo mostrando que si A tiene n elementos,entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos.

Teorema 6.67. *Sea A un conjunto finito con n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos.*

Demostración: Definiremos una biyección entre $\mathcal{P}(A)$ y $\mathcal{P}(\{1, 2, \cdots, n\})$. Después de tener a la mano esa biyección podremos usar el teorema 6.63, pues ya sabemos que $\mathcal{P}(\{1, 2, \cdots, n\})$ tiene 2^n elementos y así concluir que $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos.

Si A es el conjunto vacío, entonces $\mathcal{P}(\emptyset)$ tiene un solo elemento, es decir tiene 2^0 elementos. Podemos entonces suponer que $|A| \geq 1$. Sea A un conjunto con n elementos y fijemos un biyección $f : \{1, 2, 3 \cdots, n\} \to A$. Definiremos una función $g : \mathcal{P}(\{1, 2, \cdots, n\}) \to \mathcal{P}(A)$ de la manera siguiente. Dado un subconjunto $B \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$ definimos $g(B)$ como el conjunto

$$g(B) = \{f(b) : \; b \in B\}.$$

Es decir, $g(B)$ consiste de las imágenes bajo f de los elementos de B. Dejamos al lector la tarea de convencerse que g es en efecto una biyección (ver ejercicio 18).

□

6.6.3. Cardinalidad del producto cartesiano

Ya vimos en el ejemplo 4.26 que si A y B son dos conjuntos finitos, entonces el producto cartesiano $A \times B$ es finito y se cumple que

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Daremos otra demostración de esta fórmula, un poco diferente de la que vimos antes. Para facilitar la presentación, enumeraremos los elementos de A de la siguiente manera:

$$A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\},$$

donde n es el nÃºmero de elementos de A. Para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ definimos el conjunto D_i como

$$D_i = \{x_i\} \times B.$$

Dejamos al lector la tarea de verificar que

$$A \times B = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n.$$

Observemos que si $i \neq j$, entonces D_i y D_j son disjuntos (¿por qué?). Por lo tanto, podemos hacer uso de la versión generalizada del teorema 6.57 (ver el comentario que sigue al teorema 6.57 y el ejercicio 9) y concluir que

$$|A \times B| = |D_1| + |D_2| + \cdots + |D_n|.$$

Usando el teorema 6.63 tenemos que, para cada i, $|D_i| = |B|$ (¿Cuál es la biyección que hace falta para poder usar el teorema 6.63?). Así que en la suma anterior tenemos $|B|$ repetido n veces. En otras palabras,

$$|A \times B| = n \cdot |B| = |A| \cdot |B|.$$

Esto era lo que queríamos demostrar.

□

Ejemplo 6.68. Considere el conjunto

$$S = \{100, 101, 102, \cdots, 999\}.$$

Observemos que $|S| = 900$. ¿Cuántos números en S tienen un 3 en la primera cifra? Reflexionando un poco vemos que existe 100 de esos números. Podemos también responder esta pregunta usando lo visto anteriormente acerca de la cardinalidad del producto cartesiano. Los números que estamos buscando tienen la forma $3ab$, donde a, b son dígitos entre 0 y 9 (ambos incluidos). Sabemos que existen 10^2 pares ordenados de la forma (a, b) con $a, b \in \{0, 1, \cdots, 9\}$. Cada par (a, b) nos proporciona uno de los números buscados, precisamente el número $3ab$. Y recíprocamente, a cada número de la forma $3ab$ le corresponde el par (a, b). Esto muestra que la función $(a, b) \mapsto 3ab$ es una biyección entre $\{0, 1, \cdots, 9\} \times \{0, 1, \cdots, 9\}$ y el conjunto al que le estamos determinando la cardinalidad. Usando el teorema 6.63 concluimos que existen 100 números de la forma $3ab$.

□

6.6.4. Cardinalidad de B^A

En esta sección presentaremos de manera algo diferente la demostración del Teorema 6.12 que dice que si A tiene n elementos y B tiene m elementos entonces existen m^n funciones de A en B, esto es,

$$|B^A| = |B|^{|A|}$$

Introduciremos ahora un concepto que es de uso frecuente en matemáticas que será usado en la demostración que daremos mas adelante.

Definición 6.69. *Sea $f : A \to B$ una función y $C \subseteq A$. La* restricción de f a C *es una función de C en B, que denotaremos $f \restriction C$, dada por la misma regla que f, es decir, $f \restriction (x) = f(x)$.*

La demostración se hará por inducción en n.

Base de la inducción: Para $n = 1$, es inmediato que existen tantas funciones de A en B, como elementos tenga B, es decir, existe m funciones de A en B, que es lo que se quería demostrar.

Hipótesis inductiva: Supongamos que para todo conjunto A con n elementos y todo conjunto finito B se cumple que $|B^A| = |B|^{|A|}$. Demostraremos que lo mismo vale para un conjunto con $n + 1$ elementos.

Sea C un conjunto con $n + 1$ elementos, escojamos un elemento cualquiera de C, que denotaremos c_0. Sea $A = C \setminus \{c_0\}$. Entonces A tiene n elementos. Definimos una función $H : B^C \to B^A \times B$ de la siguiente manera:

$$f \mapsto (f\lceil A, f(c_0))$$

El lector debe convencerse que H está bien definida. Veamos que H es una biyección. Verifiquemos primero que H es inyectiva. Sean $f, g \in B^C$ con $f \neq g$. Entonces existe $x \in C$

tal que $f(x) \neq g(x)$. Hay dos casos a considerar: (a) $x \in A$, entonces $(f\lceil A)(x) \neq (g\lceil A)(x)$ asi $f\lceil A \neq g\lceil A$ y por lo tanto $H(f) \neq H(g)$. (b) $x = c_0$. Entonces $f(c_0) \neq g(c_0)$ y por consiguiente $H(f) \neq H(g)$.

Veamos que H es sobreyectiva. Sea $(g, b) \in B^A \times B$, esto es, $g : A \to B$ y $b \in B$. Definimos $f : C \to B$ por partes de la siguiente manera: Recuerde que $C = A \cup \{c_0\}$.

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{, si } x \in A \\ b & \text{, si } x = c_0. \end{cases}$$

Dejamos al lector la verificación de que $H(f) = (g, b)$ y por lo tanto H es sobreyectiva.

□

El siguiente lo enunciamos sin demostración.

Teorema 6.70. *Sean A y B conjuntos finitos con $n = |A| \leq |B| = m$. Entonces existen $\frac{m!}{(m-n)!}$ funciones inyectivas de A en B.*

Ejercicios 6.6.1

1. Determine si los siguientes conjuntos son finitos y en caso de serlo diga cuantos elementos tiene.
   a) $\{n \in \mathbb{N} : \text{ La suma de las cifras de } n \text{ es igual a } 5\}$
   b) $\{n \in \mathbb{N} : \ 4 + \frac{1}{n} > \sqrt{17}\}$
   c) $\{n \in \mathbb{N} : \ \frac{3n+1}{4n+2} < \frac{29}{40}\}$
2. En un grupo de 150 personas, hay 75 que nadan, 50 montan bicicleta y 80 trotan; y algunos que no hacen ninguna de estas 3 actividades. Además, en el grupo hay 32 personas que trotan pero no andan en bicicleta, 27 que trotan y nadan y 10 que practican los tres deportes.
   a) ¿Cuántas personas solamente trotan (es decir, trotan pero ni nadan ni andan en bicicleta)?
   b) Si 21 personas andan en bicicleta y nadan ¿Cuántas no realizan ninguna de las tres actividades?

   (*Sugerencia:* Haga un diagrama de Venn).
3. De 200 personas, 150 trotan o nadan (pudieran hacer las dos cosas). Si 85 nadan y 60 hacen las dos actividades ¿cuántas trotan?
4. Una bolsa contiene 50 metras de cuatro colores distintos. Explique por qué debe haber al menos 13 metras del mismo color.
5. Suponga que se colocan 73 metras en ocho cajas.
   a) Muestre que una caja debe contener al menos 10 metras.
   b) Muestre que si dos de las cajas están vacías, entonces alguna caja contiene al menos 13 metras.

6. Encuentre el número de enteros en $\{1, 2, \cdots, 1000\}$ que sean divisibles por 4, 5 ó 7. (*Sugerencia:* Vea el ejemplo 6.61).

7. Sean A y B dos conjuntos disjuntos tales que A tiene n elementos y B tiene m elementos. Sean $f : \{1, 2, 3, \cdots, n\} \to A$ y $g : \{1, 2, 3, \cdots, m\} \to B$ funciones biyectivas. Defina $h : \{1, 2, \cdots, n+m\} \to (A \cup B)$ de la manera siguiente:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{, si } 1 \leq x \leq n \\ g(x-n) & \text{, si } n+1 \leq x \leq n+m. \end{cases}$$

   Muestre que h es una biyección.

   (*Sugerencia:* Imite lo hecho en la demostración del teorema 6.55).

8. En este ejercicio damos algunas indicaciones para hacer una prueba por inducción del teorema 6.55. Sea A con n elementos, B con m elementos y $A \cap B = \emptyset$. Queremos mostrar por inducción en n que $A \cup B$ tiene $n+m$ elementos.

   a) *Base de la inducción*. Suponga que A tiene un solo elemento. Use la idea del ejercicio anterior para mostrar que $A \cup B$ tiene $m+1$ elementos.

   b) *Paso inductivo*. Suponga que el resultado vale cuando A tiene n elementos. Debemos mostrarlo para un conjunto con $n+1$ elementos. Sea C un conjunto con $n+1$ elementos y B disjunto de C. Escoja un elemento cualquiera $c \in C$. Sea $A = C \setminus \{c\}$. Entonces A tiene n elementos. Sea $D = B \cup \{c\}$ como $c \notin B$, entonces D tiene $m+1$ elementos (esto tecnicamente habría que probarlo separadamente). Ahora observe que $C \cup B = A \cup D$. Como $A \cap D = \emptyset$ y A tiene n elementos, por la hipótesis inductiva $A \cup D$ tiene $n+m+1$ elementos. Complete los detalles.

9. Sean $A_1, A_2, \cdots, A_n$ conjuntos finitos y disjuntos dos a dos. Demuestre que

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n|.$$

   (*Sugerencia*: Use inducción en n y siga un razonamiento similar al usado en la demostración del teorema 6.57).

10. Muestre que si A es finito y $B \subseteq A$, entonces B es finito y además se cumple que $|B| \leq |A|$.

   Este es un ejemplo, de cómo una afirmación de naturaleza sencilla, requiere un argumento complicado para demostrarla rigurosamente.

   (*Sugerencia:* Sea n el número de elementos de A. Haga la prueba por inducción en n. Si n es cero, entonces A es vacío y por lo tanto $B = \emptyset$. Para el paso inductivo, sea A un conjunto con $n+1$ elementos y $f : \{1, 2, \cdots, n+1\} \to A$ una biyección. Considere dos casos: (a) $f(n+1) \notin B$ y (b) $f(n+1) \in B$. Para el caso (a), verifique que $A - \{f(n+1)\}$ tiene n elementos y que $B \subseteq A - \{f(n+1)\}$. Use la hipótesis inductiva para concluir que B es finito y que $|B| \leq n$. Para el caso (b), considere el conjunto $C = B - \{f(n+1)\}$. Verifique que $C \subseteq A - \{f(n+1)\}$ y por el caso (a) concluya que C es finito y además que $|C| \leq n$. Para finalizar, verifique que $B = C \cup \{f(n+1)\}$ y use el teorema 6.55 para concluir que $|B| = |C| + 1$.)

11. Demuestre el teorema 6.60.

    (*Sugerencia:* Observe que $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$. Use ahora el teorema 6.2 y exprese $|A \cup B \cup C|$ en términos de $|A \cup B|$, $|(A \cup B) \cap C|$ y $|C|$. Use de nuevo el teorema 6.2 para calcular $|A \cup B|$ y $|(A \cap C) \cup (B \cap C)|$).

12. *a*) Demuestre la fórmula dada en la observación 6.62.

    b) Halle una fórmula para calcular
    $$|A \cup B \cup C \cup D \cup E|.$$

13. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$. Determine

    $|A \cup B|$ $\quad |A \cap B|$ $\quad |A \triangle B|$ $\quad |\mathcal{P}(A)|$ $\quad |A \times B|$

    $|\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)|$ $\quad |\mathcal{P}(A \times B)|$ $\quad |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))|$ $\quad |\mathcal{P}(A \times \mathcal{P}(B))|$ $\quad |A \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(B))|$

14. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$ y $C = \{1, 3, 5\}$. Calcule $|A \times B \times C|$.

15. Sea $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y considere los siguientes conjuntos
    $$A = \{X \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3 \cdots, k+1\}) : \ k+1 \in X\}$$
    y
    $$B = \{X \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3 \cdots, k+1\}) : \ k+1 \notin X\}.$$
    Verifique las siguientes afirmaciones:

    a) B es igual a $\mathcal{P}(\{1, 2, 3 \cdots, k\})$

    b) $A \cap B = \emptyset$

    c) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3 \cdots, k+1\}) = A \cup B$.

16. Complete la demostración del teorema 6.66.

    (*Sugerencia:* Para ver que f es sobreyectiva, dado $X \in A$, es decir, $X \subseteq \{1, 2, 3 \cdots, k+1\}$ y además $k+1 \in X$. Considere $Y = X \setminus \{k+1\}$ y verifique que $Y \in B$. Muestre que $f(Y) = X$).

17. Sean A, B y C tres conjuntos finitos con $|A| = n$, $|B| = m$ y $|C| = p$. Muestre que $|A \times B \times C| = n \cdot m \cdot p$.

    (*Sugerencia:* Halle una biyección entre $A \times B \times C$ y $(A \times B) \times C$. Y use el teorema 4.26).

18. Complete la desmotración del teorema 6.67.

    (*Sugerencia:* Usando que f es inyectiva, muestre que si $B, B' \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$ con $B \neq B'$, entonces $g(B) \neq g(B')$. Para ver que g es sobreyectiva, considere un subconjunto C de A cualquiera. Verifique que el conjunto B definido por $\{a \in \{1, 2, \cdots, n\} : f(a) \in C\}$ satisface que $g(B) = C$ (para probarlo hará falta usar que f es sobreyectiva).

19. Muestre que la tabla de verdad de una fórmula que tiene n variables proposicionales tiene 2^n filas.

    (*Sugerencia:* Sea A el conjunto de variables que aparecen en la fórmula. Verifique que el número de filas de la tabla es igual al número de funciones de A en $\{V, F\}$).

ÍNDICE ALFABÉTICO

BIBLIOGRAFÍA

[1] K. Bogart. *Matemáticas discretas*. Editorial Limusa, México, 1996.

[2] V. Heeren y E. J. Hornsby C. Miller. *Matemática: Razonamiento y aplicaciones*. Addison Wesly Longman, 1999. Octava Edición.

[3] L. Carrol. *Symbolic logic*. Clarkson N. Potter, INC, New York, 1977.

[4] D. Durán. *Notas sobre lógica*. Sin publicar, Maracaibo, 2008.

[5] A. Muñoz G. *Lógica simbólica elemental*. Editorial Miro, Caracas, 1992.

[6] M. Gardner. *Máquinas lógicas y diagramas*. Editorial Grijalbo S. A., México, 1973.

[7] R. Johnsonbaugh. *Matemáticas discretas*. Grupo editorial Iberoamericano, México, 1988.

[8] S. Rada. *Aritmética*. Editorial CENAMEC, Caracas, 1992.

[9] M. Tahan. *El hombre que calculaba*. Caracas, Venezuela, 1978.

[10] C. Uzcátegui Aylwin. *Lógica, conjuntos y números*. Consejo de publicaciones de la Universidad de Los Andes. Mérida (Venezuela), 2011.

[11] D. Velleman. *How to prove it: a structured approach*. Cambridge University, 1994.

[12] I. Copy y C. Cohen. *Introducción a la lógica*. Limusa, México, 2001. Quinta edición.

[13] K. Ross y C. Wright. *Matemáticas discretas*. Prentice Hall Hispanoamericana, México, 1992. Segunda edición.

[14] P. García y J. Aguirre. *Lógica y Teoría de la Argumentación*. División de publicaciones UIS, Bucaramanga Colombia, 2008.

[15] P. Suppes y S. Hill. *Introducción a la lógica Matemática.* Editorial Reverté S. A., Colombia, 1988.