IX Simposio Nororiental de Matemáticas

Diciembre 2 - 4, 2012, Bucaramanga - SAN, Colombia

Y. Takeuchi, 1927 - 2014, In Memoriam

Sobre la separabilidad del anillo de grupoide torcido

Héctor Pinedo* Dirceu Bagio**

Resumen

Dada una acción parcial α de un grupoide $\mathcal{G}$ en un anillo unitario $\mathcal{A}$, establecemos condiciones necesarias y suficientes para que la extensión de anillos $\mathcal{A} \star_\alpha \mathcal{G} \supset \mathcal{A}$ sea separable.

Palabras & frases claves: Acción parcial de grupoide, anillo de grupoide torcido, extensión separable.

1. Introducción

La noción de acción parcial de grupoide que usamos en este trabajo es la presentada por D. Bagio y A. Paques en [2], la cual es una extensión natural del concepto de acción parcial de grupo dada por M. Dokuchaev y R. Exel en [3].

Sea $\mathcal{G}$ un grupoide, K un anillo conmutativo y $\mathcal{A}$ una K-álgebra con unidad. Una acción parcial de $\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{A}$ es un par

$$\alpha = (\{\mathcal{A}_g\}_{g\in\mathcal{G}}, \{\alpha_g\}_{g\in\mathcal{G}}),$$

donde para $g \in \mathcal{G}$, $\mathcal{A}_g$ es ideal de $\mathcal{A}_{r(g)}$, $\mathcal{A}_{r(g)}$, es un ideal de $\mathcal{A}$ y $\alpha_g : \mathcal{A}_{g^{-1}} \to \mathcal{A}_g$ es un K-isomorfismo satisfaciendo las siguientes condiciones:

(i) $\alpha_e = id_{\mathcal{A}_e}$ es la aplicación identidad de $\mathcal{A}_e$, donde e es una unidad en $\mathcal{G}$,

*Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga - Colombia, e-mail: hpinedot@uis.edu.co

**Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria - Brasil, e-mail: bagio@smail.ufsm.br

(ii) $\alpha_h^{-1}(\mathcal{A}_{g^{-1}} \cap \mathcal{A}_h) \subseteq \mathcal{A}_{(gh)^{-1}}$,

(iii) $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x)$, para todo $x \in \alpha_h^{-1}(\mathcal{A}_{g^{-1}} \cap \mathcal{A}_h)$, y todos $g, h \in \mathcal{G}$, tal que gh exista.

Dada una tal acción α de $\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{A}$ y de acuerdo a [1], el anillo de grupoide torcido $\mathcal{A} \star_\alpha \mathcal{G}$ asociado a α está dado por la suma directa

$$\mathcal{A} \star_\alpha \mathcal{G} = \bigoplus_{g \in \mathcal{G}} \mathcal{A}_g \delta_g,$$

donde los δ_g's son símbolos, con la suma usual y la multiplicación definida por la regla

$$(a_g\delta_g)(b_h\delta_h) = \begin{cases} \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh}, & \text{si } (g,h) \in \mathcal{G}^2 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases},$$

para todos $g, h \in \mathcal{G}$, $a_g \in \mathcal{A}_g$ y $b_h \in \mathcal{A}_h$. Puede ser probado que esta multiplicación está bien definida, que $\mathcal{A} \star_\alpha \mathcal{G}$ es un anillo asociativo, pero que en general no tiene unidad, [1].

Por otro lado, una extensión de anillos $S \supset R$ es llamada *separable*, si S es un sumando directo de $S \bigotimes_R S$ como S-bimódulo, ver [4].

Si $\mathcal{G}$ es un grupoide finito, caracterizamos cuando la extensión $\mathcal{A} \supset \mathcal{A} \star_\alpha \mathcal{G}$ es separable. Más aún, mostramos que la condición de $\mathcal{G}$ ser grupoide finito, no puede ser removida.

Referencias

[1] D. Bagio, D. Flôres and A. Paques, *Partial actions of ordered groupoids on rings.* J. Algebra Appl. **9** (2010):501-517.

[2] D. Bagio and A. Paques, *Partial groupoid actions: globalization, Morita theory and Galois theory.* Commun. Algebra **40** (2012):3658-3678.

[3] M. Dokuchaev and R. Exel, *Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations.* Trans. AMS **357** (2005):1931-1952.

[3] M. Dokuchaev, M. Ferrero and A. Paques, *Partial actions and Galois theory.* J. Pure Appl. Algebra **208** (2007):77-87.

[4] K. Hirata and K. Sugano, *On semisimple extensions and separable extensions over noncommutative rings* J. Math. Soc. Japan **18** (1966):360-373.