REPRESENTACION NO-ESTANDAR DEL TEOREMA DE RIESZ

YU TAKEUCHI Y LILIANA BLANCO

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D.E., Colombia

§1. INTRODUCCION.

Sean $\mathcal{D}^0$ el espacio de funciones reales continuas con soporte compacto en $\mathbb{R}$, $T : \mathcal{D}^0 \mapsto \mathbb{R}$ un funcional lineal positivo. El teorema de representación de Riesz nos garantiza que existe un medida μ, $\sigma-$finita de Borel en $\mathbb{R}$, tal que el valor de T correspondiente a $f \in \mathcal{D}^0$ está dado por la integral de f con respecto a μ:

$$\langle T, f\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)d\mu(t) \quad (\text{para toda } f \in \mathcal{D}^0). \tag{1}$$

El uso de funciones no-estándar nos ofrece una nueva interpretación para el funcional lineal positivo T, así: existe una función no-estándar $h : \mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}^*$ tal que

$$\langle T, f\rangle = Est. \int f^*(\tau) \cdot h(\tau)d\tau \quad (\text{para todo} f \in \mathcal{D}^0) \tag{2}$$

donde $f^*(\tau)$ es la extensión natural de f.(#) Por consiguiente, se puede establecer una correspondencia entre una medida μ, y una función no-estándar h mediante la ecuación:

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)d\mu(t) = Est. \int f^*(\tau) \cdot h(\tau)d\tau \tag{3}$$

para todo $f \in \mathcal{D}^0$. Esto es, podemos decir que, en cuanto a la integración se refiere, el concepto de la medida puede ser eliminado reemplazándolo por el uso de funciones no-estándar.

Más generalmente, dado $T : \mathcal{D}^0 \mapsto \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo, existe una función no-estándar $h : \mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}^*$ con la cual se calcula el valor de T correspondiente a $f \in \mathcal{D}^0$ por medio de la integral dada en (2). Descomponiendo la función

(#)Si no se especifican los extremos de la integración, se entiende siempre que la integral se efectua en un intervalo que contiene al soporte de la función integrando.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

h en sus partes positiva y negativa, $h = h^{+} - h^{-}$, se obtiene inmediatamente (y evitando una fastidiosa demostración usual) la conocida fórmula del análisis funcional: "dado un funcional lineal continuo T existen dos funcionales lineales positivos T^{+} y T^{-} tales que $T = T^{+} - T^{-}$". También, si μ es una carga σ – finita de Borel en $\mathbb{R}$ entonces existe $h : \mathbb{R}^{*} \mapsto \mathbb{R}^{*}$ que satisface la misma igualdad (3), por lo cual, en cuanto se refiere a la integración, el concepto de carga podrá ser eliminado reemplazándolo por el de función no-estándar. Es conveniente aclarar que la correspondencia entre la carga μ y la función no-estándar $h(\tau)$ no es uno a uno: a dos funciones h_1 y h_2 puede corresponderles la misma carga. Sin embargo tenemos la siguente relación : " A dos funciones no-estándar h_1 y h_2 le corresponde la misma carga si y solamente si $(D^{-2}h_1)(\tau) \approx (D^{-2}h_2)(\tau)$ para todo τ finito, o sea que la segunda antiderivada de la función no-estándar es la que determina la carga μ".

§2. NOTACIONES.

Sea $\mathcal{F}^{*}$ un ultrafiltro regular en $\mathbb{N}$ con el cual se construye el cuerpo de números no-estándar $\mathbb{R}^{*}$ como la ultrapotencia de $\mathbb{R}$: $\mathbb{R}^{*} = \prod \mathbb{R}/\mathcal{F}^{*}$. Se denotará por $[(a_n)_n]$ el número no-estándar representado por la sucesión real $(a_n)_n$.

Sea f una función no-estándar. Si existe una sucesión de funciones reales $(f_n)_n$ tal que para todo $\tau = [(x_n)_n] \in \mathbb{R}^{*}$ se tiene que $f(\tau) = f([(x_n)_n]) = [(f_n(x_n))_n]$ decimos que f es la generada por $(f_n)_n$, y se denota por $f = gen(f_n)$. A través del presente trabajo utilizaremos solamente este tipo de funciones no-estándar, así que se habla simplemente de "función no-estándar" omitiendo la frase "generada por una sucesión de funciones reales".

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{*}$, si $\alpha - \beta$ es un número infinitesimal, decimos que α es infinitamente próximo a β, y se denota por $\alpha \approx \beta$.

$\mathcal{D}^0$ es el espacio de funciones reales continuas con soporte compacto, y $\mathcal{D}^m$ es el subespacio de $\mathcal{D}^0$ formado por todas las funciones derivables hasta el orden m. Dado $K(\subset \mathbb{R})$ compacto,$\mathcal{D}^0(K)$ es el subespacio de $\mathcal{D}^0$ formado por todas las funciones cuyo soporte está contenido en K. Es bien conocido que $D^0(K)$ es un espacio de Banach con la norma $\|f\|_k = Sup_{t\in K}|f(t)|$. $\square$

§3. REPRESENTACIÓN NO-ESTÁNDAR DE FUNCIONALES LINEALES POSITIVOS.

Sean $T : \mathcal{D}^0 \mapsto \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo, $g \in \mathcal{D}^0$, y f continua en $[a,b]$, entonces se conoce la siguiente identidad: (ver [2])

$$\int_a^b \langle T_y, g(y-t)\rangle \cdot f(t)dt = \left\langle T_y, \int_a^b g(y-t)\cdot f(t)dt \right\rangle. \qquad (4)$$

Nótese que la igualdad (4) también es válida para $f \in L_1(a,b)$ puesto que el espacio de funciones continuas es un subespacio denso en $L_1(a,b)$.

Consideremos $\rho_n \in \mathcal{D}^0(n = 1,2,3,\ldots)$ tal que

(i) $\rho_n(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$;

(ii) $\rho_n(-t) = \rho_n(t)$;

(iii) $\rho_n(t) = 0$ si $t \notin \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$;

(iv) $\int \rho_n(t)dt = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \rho_n(t)dt = 1.$

Dada $f \in \mathcal{D}^0$, sea $[a,b]$ un intervalo que contiene al soporte de f, entonces por (4) se tiene:

$$\int_a^b \langle T_y, \rho_n(y-t)\rangle \cdot f(t)dt = \left\langle T_y, \int_a^b \rho_n(y-t)\cdot f(t)dt \right\rangle \tag{5}$$

En (5), tomando límite cuando $n \to \infty$, tenemos:

$$lim_{n\to\infty} \int_a^b \langle T_y, \rho_n(y-t)\rangle \cdot f(t)dt = \langle T, f\rangle \tag{6}$$

puesto que $\int_a^b \rho_n(y-t)\cdot f(t)dt \longrightarrow f(y)$ en $\mathcal{D}^0(n \to \infty)$.

Sea

$$h(\tau) = gen(h_n) \text{ con } h_n(t) = \langle T_y, \rho_n(y-t)\rangle, \tag{7}$$

entonces (6) puede expresarse como:

$$\langle T, f\rangle = Est. \int f^*(\tau)\cdot h(\tau)d\tau \tag{8}$$

donde $f^*(\tau)$ es la extensión natural de $f \in \mathcal{D}^0$.

Teorema 1. *Sea* $T : \mathcal{D}^0 \longrightarrow \mathbb{R}$ *un funcional lineal positivo, entonces existe una función no-estándar* $h : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ *tal que:*

(i) $h(\tau) \geq 0$ *para todo* $\tau(\in \mathbb{R}^*)$;

(ii) una antiderivada de $h, (D^{-1}h)(\tau)$ *, es de valor finito para todo* τ *finito;*

(iii) el valor del funcional T *correspondiente a* $f \in \mathcal{D}^0$ *está dado por (8).*

Demostración. Teniendo en cuenta que un funcional lineal positivo es **continuo**, la igualdad (8) es válida para $h(\tau)$ dada por (7). Se ve que $h_n(t) \geq 0$ para todo n, para todo $t \in \mathbb{R}$, puesto que Tes un funcional positivo, y $\rho_n \geq 0$. Por lo tanto, se cumple la condición (i). □

Dado un intervalo real $[a, b]$, consideremos la función $g(t)$:

$$g(t) = \begin{cases} t - a + 1 & \text{en } [a-1, a] \\ 1 & \text{en } [a, b] \\ -t + b + 1 & \text{en } [b, b+1] \\ 0 & \text{en otra parte .} \end{cases}$$

Si $K = [a-1, b+1]$, entonces $g \in \mathcal{D}^0(K), g(t) \geq 0$ y $\|g\|_K = Sup_{t\in K}|g(t)| = 1$. Si se denota por $\|T\|_K$ la norma del funcional T restringido al subespacio $\mathcal{D}^0(K)$, entonces:

$$\langle T, g\rangle = |\langle T, g\rangle| \leq \|T\|_K \cdot \|g\|_K = \|T\|_K.$$

De (8):

$$Est. \int g^*(\tau) \cdot h(\tau) d\tau = Est. \int_{a-1}^{b+1} g^*(\tau) \cdot h(\tau) d\tau \leq \|T\|_K.$$

Como $h(\tau) \geq 0, g^*(\tau) \geq 0$ para todo τ, se tiene que :

$$Est. \int_a^b h(\tau) d\tau \leq Est. \int_{a-1}^{b+1} g^*(\tau) \cdot h(\tau) d\tau \leq \|T\|_K. \tag{9}$$

Sea $(D^{-1}h)(\tau)$ una antiderivada de h definida por:

$$(D^{-1}h)(\tau) = \int_0^\tau h(\sigma) d\sigma.$$

Para τ finito, existe un intervalo $[a, b]$ que contiene al intervalo $[0, \tau]$ (ó, $[\tau, 0]$ en caso de $\tau < 0$), por lo tanto:

$$\left| \int_0^\tau h(\sigma) d\sigma \right| \leq \int_a^b h(\sigma) d\sigma.$$

Por (9), $\int_a^b h(\sigma) d\sigma$ es de valor finito, luego $(D^{-1}h)(\tau) = \int_0^\tau h(\sigma) d\sigma$ es de valor finito para todo τ finito. □

Nótese que $(D^{-1}h)(\tau)$ es de valor finito para todo τ finito si, y sólo si $\int_a^b h(\tau) d\tau$ es de valor finito para todo intervalo real $[a, b]$. □

Teorema 2. *Sea $h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ una función no-estándar que satisface las condiciones (i) y (ii) del teorema 1, entonces $h(\tau)$ determina un funcional lineal positivo $T : \mathcal{D}^0 \rightarrow \mathbb{R}$ por medio de la igualdad (8).*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{D}^0$. Si el soporte de f está contenido en el intervalo real $[a, b]$ entonces:

$$\left| \int f^*(\tau) \cdot h(\tau) d\tau \right| \leq \int_a^b |f^*(\tau)| \cdot h(\tau) d\tau \leq M. \int_a^b h(\tau) d\tau$$

Donde $M = \max_{t\in\mathbb{R}}$ de $|f(t)|$. Por consiguiente, $\int f^*(\tau)\cdot h(\tau)d\tau$ es de **valor finito**, luego podemos definir un funcional $T : \mathcal{D}^0 \to \mathbb{R}$ por medio de la igualdad (8). Evidentemente T es un lineal y positivo. □

Según el Teorema de Representación de Riesz, a cada funcional lineal positivo T le corresponde una medida $\sigma-$ finita de Borel en $\mathbb{R}$, μ, tal que

$$\langle T, f\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)d\mu(t) \quad (\text{para toda } f \in \mathcal{D}^0)$$

y viceversa. Por lo tanto, de los teoremas 1 y 2 se obtiene el siguiente corolario que relaciona la función no-estándar $h(\tau)$ con la medida μ:

Corolario. *Sea $h(\tau) : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ una función no-estándar que satisface las condiciones (i) y (ii) del teorema 1, entonces existe una medida $\sigma -$ finita de Borel en $\mathbb{R}$, μ, tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)d\mu(t) = Est. \int f^*(\tau)\cdot h(\tau)d\tau \quad (\text{ para toda } f \in \mathcal{D}^0), \qquad (10)$$

y viceversa.

Nótese que la correspondencia entre la función $h(\tau)$ y la medida μ no es uno a uno. Por ejemplo, si

$$h(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} & \text{si } \tau \in (0,\epsilon) \\ 0 & \text{en otra parte } (\epsilon = \text{un infinitesimal positivo }). \end{cases}$$

entonces se ve que el funcional T determinado por $h(\tau)$ es nulo; por consiguiente la medida μ asociada a $h(\tau)$ es también nula, a pesar de que $h(\tau)$ no es la función nula (ni siquiera, es de valor finito.). El siguente teorema esclarece qué tipo de funciones no-estándar determinan al funcional nulo (por consiguiente, a la medida nula.).

Teorema 3. *Sea $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ una función no-estándar que satisface las condiciones (i) y (ii) del teorema 1. El funcional T determinado por h (por medio de la igualdad (8)) es nulo si y sólo si*

$$(D^{-1}h)(\tau) \approx 0 \quad \text{para todo } \tau \text{ finito.} \qquad (11)$$

Demostración. Supongamos (11). Sea $f \in \mathcal{D}^1$; si el soporte de f está contenido en el intervalo $[a,b]$ entonces:

$$\begin{aligned}\int_a^b f^*(\tau)\cdot h(\tau)d\tau &= f^*(\tau)\cdot(D^{-1}h)(\tau)\Big|_a^b - \int_a^b (D^{-1}h)(\tau)\cdot f^{*'}(\tau)d\tau \\ &= -\int_a^b (D^{-1}h)(\tau)\cdot f^{*'}(\tau)d\tau \approx 0\end{aligned}$$

puesto que $(D^{-1}h)(\tau)\cdot f^{*'}(\tau)$ es de valor infinitesimal. Por lo tanto:

$$\langle T, f\rangle = 0 \quad \text{para toda } f \in \mathcal{D}^1.$$

Como D^1 es denso en D^0, se tiene que $T = 0$ (el funcional nulo). □

Ahora, supongamos que $T = 0$ (el funcional nulo). De (9) se tiene que

$$0 \leq Est \int_a^b h(\tau)d\tau \leq \|T\|_K = 0$$

para todo intervalo real $[a,b]$, lo cual es equivalente a:

$$(D^{-1}h)(\tau) = \int_0^\tau h(\sigma)d\sigma \approx 0 \quad \text{para todo } \tau \text{ finito.} \quad \square$$

§4. Representación no-estándar del funcional lineal continuo

Teorema 4. *Sea $T : \mathcal{D}^0 \to \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo, entonces existe una función no-estándar $h(\tau) : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ tal que*

(i) $\int_a^b |h(\tau)|d\tau$ es de valor finito para todo intervalo real $[a,b]$; *(12)*

(ii) $\langle T, f\rangle = Est.\int f^*(\tau)\cdot h(\tau)d\tau$ para toda $f \in \mathcal{D}^0$. *(13)*

Recíprocamente, una función no-estándar $h(\tau)$ que satisface la condición (i) determina un funcional lineal continuo T por medio de la igualdad (13).

Demostración. Sea $h(\tau)$ la función no-estándar dada por (7):

$$h(\tau) = gen(h_n), \quad h_n(t) = \langle T_y, \rho_n(y-t)\rangle \quad (n = 1,2,3,\ldots).$$

Sean $h_n^+(t), h_n^-(t)$ la parte positiva y negativa de la función $h_n(t)$ respectivamente, y

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } h_n(t) \geq 0 \\ 0 \text{ si } h_n(t) < 0 \end{cases}, \quad \psi_n(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } h_n(t) < 0 \\ 0 \text{ si } h_n(t) \geq 0, \end{cases}$$

entonces:

$$h_n^+(t) = h_n(t) \cdot \varphi_n(t), \quad h_n^-(t) = -h_n(t) \cdot \psi_n(t).$$

Dado un intervalo real $[a, b]$, como $\varphi_n \in L_1(a, b)$, entonces aplicando la identidad (4) se tiene:

$$\int_a^b h_n^+(t)dt = \int_a^b \langle T_y, \rho_n(y-t)\rangle \cdot \varphi_n(t)dt = \left\langle T_y, \int_a^b \rho_n(y-t) \cdot \varphi_n(t)dt \right\rangle. \quad (15)$$

Sea $K = [a-1, b+1]$ entonces se ve inmediatamente que:

$$\int_a^b \rho_n(y-t) \cdot \varphi_n(t) \in \mathcal{D}^0(K),$$

$$\left\| \int_a^b \rho_n(y-t) \cdot \varphi_n(t)dt \right\|_K = Sup_{y \in K} \left| \int_a^b \rho_n(y-t) \cdot \varphi_n(t)dt \right| = 1. \quad (16)$$

Si $||T||_K$ es la norma del funcional T restringido al supespacio $D^0(K)$, entonces, de (15) y (16) se obtiene:

$$\left| \int_a^b h_n^+(t)dt \right| \leq ||T||_K \cdot \left\| \int_a^b \rho_n(y-t) \cdot \varphi_n(t)dt \right\|_K = ||T||_K. \quad (17)$$

Sea

$$h^+(\tau) = gen(h_n^+);$$

entonces es evidente que $h^+(\tau)(\geq 0)$ es la parte positiva de la función no estándar $h(\tau)$, y de la desigualdad (17) se tiene:

$$\int_a^b h^+(\tau)d\tau \leq ||T||_K, \quad (18)$$

esto es, una antiderivada de $h^+(\tau), (D^{-1}h^+)(\tau)$, es de valor finito para todo τ finito. Así, por el teorema 2, $h^+(\tau)$ determina un funcional lineal positivo, digamos T^+. De la misma manera, si

$$h^-(\tau) = gen(h_n^-),$$

entonces $h^-(\tau)$ satisface las condiciones (i) y (ii) del teorema 1, por consiguiente $h^-(\tau)$ determina un funcional lineal positivo, digamos T^-. Como $h = h^+ - h^-$, se obtiene la descomposición de Jordan:

$$T = T^+ - T^-.$$

Como $|h(\tau)| = h^+(\tau) + h^-(\tau)$, entonces de (18) (y de la desigualdad similar para $h^-(\tau)$) se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\int_a^b |h(\tau)|d\tau \leq 2\|T\|_K,$$

o sea que $h(\tau)$ satisface la condición (12). □

Recíprocamente, si una función no-estándar $h(\tau)$ satisface la condición (12) entonces ésta garantiza que la integral $\int f^*(\tau) \cdot h(\tau)d\tau$ es de valor finito para toda $f \in \mathcal{D}^0$, por lo tanto $h(\tau)$ determina un funcional $T : \mathcal{D}^0 \longrightarrow \mathbb{R}$ por medio de la ecuación (13). Es claro que T es lineal. Sean h^+, h^- las partes positiva y negativa de la función h respectivamente; entonces evidentemente las dos funciones h^+, h^- satisfacen las condiciones (i) y (ii) del teorema 1, por lo tanto éstas determinan funcionales lineales positivos, digamos T^+, T^- respectivamente. Como $T = T^+ - T^-$ y T^+, T^- son continuos por ser positivos, entonces T es continuo. □

Por el Teorema de Representación de Riesz que establece una correspondencia entre un funcional lineal continuo y una carga σ – finita de Borel en $\mathbb{R}$, podemos interpretar el teorema 4 como sigue:

Corolario. *Sea $h(\tau) : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ una función no-estándar que satisface la condición (12), entonces existe una carga σ–finita de Borel en $\mathbb{R}, \mu$, tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)d\mu(t) = Est. \int f^*(\tau) \cdot h(\tau)d\tau \quad \text{para toda } f \in \mathcal{D}^0, \tag{19}$$

y viceversa.

Nótese que la correspondencia entre la función $h(\tau)$ y la carga μ no es única. El siguiente teorema determina la clase de funciones no-estándar correspondientes al funcional nulo (por consiguiente, a la carga nula).

Teorema 5. *Sea $h(\tau) : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ una función no-estándar que satisface la condición (12), entonces el funcional T determinado por $h(\tau)$ es nulo si y sólo si una antiderivada de segundo orden de $h(\tau), (D^{-2}h)(\tau)$,es de valor infinitesimal para todo τ finito.*

Demostración. (i) Supongamos que $K''(\tau) = h(\tau)$, y que $K(\tau) \approx 0$ para todo τ finito. Dada $f \in \mathcal{D}^2$, aplicando dos veces la integración por partes se tiene:

$$\begin{aligned}\int f^*(\tau) \cdot h(\tau)d\tau &= \int f^*(\tau) \cdot K''(\tau)d\tau \\ &= \int f^{*''}(\tau) \cdot K(\tau)d\tau \approx 0,\end{aligned}$$

puesto que $f^{*''}(\tau)\cdot K(\tau)\approx 0$ para todo τ finito. Por lo tanto:

$$\langle T,f\rangle = Est.\int f^*(\tau)\cdot h(\tau) = 0 \qquad \text{para toda } f\in\mathcal{D}^2.$$

Como D^2 es denso en D^0 entonces se tiene que $T=0$ (funcional nulo). □

(ii) Supongamos que el funcional T determinado por $h(\tau)$ es nulo. Sea $\rho(t)\in\mathcal{D}^0$ una función real tal que

$$\int \rho(t)dt = 1.$$

Sean

$$H_0(\tau) = \int_0^\tau h(\sigma)d\sigma,$$

y

$$H(\tau) = H_0(\tau) - \lambda \qquad \text{con } \lambda = \int H_0(\tau)\cdot\rho^*(\tau)d\tau.$$

Tenemos:

$$\int H(\tau)\cdot\rho^*(\tau)d\tau = \int H_0(\tau)\cdot\rho^*(\tau)d\tau - \lambda\cdot\int\rho^*(\tau)d\tau = 0. \tag{20}$$

Nótese que $H_0(\tau)$, $H(\tau)$ son **de valor finito** para todo τ finito, ya que $h(\tau)$ satisface la condición (12). Se define $K(\tau)$ como sigue:

$$K(\tau) = \int_0^\tau h(\sigma)d\sigma,$$

entonces $K(\tau)$ es una antiderivada de segundo orden de la función $h(\tau)$, o sea, $K''(\tau)=h(\tau)$. Vamos a demostrar que $K(\tau)\approx 0$ para todo τ finito. Para mayor sencillez supongamos que $\tau>0$, τ finito;

sea $x = Est.\tau$, entonces

$$\int_x^\tau H(\sigma)d\sigma \approx 0$$

puesto que $H(\sigma)$ es de valor finito y $[x,\tau]$ es un intervalo de longitud infinitesimal. Por lo tanto, se tiene:

$$K(\tau) = K(x) + \int_x^\tau H(\sigma)d\sigma \approx K(x). \tag{21}$$

Sea $\psi(t)$ la función característica del intervalo real $[0,x]$; se define $g(t)$ como sigue:

$$g(t) = \int_{-\infty}^t \psi(s)ds - x\cdot\int_{-\infty}^t \rho(s)ds. \tag{22}$$

Evidentemente g es continua; además, $g(t) = 0$ para $|t|$ suficientemente grande, por lo tanto $g(t) \in \mathcal{D}^0$.

Como el funcional T determinado por $h(\tau)$ es nulo, entonces:

$$\langle T, g\rangle = Est. \int g^*(\tau) \cdot h(\tau) d\tau = 0.$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 \approx \int g^*(\tau) \cdot h(\tau) d\tau &= \int K''(\tau) \cdot g^*(\tau) d\tau \\ &= -\int K'(\tau) \cdot g^{*'}(\tau) d\tau \quad \text{(integración por partes)} \\ &= -\int H(\tau) \cdot \{\psi^*(\tau) - x \cdot \rho^*(\tau)\}\, d\tau \quad \text{(por (22))} \\ &= -\int H(\tau) \cdot \psi^*(\tau) d\tau \quad \text{(por (20))} \\ &= -\int_0^x H(\tau) d\tau = -K(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, de (21) se tiene que $K(\tau) \approx 0$. □

En el teorema 5 hemos supuesto que la función no-estándar $h(\tau)$ satisface la condición (12) del teorema 4. Surge la pregunta: ¿es válido el teorema 5 sin suponer la condición (12)? La respuesta es no, veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1. Sea

$$h(\tau) = (\lambda)^{3/2} \cdot \text{sen } \lambda\tau, \text{ con } \lambda = [(n)_n].$$

Entonces $h = gen(h_n)$ donde

$$h_n(t) = n^{3/2} \cdot \text{sen } nt \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Se tiene:

$$\int_0^\pi |h(\tau)| d\tau = \left[\left(\int_0^\pi n^{3/2} \cdot |\text{sen } nt| dt\right)_n\right] = 2 \cdot (\lambda)^{3/2},$$

o sea que la función no-estándar $h(\tau)$ no satisface la condición (12). Obsérvese que

$$K(\tau) = \frac{-1}{\sqrt{\lambda}} \text{sen } \lambda\tau$$

es una antiderivada de segundo orden de $h(\tau)$, y $K(\tau) \approx 0$ para todo τ. Por lo tanto, si $h(\tau)$ determinara un funcional lineal continuo T por medio de la igualdad

(13), entonces T sería el funcional nulo según la primera parte de la demostración del teorema 5. Sin embargo, consideremos la función $f(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \cdot \text{sen } nt & \text{en } [0,\pi] \\ 0 & \text{en otra parte.} \end{cases}$$

Entonces $f(t) \in \mathcal{D}^0$, ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge. Pero:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(t) \cdot h_n(t)dt &= \int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \cdot \text{sen } kt \cdot n^{3/2} \cdot \text{sen } ntdt \\ &= \pi, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Entonces se obtiene:

$$\int f^*(\tau) \cdot h(\tau)d\tau = \pi,$$

o sea que el funcional T no sería nulo (**absurdo!**). Esto es, la función no-estándar $h(\tau)$ no determina el funcional lineal nulo, a pesar de que $(D^{-2}h)(\tau) \approx 0$ para todo τ finito. □

Ahora, surge naturalmente otra pregunta:¿es **necesaria la condición (12)** para que $h(\tau)$ determine un funcional lineal continuo? La respuesta es **no**, veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2. Sea $\nu = [(c_n)_n]$ un número infinito positivo, **no representable por sucesión divergente** a $+\infty$. Consideremos la función no-estándar $h(\tau)$ definida por :

$$h(\tau) = gen(h_n), \quad h_n(x) = \begin{cases} c_n \cdot \text{sen } nt \text{ en } [0,\pi] \\ 0 \quad \text{en otra parte.} \end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} |h(\tau)|d\tau &= \left[\left(\int_0^{\pi} |h_n(t)|dt\right)_n\right] \\ &= [(2c_n)_n] \\ &= 2\nu, \end{aligned}$$

o sea que $h(\tau)$ **no satisface** la condición (12) del teorema 4.

Sea $f \in \mathcal{D}^0$; entonces f es continua en $[0,\pi]$, luego podemos desarrollar f en serie de Fourier (**convergencia en el espacio** $L_2(0,\pi)$):

$$f(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{en } L_2}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \text{sen } nt,$$

donde $A_n \to 0$ ya que $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2$ converge. Como $h_n(t) \in L_2(0,\pi)$ para cada n, se tiene que:

$$\int_0^{\pi} f(t) \cdot h_n(t)dt = c_n \cdot \int_0^{\pi} f(t) \cdot \text{sen } (nt)dt = \frac{1}{2}\pi A_n c_n,$$

esto es,

$$\int f^*(\tau) \cdot h(\tau)d\tau = \frac{1}{2}\pi[(A_n c_n)_n]. \tag{23}$$

Supongamos que $[(A_n c_n)_n]$ no es infinitesimal; entonces existe $r > 0$ **real** tal que

$$A = \{n \in \mathbb{N} \big| |A_n c_n| > r\} \in \mathcal{F}^*,$$

o sea,

$$\text{si } n \in A \text{ entonces } |c_n| > \frac{r}{A_n} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} +\infty.$$

Esto contradice la hipótesis de que $\nu = [(c_n)_n]$ es un número infinito no representable por sucesión divergente a $+\infty$ (**absurdo!**). Por lo tanto se tiene que $[(A_n c_n)_n]$ es un infinitesimal. De (23) se obtiene:

$$\int f^*(\tau) \cdot h(\tau)d\tau \approx 0 \quad \text{para toda } f \in \mathcal{D}^0,$$

o sea que la función no-estándar $h(\tau)$ **determina el funcional nulo** (por medio de la igualdad (13)) a pesar de que la condición (12) del teorema 4 no se cumple. □

§5. Clase de funciones no-estándar correspondiente a un funcional

Sea $\mathcal{A}$ la colección de todas las funciones no-estándar, $h(\tau)$, tales que

$$\int_a^b |h(\tau)|d\tau \text{ es de valor finito para todo intervalo real } [a,b].$$

Si $h_1, h_2 \in \mathcal{A}$ determinan un **mismo funcional** T, entonces $h_1 - h_2$ determina el funcional nulo. Además:

$$\int_a^b |h_1(\tau) - h_2(\tau)|d\tau \leq \int_a^b |h_1(\tau)|d\tau + \int_a^b |h_2(\tau)|d\tau$$

para cualquier intervalo real $[a, b]$; o sea que $h_1 - h_2$ satisface la condición (12) del teorema 4. Por el teorema 5 se tiene que:

$$D^{-2}(h_1 - h_2)(\tau) = (D^{-2}h_1)(\tau) - (D^{-2}h_2)(\tau) \approx 0,$$

o sea:

$$(D^{-2}h_1)(\tau) \approx (D^{-2}h_2)(\tau) \quad \text{para todo } \tau \text{ finito.} \tag{24}$$

Recíprocamente, si h_1, $h_2 \in \mathcal{A}$ satisfacen la condición (24) entonces h_1, h_2 determinan un mismo funcional. Esto es, si se establece una relación $\sim$ en $\mathcal{A}$ por:

$$h_1 \sim h_2 \text{ si } (D^{-2}h_1)(\tau) \approx (D^{-2}h_2)(\tau) \text{ para todo } \tau \text{ finito,}$$

entonces es fácil demostrar que ésta es una relación de equivalencia, y a cada clase de equivalencia le corresponde uno y sólo un funcional lineal continuo, y viceversa.

Ejemplo 3. Sea

$$\begin{aligned} T : \mathcal{D}^0 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \langle T, f\rangle = f(0). \end{aligned}$$

Evidentemente, un modelo no-estándar de la distribución delta, por ejemplo:

$$\delta(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \text{ en } (0, \varepsilon) \\ 0 \text{ en otra parte } (\varepsilon = \text{ un infinitesimal positivo}) \end{cases}$$

determina el funcional T dado. Entonces, la clase de funciones no-estándar correspondiente al funcional T está formada por todas las funciones $h(\tau)$, tales que $(D^{-2}h)(\tau)$ es **infinitamente próximo** a $(D^{-2}\delta)(\tau)$ para todo τ finito. Más precisamente, podemos ver,

por un cálculo directo, que $h(\tau)$ pertenece a esta clase si:

$$(D^{-2}h)(\tau) \approx \begin{cases} 0 \text{ si } \tau < 0, \text{ o, } \tau \approx 0 \\ \tau \text{ si } \tau > 0, \tau \not\approx 0. \quad \square \end{cases}$$

Teorema 6. *Si $h(\tau) : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ es de valor finito para todo τ finito, entonces la clase de equivalencia representada por $h(\tau)$ contiene* **una función real** *$g(t)$. (Más precisamente, contiene la extensión natural $g^*(\tau)$ de una función real $g(t)$.) Esto es, el funcional T asociado a esta clase está determinado por* **una integral real**:

$$\langle T, f\rangle = \int f(t) \cdot g(t) dt \qquad (\text{para toda } f \in \mathcal{D}^0). \tag{25}$$

Demostración. Si $h(\tau)$ es de valor finito para todo τ finito, entonces $h(\tau)$ es **finitamente acotada** en cualquier intervalo finito, por lo tanto $h(\tau)$ safisface la condición (12) del teorema 4. Sea

$$H(\tau) = \int_0^\tau h(\sigma) d\sigma$$

entonces $H(\tau)$ es **continua**,(#) y de valor finito para todo τ finito. Sea $\widetilde{H}(t) = Est.H(t)$, entonces

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{H} : \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \widetilde{H}(t) \end{array}$$

es una **función continua** para todo t **real**. Aún más, $\widetilde{H}(t)$ es **absolutamente continua** puesto que ésta satisface la condición de Lipshitz, luego $\widetilde{H}(t)$ es derivable en casi toda parte. Sea

$$g(t) = \widetilde{H}'(t) \qquad (\text{para casi todo } t \in \mathbb{R}).$$

Por otra parte, si $\widetilde{H}^*(\tau)$ es la expresión natural de $\widetilde{H}(t)$, entonces se tiene:

$$\widetilde{H}^*(\tau) \approx H(\tau) \qquad \text{para todo } \tau \text{ finito},$$

luego:

$$(D^{-2}\widetilde{H}^*)(\tau) \approx (D^{-1}H)(\tau) \quad \text{para todo } \tau \text{ finito}.$$

Como:

$$(D^{-1}\widetilde{H}^*)''(\tau) = \widetilde{H}^{*'}(\tau) = g^*(\tau),$$

$$(D^{-1}H)''(\tau) = H'(\tau) = h(\tau),$$

se tiene que $g^*(\tau)$ y $h(\tau)$ pertenecen a la misma clase de equivalencia. □

(#)$H(\tau) \approx H(\tau')$ si $\tau \approx \tau'$. En algunos textos, esta continuidad se denomina "**micro-continuidad**".

Nota: En la demostración del teorema anterior, $Est.h(t)$ no siempre pertenece a la clase representada por $h(\tau)$, razón por la cual tuvimos que utilizar $Est.H(t)$.

Ejemplo 4. Es bien conocido que

$$[(\text{sen } nt)_n] \approx 0 \quad \text{para todo } t \textbf{ real}$$

en algún cuerpo $\mathbb{R}^* = \prod \mathbb{R}/\mathcal{F}^*$ construído por el ultrafiltro especial. Sea

$$h(\tau) = \begin{cases} |\text{sen } \lambda\tau| \text{ en } [0, \pi] \\ 0 \text{ en otra parte} \end{cases}$$

donde $\lambda = [(n)_n]$, entonces $h(\tau) \geq 0$ es **acotada** para todo τ. Además:

$$h(t) \approx 0 \quad \text{para todo } t \textbf{ real},$$

luego:

$$Est.h(t) = 0 \quad \text{para todo } t \text{ real}.$$

Pero:

$$\int_0^\pi h(\tau)d\tau = 2,$$

esto demuestra que $h(\tau)$ **no determina** al funcional nulo, o sea que $h(\tau)$ y $(Est.h(t))^*$ **no pertenecen** a la misma clase de eqivalencia. □

BIBLIOGRAFIA

1. Takeuchi Y., *Funciones no-estándar y Teoría de Distribuciones*, Revista Colombiana de Matemáticas, Vol XVIII,Nos, 3-4,, 1983..
2. Takeuchi Y., *Teoría de Funciones No-estándar*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1983.
3. Rudin W., *Real and Complex Analysis*, Mc Graw Hill, New York, 1966.
4. Riesz F.,Nagy B.S., *Functional Analysis*, Frederick Ungar Pub. Co. New York, 1965.
5. Halmos P.R., *Measure Theory*, Van Nostran, 1950.
6. Bartle, R., *The Elements of Integration*, John Wiley & Sons. New York, 1966.