Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XI (1977) pags. 77 - 108

ESPACIO CON LA METRICA OPERADOR

por

Yu TAKEUCHI

§ Introduccion.

Según la Mecánica Cuántica [4], un sistema mecánico está formado por muchos estados mecánicos, hablando en términos matemáticos, un sistema mecánico se identifica con un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ cuyos elementos (o vectores) representan los estados mecánicos del sistema. Una cantidad física observable T es un operador hermítico en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y al realizar la medición del valor de esta cantidad T se obtiene uno de los valores

propios del operador T. Sean

$$\varphi_k \ (k = 1,2,3,\ldots) \quad \text{con} \ \|\varphi_k\| = 1 \qquad (1)$$

los vectores propios (o los estados propios) del operador T correspondientes a los valores propios:

$$\lambda_k \ (k = 1,2,3,\ldots) \ ; \qquad (2)$$

entonces $\{\varphi_k \ / \ k \in \mathbb{N}\}$ es un sistema ortonormal completo del espacio $\mathcal{H}$. Si se observa la cantidad física T en uno de los estados propios, digamos en φ_k, entonces se obtiene λ_k como el valor observado de T. Sea ψ (con $\|\psi\| = 1$) un estado diferente a los estados propios de T; desarrollando ψ en el sistema $\{\varphi_k\}$ tenemos:

$$\psi = \Sigma_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k \ , \qquad (3)$$

donde

$$a_k = \langle \psi \ . \ \varphi_k \rangle \ .$$

Si se hace la medición del valor de la cantidad física T en el estado ψ entonces la observación hace transferir el estado ψ a uno de los estado propios φ_k con la probabilidad $|a_k|^2 = |\langle \psi \ . \varphi_k \rangle|^2$. Esto es, al medir el valor de la cantidad T en el estado ψ, la probabilidad de obtener el valor λ_k es igual a $|a_k|^2$:

$$P(T = \lambda_k, \text{ en el estado } \psi) = |a_k|^2 = |\langle \psi . \varphi_k \rangle|^2 . \qquad (4)$$

Así que la esperanza del valor de la cantidad física T observado en el estado ψ es igual a:

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} \lambda_k |a_k|^2 = \langle T\psi . \psi \rangle . \qquad (5)$$

En un espacio métrico (S,d), si la métrica d es una cantidad físicamente observable entonces d debe ser un operador hermítico en el sistema mecánico, y los valores observados de la cantidad distancia d son los valores propios del operador. En el presente trabajo estudiaremos este tipo de espacio. El espacio obtenido, bajo algunas condiciones, es equivalente al espacio semi-probabilísticamente métrico con la condición de Šertnev [1] para τ_{MIN}.

§ 2 Algunas fórmulas integrales.

En el presente parágrafo daremos algunas fórmulas de integración que van a servir como las herramientas principales del desarrollo.

Teorema 1. Sean $\alpha(t)$ una función creciente, contínua por la izquierda, con $\int_{\mathbb{R}} d\alpha(t) = k \neq \infty$, y $\beta(t)$ una función del valor real no negativo casi siempre 1) con respecto a α, 2) medible Lebesgue en $\mathbb{R}$; entonces:

$$\int_{\mathbb{R}} \beta(t)\, d\alpha(t) = \int_{\mathbb{R}^+} x\, d\{\int_{\beta(t)<x} d\alpha(t)\} \qquad (1)$$

Demostración: Para mayor sencillez suponemos que $\beta(t)\geqslant 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, puesto que en ambos miembros de la igualdad (1) el conjunto $\{t \mid \beta(t)<0\}$ da efecto nulo.

(1) Primer caso. Supongamos que $\int_{\mathbb{R}} \beta(t)\, d\alpha(t) \neq \infty$.

En $\mathbb{R}^2$ definimos la α-medida por:

$$m((-\infty,a)X[c,d)) = [\alpha(a) - \alpha(-\infty)].(d-c).$$

Sea

$$S = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \beta(t),\ t \in \mathbb{R}\};$$

entonces S es α-medible, y

$$m(S) = \int_{\mathbb{R}} \beta(t)\, d\alpha(t).$$

Por el teorema de Fubini, tenemos:

$$m(S) = \int_0^{\infty} \{ \int_{\beta(t)\geq x} d\alpha(t)\}\, dx \quad \text{(integración por partes)}$$

$$= x. \int_{\beta(t)\geq x} d\alpha(t) \Big|_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^{\infty} x d\{ \int_{\beta(t)\geq x} d\alpha(t)\}$$

$$= 0 - \int_0^{\infty} x d\{ k - \int_{\beta(t)<x} d\alpha(t)\} \quad \text{(véase 2))}$$

$$= \int_0^{\infty} x d\{ \int_{\beta(t)<x} d\alpha(t)\}.$$

Así:

$$\lim_{x\to\infty} x . \int_{\beta(t)\geq x} d\alpha(t) = 0 .$$

(2) Segundo caso. Supongamos que $\int_{\mathbb{R}} \beta(t)\, d\alpha(t) = +\infty$.

Sea

$$\int_{\beta(t)<x} d\alpha(t) = \lambda(x); \quad \text{(véase 3))}$$

entonces $\lambda(x)$ es evidentemente creciente, y tenemos:

$$\int_{[o,\infty)} x d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[n-1,n)} x d\lambda(x)$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\,\{\lambda(n) - \lambda(n-1)\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\{\lambda(n) - \lambda(n-1)\} - \{\lambda(\infty) - \lambda(0)\}$$

$$= n. \int_{n-1 \leq \beta(t) < n} d\alpha(t) - (k-0) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1 \leq \beta(t) < n} \beta(t)\, d\alpha(t) - k$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \beta(t)\, d\alpha(t) - k = +\infty \quad \bullet \blacksquare$$

Nótese que el Teorema 1 es también válido si $\alpha(t)$ es una función de variación acotada y contínua por la izquierda, puesto que una función de variación acotada es la diferencia de dos funciones crecientes con la misma continuidad.

Corolario 1. En el Teorema 1, si β es creciente y continua por la derecha, entonces (Apéndice 3):

$$\int_{\mathbb{R}} \beta(t).\, d\alpha(t) = \int_{0}^{\infty} x.d\alpha(\beta^{-1}(x)) \,, \qquad (2)$$

donde β^{-1} es la pseudo inversa de la función β definida por :

$$\begin{cases} \beta^{-1}(0) = -\infty \\ \beta^{-1}(x) = \sup\{s \mid \beta(s) < x\} \end{cases} \qquad (3)$$

.(Apéndice 1)

Demostración: Basta demostrar que:

$$\int_{\beta(t)<x} d\alpha(t) = \alpha(\beta^{-1}(x)). \qquad (4)$$

pero como:

$$\alpha(\beta^{-1}(x)) - \alpha(-\infty) = \int_{[-\infty, \beta^{-1}(x))} d\alpha(t)$$

basta comprobar que

$$\{t \in \mathbb{R} \mid \beta(t) < x\} = [-\infty, \beta^{-1}(x)) \qquad (5)$$

(Véase el Apéndice 1). ■

Corolario 2. Si β es creciente y continua por la izquierda, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \beta^{-1}(t)\, d\alpha(t) = \int_0^{\infty} x\, d\alpha(\beta(x)), \qquad (6)$$

donde β^{-1} es la pseudo inversa de β, definida por:

$$\beta^{-1}(t) = \sup\{x \mid \beta(x) \leq t\}. \qquad (7)$$

Demostración. En el apéndice 1 se demuestra que β^{-1} es creciente y continua por la derecha, y que $(\beta^{-1})^{-1} = \beta$. Por lo tanto, el Corolario 2 es consecuencia inmediata del Corolario 1. ■

§ 3 Resolución de la identidad y la función de distribución.

Algunas propiedades del operador hermítico. Sean T_o un operador auto-adjunto en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, $\{E_o(x)\}$ la resolución de la identidad correspondiente ([3], [6]) [donde sin perdida de generalidad, podemos suponer $E_o(x^-) = E_o(x)$ (continuidad por la izquierda)]:

$$T_o = \int_{-\infty}^{\infty} x\, d\, E_o(x). \qquad (1)$$

Si f(x) es una función de valor real y medible se

gún Lebesgue podemos definir el siguiente operador hermítico:

$$f(T_o) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \; dE_o(x). \qquad (2)$$

Es bien conocido ([7]) que la familia $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = \{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \; d \; E_o(x) \mid f \text{ es de valor real, L-medible } \} \qquad (3)$$

de todos los operadores hermíticos de la forma (2) es un anillo conmutativo. Si B es un conjunto medible-L, entonces el operador:

$$P_B = \int_B d \; E_o(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_B(x) \; d \; E_o(x) = \chi_B(T_o) \qquad (4)$$

donde χ_B es la función característica del conjunto B, es un operador proyeccion. Si el subespacio lineal:

$$P_B \cdot \mathcal{H} \qquad (5)$$

es diferente del espacio total $\mathcal{H}$, éste se llama "un subespacio propio del operador T_o" correspondiente al conjunto B.

Dado un operador hermítico T, la esperanza de T medida en el estado $h \in \mathcal{H}$ (con $\|h\| = 1$) se define como $\langle Th , h \rangle$ (ver la fórmula (5) del § 1). Decimos que un operador hermítico T es "definido positivo", lo que se denota con

$$T \geq 0 \; , \qquad (6)$$

si la esperanza de T no es negativa en cualquier estado; esto es, si

$$\langle Th\ ,\ h\rangle \geq 0 \quad \text{para todo } h \in \mathcal{H}. \tag{7}$$

Es fácil ver que $f(T_o) \in \mathcal{A}$ es definido positivo si, y sólo si, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in R$, salvo en un conjunto de medida nula que no contenga los valores propios del operador T_o.

II. Función de distribución relacionada con un operador hermítico.

Teorema 2. Sea $\{E(x)\}$ una resolución de la identidad; dado $h \in \mathcal{H}$ con $|h| = 1$, la función F_h definida por:

$$F_h(x) = \langle E(x)h,\ h\rangle = \|E(x)h\|^2 \tag{8}$$

es una función de distribución.

Demostración. (i) Si $x < y$ entonces se tiene que $\|E(x)h\|^2 \leq \|E(y)h\|^2$ puesto que $\{E(x)\}$ es un sistema creciente de proyecciones.

(ii) Como $\lim_{x\to-\infty} E(x) = 0$ (el operador nulo) y $\lim_{x\to+\infty} E(x) = I$ (el operador idéntico), se tiene evidentemente que

$$\lim_{x\to-\infty} F_h(x) = 0\ ,\quad \lim_{x\to+\infty} F_h(x) = 1\ .$$

Definimos, por conveniencia,

$$F_h(-\infty) = 0\ ,\quad F_h(+\infty) = 1\ .$$

(iii) $F_h(x)$ es continua por la izquierda puesto que $\{E(x)\}$ es continua por la izquierda. ∎

Ejemplo 1. (Caso discreto). Supongamos que el ope

rador hermítico T_o no tiene aspecto continuo; sean φ_n ($n = 1,2,3,\ldots$) los vectores propios normalizados del operador T_o correspondientes a los valores propios λ_n ($n = 1,2,3,\ldots$), entonces tenemos una resolución de la identidad $\{E_o(x)\}$ como sigue:

$\mathcal{M}_x$ = el subespacio cerrado determinado por todos los φ_n tales que $\lambda_n < x$; (9)
$E_o(x)$=el operador proyección sobre $\mathcal{M}_x$.

Si $h \in \mathcal{H}$, $\|h\| = 1$, tenemos:

$$h = \Sigma_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n \quad \text{con} \quad b_n = \langle h, \varphi_n \rangle. \tag{10}$$

Así:

$$F_h(x) = \|E_o(x)h\|^2 = \langle E_o(x)h, h \rangle$$

$$= \langle \sum_{\lambda_n < x} b_n \varphi_n , \Sigma_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n \rangle = \sum_{\lambda_n < x} |b_n|^2 ; \tag{11}$$

por lo tanto:

$$F_h(x^+) - F_h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ |b_n|^2 & \text{si } x = \lambda_n \ . \end{cases} \tag{12}$$

Esto es, $F_h(x)$ es la función de distribución correspondiente a la observación de la cantidad física T_o en el estado $h \in \mathcal{H}$.

Ejemplo 2. Sea $F(x)$ una función de distribución correspondiente a una variable aleatoria discreta X, o sea,

$$P(X = \lambda_k) = p_k > 0 \ , \ \text{con} \ \Sigma_{k=1}^{\infty} p_k = 1 \ ,$$

$$F(x) = \sum_{\lambda_k < k_x} p_k \quad .$$

Dado $h \in \mathcal{H}$ con $\|h\| = 1$, existe un operador auto-adjunto

$$T_o = \int_{-\infty}^{\infty} x \, d\, E_o(x) \quad \text{tal que} \quad F(x) = \|E_o(x)h\|^2 .$$

Nótese que el operador T_o depende del elemento $h \in \mathcal{H}$ dado.

Demostración. Sea $\{\varphi_k\}$ un sistema ortonormal completo del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que [4]

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{p_k} \cdot \varphi_k \quad . \tag{13}$$

Se define $\{E_o(x)\}$ como sigue:

$$E_o(x).\varphi_k = \begin{cases} \varphi_k & \text{si} \quad \lambda_k < x, \\ 0 & \text{si} \quad \lambda_k \geq x \ ; \end{cases} \tag{14}$$

entonces

$$E_o(x)\, h = \sum_{\lambda_k < x} \sqrt{p_k} \cdot \varphi_k \quad ,$$

o sea:

$$\|E_o(x).h\|^2 = \sum_{\lambda_k < x} p_k = F(x)$$

Generalizando el ejemplo 2 obtenemos el siguiente.

Teorema 3. Sea $F(x)$ una función de distribución; dado $h \in \mathcal{H}$ ($\|h\| = 1$) existe un operador auto-adjunto $T = \int_{-\infty}^{\infty} x.d\, E(x)$ tal que

$$F(x) = \|E(x).h\|^2 \quad .$$

Demostración. Como el espacio de Hilbert es único

(salvo isomorfismos) basta demostrar el Teorema 3 para $\mathcal{H} = L_2(0,1)$. Primero, definimos una familia de proyecciones $\{E_o(x)\}$ como sigue: Si $f(t) \in L_2(0,1)$ entonces

$$E_o(x).f(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } 0 \leq t < x \\ 0 & \text{si } x \leq t \leq 1. \end{cases} \qquad (15)$$

Evidentemente se tiene que:

(i) $E_o(x)^2 = E_o(x)$ (para todo $x \in [0,1]$).

(ii) $\langle E_o(x)\, f,g \rangle = \langle f, E_o(x)g \rangle = \int_o^x f(t)\, \overline{g(t)}dt$, para todo $f,g \in L_2(0,1)$.

(iii) Si $x < y$ tenemos:

$$\|E_o(x)f\|^2 = \int_o^x |f(t)|^2 dt \leq \int_o^y |f(t)|^2 dt = \|E_o(y)f\|^2 ,$$

para todo $f \in L_2(0,1)$.

(iv) $E_o(0) = 0$ (el operador nulo), $E_o(1) = 1$ (el operador idéntico).

(v) $$\lim_{\substack{x \to x_o \\ x < x_o}} E_o(x).f(t) = \left\{ \begin{cases} f(t) & \text{si } 0 \leq t < x_o \\ 0 & \text{si } x_o \leq t \leq 1 \end{cases} \right\} =$$

$$= E_o(x_o).f(t).$$

De modo que $\{E_o(x)\}$ es una familia monótona de proyecciones, continua por la izquierda.

(vi) Si $h_o(t) = 1$ (la función constante de valor 1) entonces

$$\|E_o(x).\, h_o\|^2 = \int_o^x 1^2\, dt = x \,. \qquad (16)$$

(vii) Sea

$$E_1(x) = E_o(F(x)) \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{17}$$

entonces se tiene inmediatamente que $\{E_1(x)\}$ es una resolución de la identidad

(viii) Tenemos, por (16), que:

$$\|E_1(x).h_o\|^2 = \|E_o(F(x)).h_o\|^2 = F(x) \tag{18}$$

(ix) como $\|h_o\| = \|h\| = 1$, existe un operador unitario U tal que

$$h = U \cdot h_o$$

Sea

$$E(x) = U \cdot E_1(x) \cdot U^{-1} ; \tag{19}$$

entonces $\{E(x)\}$ es una resolución de la identidad, además:

$$\|E(x)h\|^2 = \|U.E_1(x).U^{-1}.\ U\ h_o\|^2$$
$$= \|U.E_1(x)\ h_o\|^2 = \|E_1(x)\ h_o\|^2 = F(x). \blacksquare$$

En la demostración del Teorema 3, si T_o es el operador hermítico correspondiente a la resolución de la identidad $\{E_o(x)\}$ (con $E_o(x) = 0$ si $x \leq 0$. $E_o(x) = I$ si $x > 1$), entonces, para todo $f, g \in L_2(0,1)$ tenemos:

$$\langle T_o f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle E_o(x)f, g\rangle = \int_o^1 x d\{\int_o^x f(t)\overline{g(t)}\ dt\}$$

$$\int_o^1 xf(x)\ \overline{g(x)}dx = \langle tf(t), g(t)\rangle ; \tag{20}$$

esto es,

$$T_o.\ f(t) = t.f(t) \tag{21}$$

De la misma manera, si T_1 es el operador hermítico correspondiente a la resolución de la identi-

dad $\{E_1(x)\}$, entonces, por un cálculo directo similar al anterior, se puede demostrar que

$$T_1.f(t) = F^{-1}(t).f(t), \qquad (22)$$

donde F^{-1} es la pseudo inversa de F.

§ 4 Espacios con la métrica operador.

Definición 1. Sea $T_o = \int_{-\infty}^{\infty} x.d\, E_o(x)$ un operador hermítico dado en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Un espacio con la métrica operador es un par (S, T) donde

$$T : S \times S \longrightarrow \mathcal{Q}$$

$$(p,q) \longmapsto T_{p,q} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{p,q}(x).d\, E_o(x) \quad (1)$$

que satisface las siguientes condiciones:

(i) $T_{p,q} \geq 0$ ($T_{p,q}$ es un operador hermítico definido positivo).

(ii) $T_{p,q} = 0$ (el operador nulo) si, y sólo si $p = q$.

(iii) $T_{p,q} = T_{q,p}$

(iv) $T_{p,q} + T_{q,r} \geq T_{p,r}$ (esto es, $T_{p,q} + T_{q,r} - T_{p,r}$ es un operador definido positivo).

Se va a mostrar que f es una semi-métrica estocástica fuerte para S a través de la correspondencia

$$f_{p,q} \longleftrightarrow T_{p,q} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{p,q}(x) d\, E_o(x), \qquad (2)$$

y que (S,F) es un semi-PM con una condición ($\check{S}$) ([1],[2]) por medio de la esperanza de la resolución de la identidad del operador, medida en un estado, definiendo F como en el Teorema 5 .

Teorema 4. Sea $h \in \mathcal{H}$ (con $\|h\| = 1$) un elemento del espacio de Hilbert, entonces

I. $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}}, \mu_h)$ con

$$\mu_h(B) = \left\| \int_B d\, E_o(x)\, h \right\|^2 = \int_B d \left\| E_o(x)\, h \right\|^2 \qquad (3)$$

es un espacio de probabilidad.

II. Si $\{T_{p,q}\}$ es una métrica operador, entonces $\{f_{p,q}\}$ es una semi-métrica estocástica fuerte.

III. Sea $h \in \mathcal{H}$ un elemento que no pertenece a ningún subespacio propio del operador T_o. Si $\{f_{p,q}\}_{p,q \in S}$ es una semi-métrica estocástica fuerte (con la probabilidad (3)), entonces $\{T_{p,q}\}_{p,q \in S}$ es una métrica operador.

Demostración. I. Evidente.

II. Sea

$$A = \{t \in \mathbb{R} \mid f_{p,q}(t) < 0\}. \qquad (4)$$

Si $h' \in \int_A d\, E_o(x).\mathcal{H}$ entonces $h' = \int_A d\, E_o(x).h'$, luego tenemos:

$$\|h'\|^2 = \int_A d\,\|E_o(x)h'\|^2 ,$$

$$\langle T_{p,q}.h',h'\rangle = \int_A f_{p,q}(x)\,d\|E_o(x)h'\|^2 . \qquad (5)$$

Supongamos entonces que $\|h'\| \neq 0$, entonces $\langle T_{p,q} h', h'\rangle < 0$ puesto que $f_{p,q}(x) < 0$ para todo $x\in A$ (contradice a la condición (i)); por lo tanto, se tiene que $\|h'\| = 0$, esto es: $\int_A d\,E_o(x)$ es el operador nulo, así:

$$\mu_h(A) = \int_A d\|E_o(x).h\|^2 = 0$$

o sea que $f_{p,q} \geqslant 0$ (c.s.) .

De manera similar, se pueden demostrar otras condiciones.

III. Como $f_{p,q} \geqslant 0$ (c.s.) entonces

$$\mu_h(A) = \int_A d\|E_o(x)\,h\|^2 = 0 \qquad (6)$$

donde $A\subseteq R$ es el conjunto definido en (4). Suponemos que $\int_A d\,E_o(x)$ no es el operador nulo, entonces

$$\int_{\mathbb{R}-A} d\,E_o(x).\mathcal{H}$$

es un subespacio propio del operador T_o: por hipótesis, tenemos que:

$$h \notin \int_{\mathbb{R}-A} d\,E_o(x).\,\mathcal{H} ,$$

esto es:

$$\int_A d\,E_o(x).h \neq 0 ;$$

o sea,

$$\left\| \int_A d\, E_o(x)h \right\|^2 = \int_A d \left\| E_o(x)h \right\|^2 = \mu_h(A) \neq 0$$

(¡Absurdo!).

Así que $\int_A d\, E_o(x)$ es el operador nulo, luego:

$$T_{p,q} = \int_{\mathbb{R}} f_{p,q}(x).d\, E_o(x) = \int_{\mathbb{R}-A} f_{p,q}(x).d\, E_o(x) +$$

$$+ \int_A f_{p,q}(x).d\, E_o(x) = \int_{\mathbb{R}-A} f_{p,q}(x).d\, E_o(x) \geq 0$$

puesto que $f_{p,q}(x) \geq 0$ en $\mathbb{R} - A$.

De la misma manera, se pueden demostrar las otras condiciones para la métrica operador. ∎

Teorema 5. Sea T una métrica operador para S definida en (1).

(i) $$T_{p,q} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{p,q}(x).d\, E_o(x) = \int_o^{\infty} x.d\, E_{p,q}(x)$$

donde

$$E_{p,q}(x) = \int_{f_{p,q}(t)<x} d\, E_o(t). \qquad (7)$$

(ii) Sea h_o un elemento que no pertenece a ningún subespacio propio del operador T_o ; definimos:

$$F_{p,q}(x) = \left\| E_{p,q}(x)\, h_o \right\|^2 = \left\langle E_{p,q}(x)h_o, h_o \right\rangle \qquad (8)$$

entonces (S,F) con

$$\begin{aligned} F : S \times S &\longrightarrow \mathfrak{D}^+ \\ (p,q) &\longmapsto F_{p,q} \end{aligned} \qquad (9)$$

es un espacio semi-PM, donde $\mathfrak{D}^+$ es el conjunto de

todas las funciones de distribución, F, tales que $F(0) = 0$.

(iii) Para todo $p,q \in S$ si $f_{p,q}$ es una función creciente y continua por la derecha, entonces tenemos:

$$(F_{p,q}^{-1} + F_{p,r}^{-1})^{-1} \leq F_{p,r} \qquad (10)$$

donde $(\ldots)^{-1}$ indica la función pseudo inversa. (Apéndice 1).

Demostración. (i) Para todo $g,h \in \mathcal{H}$ tenemos :

$$\left\langle \int_{-\infty}^{\infty} f_{p,q}(x)\, d\, E_o(x)g,h \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} f_{p,q}(x)\, d \left\langle E_o(x).g,h \right\rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} x\, d\{ f_{p,q}(t) < x \int d \left\langle E_o(t).g,\, h \right\rangle \quad \text{(por el}$$

Teorema 1); así se obtiene la igualdad (7).

(ii) Por el Teorema 2, $F_{p,q}$ es una función de distribución. Además, como $E_{p,q}(0) = 0$ (el operador nulo), entonces

$$F_{p,q}(0) = \| E_{p,q}(0)\, h_o \|^2 = 0.$$

Si $p = q$ tenemos que $T_{p,q} = 0$ (el operador nulo), luego:

$$E_{p,q}(x) = \int_R d\, E_o(t) = I \text{ (el operador idéntico)}$$

si $x > 0$, o sea que $F_{p,q}(x) = 1$ si $x > 0$ ($F_{p,q} = H$). Recíprocamente, si $F_{p,q}(x) = 1$ para todo $x > 0$, entonces:

$$\| E_{p,q}(x)\, h_o \| = \| \int_{f_{p,q}(t)<x} d\, E_o(t) h_o \| = \| h_o \|$$

para todo $x > 0$. (11)

Sea $A_n = \{t \in \mathbb{R} \mid f_{p,q}(t) < \frac{1}{n}\}$ entonces

$$\| E_{p,q}(\tfrac{1}{n}) h_o \|^2 = \| \int_{x \in A_n} d\, E_o(x)\, h_o \|^2 =$$

$$= \int_{x \in A_n} d \| E_o(x)\, h_o \|^2 = \| h_o \|^2 \ .$$

Como $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_o = \{t \in \mathbb{R} \mid f_{p,q}(t) = 0\}$ entonces[5]

$$\| \int_{x \in A_o} d\, E_o(x)\, h_o \|^2 = \| h_o \|^2 \ ;$$

luego

$$\int_{x \in A_o} d\, E_o(x) . h_o = h_o \ , \qquad (12)$$

puesto que $\int_{x \in A_o} d\, E_o(x)$ es una proyección. Por hipótesis, h_o no pertenece a ningún subespacio propio del operador T_o; por lo tanto, la igualdad (12) implica que

$$\int_{\mathbb{R}-A_o} d\, E_o(x) = 0 \quad \text{(el operador nulo)}$$

o sea que

$$T_{p,q} = \int_{A_o} 0 \; d\, E_o(x) + \int_{\mathbb{R}-A_o} f_{p,q}(x) d\, E_o(x) = 0$$

así que $p = q$.

(iii) Si $f_{p,q}$ es creciente y contínua por la derecha, por el Corolario 1 del Teorema 1, tenemos :

$$F_{p,q}(x)=\|E_{p,q}(x)\ h_o\|^2 =\|_{f_{p,q}(t)<x} \int^{d}\ E_o(t)h_o\|^2$$

$$= \int_{f_{p,q}(t)<x} d\|E_o(t)h_o\|^2=\|E_o(f^{-1}_{p,q}(x))h_o\|^2.$$

Sea $F(t) = \|E_o(t)\ h_o\|^2$ **entonces:**

$$F_{p,q}(x)= F(\ f^{-1}_{p,q}\ (x)\ ). \qquad (13)$$

Tomando la pseudo inversa de la igualdad (13) (Apéndice 1) se tiene que

$$F^{-1}_{p,q} = f_{p,q}\ (F^{-1}\ ). \qquad (14)$$

Así, por la definición 1 y por el Teorema 4, II, tenemos la desigualdad (10).

Teorema 6. Definamos una aplicación $\tau : \mathcal{D}^+ \times \mathcal{D}^+ \longrightarrow \mathcal{D}^+$ **como sigue:**

$$\tau\ (A,\ B) = (A^{-1} + B^{-1})^{-1} \quad \text{(Apéndice 1)} \qquad (15)$$

entonces τ **es una t-función [1] . Además,**

$$\tau\ (H_a,\ H_b\ ) = H_{a+b}$$

Demostración. a) Si $A \leqslant C$, $B \leqslant D$ entonces (Apéndice)

$$A^{-1} \geqslant C^{-1}\ ,\quad B^{-1} \geqslant D^{-1}\ ;$$

luego

$$A^{-1} + B^{-1} \geqslant C^{-1} + D^{-1}\ ;$$

así:

$$\tau(A,B) = (A^{-1}+B^{-1})^{-1} \leqslant (C^{-1}+D^{-1})^{-1} = \tau(C,D).$$

b) $\tau(A,B) = \tau(B,A)$, por definición

c) Como $$H^{-1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ +\infty & \text{si } x = 1 \end{cases},$$

para $A \in \mathcal{D}^+$ tenemos:

$$A^{-1} + H^{-1} = A^{-1}$$

puesto que $A^{-1}(1) = +\infty$. Por lo tanto, se tiene que

$$\tau(A,H) = (A^{-1}+H^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A.$$

d) $$\tau(\tau(A,B), C) = \tau((A^{-1}+ B^{-1})^{-1} + C)$$
$$= (A^{-1} + B^{-1} + C^{-1})^{-1} = \tau(A, \tau(B,C)).$$

e) Tenemos:

$$H_a^{-1}(x) = \text{Sup}\{t \in \bar{\mathbb{R}} \mid H_a(t) \leq x\} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x<0 , \\ a & \text{si } 0 \leq x<1 , \\ +\infty & \text{si } 1 \leq x . \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$H_a^{-1}(x)+H_b^{-1}(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } x<0 , \\ a+b & \text{si } 0 \leq x<1 , \\ +\infty & \text{si } 1 \leq x ; \end{cases}$$

luego:

$$(H_a^{-1}+H_b^{-1})^{-1}(x) = \left\{ \begin{matrix} 0 & \text{si } x \leq a+b \\ 1 & \text{si } x>a+b \end{matrix} \right\} = H_{a+b}(x) . \blacksquare$$

Según los Teoremas 5 y 6, dada una métrica operador $\{T_{p,q}\}$ el espacio semi-PM $\{F_{p,q}\}$ relacionado en el Teorema 5 satisface la condición (Š) ([1]) para la t-función τ definida por (15). Recíprocamente, tenemos el siguiente:

Teorema 7. Sea (S,F) un espacio semi-PM que sa-

tisface la condición (Š) para τ definida por (15). Dado un $h_o \in \mathcal{H}$ (con $\|h_o\| = 1$) , existe una métrica operador $\{T_{p,q}\}_{p,q \in S}$ relacionada por (8) del Teorema 5.

Demostración. Basta utilizar el Teorema 3. Para mayor sencillez, tomamos que $h_o = 1$ (la función constante del valor 1 en $L_2(0,1)$) entonces por (17) , § 3 tenemos:

$$E_{p,q}(x) = E_o(F_{p,q}(x)),$$

luego:

$$T_{p,q} = \int_{\mathbb{R}} x.d\, E_o(F_{p,q}(x)) = \int_{\mathbb{R}} F_{p,q}^{-1}(x).d\, E_o(x). \blacksquare$$

Apendice 1

Función pseudo inversa

Definición 2. Sea f una función creciente, continua por la derecha en $[a,b]$ (a puede ser $-\infty$, b puede ser $+\infty$). En $[f(a), f(b)]$ se define la pseudo inversa de f, f^{-1} como sigue:

$$f^{-1}(f(a)) = a$$

$$f^{-1}(y) = \sup\{t \in [a,b] \mid f(t) < y\} \text{ para } y \neq f(a)$$

A continuación, daremos algunas propiedades de la pseudo inversa.

(i) f^{-1} es creciente.

Demostración. Sean $y < y'$, si $f(t) < y$ entonces

$f(t) < y'$, por lo tanto:

$$\{t|f(t) < y\} \subset \{t|(t) < y'\}$$

asi que: $f^{-1}(y) \leq f^{-1}(y')$.

(ii) Si $f^{-1}(y) = x$ entonces $f(x) \geq y$ ■

Demostración: Como $x = \sup\{t|f(t) < y\}$, para todo $x' > x$ tenemos que $f(x') \geq y$, esto es $f(x^+) \geq y$. Por la continuidad derecha de f se tiene que $f(x) \geq y$ ■

(iii) Si $f(x) = y$ entonces $f^{-1}(y) \leq x$.

Demostración: $f^{-1}(y) = \sup\{t|f(t) < y\} =$
$= \sup\{t|f(t) < f(x)\}$. Como $f(t) < f(x)$ implica $t < x$, luego" $f^{-1}(y) \leq x$ ■

(iv) $f(x) < y$ si, y sólo si, $x < f^{-1}(y)$.

Demostración: Si $f(x) < y$ entonces tenemos evidentemente que $x \leq f^{-1}(y)$. Si $x = f^{-1}(y)$, por (ii) se obtiene que $f(x) \geq y$ (¡absurdo!), luego: $x < f^{-1}(y)$. Si $x < f^{-1}(y)$ entonces se tiene inmediatamente que $f(x) \leq y$. Por (iii), $f(x) \neq y$, luego: $f(x) < y$ ■

(v) f^{-1} es continua por la izquieda.

Demostración: Supongamos que f^{-1} no es continua por la izquierda en y, esto es,

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(y^-) = \delta > 0, \quad \text{o sea:}$$

$f^{-1}(y_1) \leq f^{-1}(y) - \delta$ para todo $y_1 < y$.

Sea $x = f^{-1}(y)$ entonces: $f^{-1}(y_1) \leq x - \delta$ para todo $y_1 < y$. Por (ii): $f(x-\delta) \geq y_1$ (para todo $y_1 < y$). Tomando límite $y_1 \to y$ tenemos que: $f(x-\delta) \geq y$. Por (ii): $x = f^{-1}(y) \leq x - \delta$ (¡absurdo!)■

(vi) Si $y = f(x)$, $f^{-1}(y) = \tilde{x}$ entonces $f(x) = f(\tilde{x})$, esto es, $(f \circ f^{-1})(y) = y$.

Demostración: Por (iii): $\tilde{x} = f^{-1}(y) \leq x$. Como f es creciente, entonces: $f(\tilde{x}) \leq f(x)$. Por (ii): $f(\tilde{x}) \geq y = f(x)$, así que: $f(x) = f(\tilde{x})$.

(vii) Si $f^{-1}(\tilde{y}) = x$, $y = f(x)$ entonces $f^{-1}(y) = f^{-1}(\tilde{y})$, esto es, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

Demostración: $f(x) = y$ implica: $f^{-1}(y) \leq x = f^{-1}(\tilde{y})$ (por (iii)). $f^{-1}(\tilde{y}) = x$ implica $y = f(x) \geq \tilde{y}$ (por (ii)). Como f^{-1} es creciente, tenemos que $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(\tilde{y})$, así se obtiene que $f^{-1}(y) = f^{-1}(\tilde{y})$.

(viii) Si $f \leq g$ entonces $f^{-1} \geq g^{-1}$.

Demostración: Como $f \leq g$ se tiene que:

$$\{t \mid g(t) < y\} \subset \{t \mid f(t) < y\},$$

luego:

$$g^{-1}(y) = \sup\{t \mid g(t) < y\} \leq \sup\{t \mid f(t) < y\} = f^{-1}(y)$$

(ix) Si f y g son crecientes y continuas por la derecha, entonces

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Demostración: Sean $f^{-1}(z) = u$, $g^{-1}(u) = v$. Por (ii) tenemos: $f(u) \geq z$, $g(v) \geq u$. Luego: $(fog)(v) = f(g(v)) \geq f(u) \geq z$. Por (iii) :

$$(fog)^{-1}(z) \leq v \ . \qquad (1)$$

Por otra parte, como $v = g^{-1}(u) = \sup\{t \mid g(t) < u\}$ existe una sucesión $\{t_n\} \to v$ tal que $g(t_n) < u$. Pero:

$$u = f^{-1}(z) = \sup\{s \mid f(s) < z\} \ ;$$

luego: $f(g(t_n)) < z$. Por (iv): $t_n < (fog)^{-1}(z)$; por lo tanto:

$$v = \lim_{n\to\infty} t_n \leq (fog)^{-1}(z) \qquad (2)$$

De (1) y (2):

$$(fog)^{-1}(z) = v = g^{-1}(f^{-1}(z)) = (g^{-1} \circ f^{-1})(z)$$

Definición 3. Sea f una función creciente, continua por la izquierda en $[a,b]$, definimos en $[-\infty, \infty]$ la pseudo inversa de f, f^{-1} como sigue:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad y < f(a) \ , \\ \sup\{t \in [a,b] \mid f(t) \leq y\} & \end{cases}$$

$$\text{si} \quad y \in [\, f(a), \infty \,] \ .$$

Por un método similar el caso anterior, se puede demostrar las siguientes propiedades:

(i') f^{-1} es creciente.

(ii') Si $f^{-1}(y) = x$ entonces $f(x) \leq y$.

(iii') Si $f(x) = y$ entonces $f^{-1}(y) \geq x$.

(iv') $f(x) > y$ si, y sólo si, $x > f^{-1}(y)$.

(v´) f^{-1} es continua por la derecha.

(viii´) Si $f \leqslant g$ entonces $f^{-1} \geqslant g^{-1}$.

(ix´) Si f y g son crecientes y continuas por la izquierda, entonces

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

(x) $(f^{-1})^{-1} = f$ si f es continua por la izquierda (ó por la derecha).

Demostración: Sea $f^{-1} = g$, si $g^{-1}(x) = y$ entonces:

$$f^{-1}(y) = g(y) \geqslant x \quad \text{(por (ii))};$$

luego:

$$f(x) \leqslant y \quad \text{(por (ii´))}. \qquad (3)$$

Si $f(x) = \tilde{y}$ entonces $g(\tilde{y}) = f^{-1}(\tilde{y}) \geqslant x$ (por (iii´)),

luego: $$g^{-1}(x) \leqslant \tilde{y} \quad \text{(por (iii))}. \qquad (4)$$

De (3) y (4) tenemos que $y = \tilde{y}$, esto es:

$(f^{-1})^{-1}(x) = g^{-1}(x) = f(x)$, o sea, $(f^{-1})^{-1} = f$. ■

Observación: Si $f : [a,b] \longrightarrow [f(a), f(b)]$ entonces:

$$(f^{-1})^{-1} : [-\infty, b] \longrightarrow [-\infty, f(b)].$$

Por lo tanto, la propiedad (x) debería enunciarse:

$(f^{-1})^{-1}$ es una extensión de f.

Apendice 2

Se acostumbra usar la definición 2 (Apéndice 1) de la pseudo inversa tanto para la función continua por la derecha como para la función continua por la izquierda . Sin embargo, la fórmula (2) de § 2 sólo es válida para la pseudo inversa definida en el Apéndice 1.

Ejemplo. Sean $\alpha(t) = \beta(t) = H(t)$ (Función de Heaviside). H es continua por la izquierda, aplicando la definición 2 se tendrá:

$$\beta^{-1}(t) = H^{-1}(t)=\sup\{s \mid H(s)<t\}= \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad t > 1 \\ 0 & \text{si} \quad 0 < t \leq 1 \\ -\infty & \text{si} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

entonces:

$$(\alpha\circ\beta^{-1})(x)=(H\circ H^{-1})(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad t > 1 \, . \end{cases}$$

Tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}} \beta(t)d\alpha(t) = \int_{\mathbb{R}} H(t)d\, H(t)=H(0).\{H(0^+)-H(0)\}=0.$$

Por otra parte,

$$\int_{[o,\infty)} x d\alpha(\beta^{-1}(x)) = \int_{[o,\infty)} x d\, H(H^{-1}(x))$$

$$= \int_{\{1\}} x d\, H(H^{-1}(x)) = 1.\{(H\circ H^{-1})(1^+)-(H\circ H^{-1})(1)\}=1.$$

Apendice 3

El corolario 1 y el corolario 2 del Teorema 1 (§1)

son las fórmulas para el cambio de variables en las integrales de Riemann-Stieltjes [5], a continuación daremos una demostración sin usar los conceptos de la integral de Lebesgue.

Teorema 8. Sean α creciente y continua por la izquierda, β creciente y continua por la derecha en $[a, b]$, entonces tenemos el siguiente cambio de variables:

$$\int_a^b \alpha(x)\, d\,\beta(x) = \int_c^d \alpha(\beta^{-1}(y))\, dy \qquad (1)$$

donde $c = \beta(a)$, $d = \beta(b)$.

Demostración: Obsérvese que las integrales de Riemann-Stieltjes en ambos miembros de (1) existen bajo nuestra hipótesis. Sean

$$L = \int_a^b \alpha(x)\, d\beta(x), \quad L' = \int_c^d \alpha(\beta^{-1}(y))dy .$$

I. Dado $\varepsilon > 0$, existe una partición del intervalo $[a, b]$

$$a = x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_{n-1}, x_n = b , \qquad (2)$$

tal que la (Condición de Riemann [5]):

$$L - \varepsilon < \sum_{k=1}^{n} \alpha(x_{k-1})\, \{\beta(x_k)-\beta(x_{k-1})\}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \alpha(x_k)\{\beta(x_k)-\beta(x_{k-1})\} < L+\varepsilon. \qquad (3)$$

Sean $y_k = \beta(x_k)$, entonces por (iii), del Apéndice 1, tenemos que $\beta^{-1}(y_k) \leq x_k$, luego :

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha(\beta^{-1}(y_k))(y_k-y_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha(x_k)\{\beta(x_k) -$$

$$- \beta(x_{k=1}) \} < L + \varepsilon .$$

Como L' es el límite decreciente de las sumas superiores de Riemann-Stieltjes se tiene que

$$L' < L + \varepsilon ;$$

o sea:

$$L' \leqslant L . \qquad (4)$$

II. En la condición de Riemann (3) se puede suponer que

$$y_{k+1} = \beta(x_{k+1}) > \beta(x_k) = y_k \quad \text{(para todo k)}.$$

Escogemos $\tilde{y}_k \in (y_k, y_{k+1})$ tales que

$$\tilde{y}_k - y_k < \frac{\varepsilon}{n M} , \qquad (5)$$

donde $M = \text{Max } |\alpha(x)|$. Entonces, por (iv), del Apéndice 1, tenemos:

$$x_k < \beta^{-1}(\tilde{y}_k) \quad \text{para todo k.} \qquad (6)$$

Además:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \alpha(x_{k-1})(\beta(x_k)-\beta(x_{k-1})) - \sum_{k=1}^{n} \alpha(x_{k-1})(\tilde{y}_k-\tilde{y}_{k-1})\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |\alpha(x_{k-1})|\,|(y_k-y_{k-1})-(\tilde{y}_k - \tilde{y}_{k-1})|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} M \frac{\varepsilon}{n M} = \varepsilon . \qquad (7)$$

De (3), (6) y (7) se tiene:

$$L - 2\varepsilon < \sum_{k=1}^{n} \alpha(x_{k-1})(\tilde{y}_k - \tilde{y}_{k-1}) \leqslant$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \alpha(\beta^{-1}(\tilde{y}_{k-1}))(\tilde{y}_k - \tilde{y}_{k-1}). \qquad (8)$$

Como L' es el límite creciente de las sumas inferiores de Riemann-Stieltjes, tenemos que:

$$L - 2\varepsilon < L',$$

así que

$$L \leq L' . \qquad (9)$$

De (4) y (9) tenemos la igualdad (1).■

Corolario. Bajo las mismas hipótesis del Teorema 8, tenemos:

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \beta(x)\, d\alpha(x) = \int_{c}^{d} y\, d\alpha(\beta^{-1}(y)) \qquad (10)$$

donde $\tilde{a} = \beta^{-1}(c)$, $\tilde{b} = \beta^{-1}(d)$.

Demostración: Aplicando la integración por partes, tenemos:

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \beta(x)d\alpha(x) = \beta(\tilde{b})\alpha(\tilde{b}) - \beta(\tilde{a})\alpha(\tilde{a}) - \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \alpha(x)d\beta(x).$$

$$\int_{c}^{d} y d\alpha(\beta^{-1}(y)) = d.\alpha(\beta^{-1}(d)) - c.\alpha(\beta^{-1}(c)) -$$

$$\int_{c}^{d} \alpha(\beta^{-1}(y))\, dy .$$

Por la propiedad (vi) del Apéndice 1, tenemos:

$$d = \beta(b) = \beta(\tilde{b}), \quad c = \beta(a) = \beta(\tilde{a}) :$$

por lo tanto, el Teorema 8 garantiza la igualdad (10).■

N o t a s

1. Decimos que $\beta(t) \geqslant 0$ casi siempre con respecto a α si

$$\int_{\{t \mid \beta(t)<n\}} d\alpha(t) = 0$$

2. Sea $e_n = \{t \mid \beta(t) \geqslant n\}$, entonces $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y $\bigcap_{n=1}^{\infty} e_n = \phi$, puesto que $\beta(t)$ es de valor real. Como β es integrable con respecto a α (la hipótesis) se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{e_n} \beta(t)\, d\alpha(t) = 0$$

Por lo tanto:

$$\int_{e_n} \beta(t)\, d\alpha(t) \geqslant n \cdot \int_{e_n} d\alpha(t) \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

3. Es fácil demostrar que λ es continua por la izquierda.

4. Sea $\{\psi_k\}$ un sistema ortonormal completo del espacio $\mathcal{H}$, sea

$$h' = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{p_k} \cdot \psi_k \ ;$$

entonces $\|h'\| = 1$. Existe un operador unitario U tal que

$$U h' = h$$

puesto que $\|h'\| = \|h\| = 1$. Sean $\varphi_k = U \psi_k$ $(k=1,2,3,\ldots)$ entonces $\{\varphi_k\}$ es un sistema ortonormal completo del espacio $\mathcal{H}$,

y se tiene que

$$h = U\,h' = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{p_k}\, U\psi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{p_k}\, \varphi_k \ .$$

5. Para mayor sencillez, supóngase que $f_{p,q}(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

6. La t-función τ definida por (15) es igual a τ_{MIN}, esto es[1], si $A, B \in \mathcal{D}^+$, entonces tenemos:

$$\tau(A,B) = (A^{-1}+B^{-1})^{-1} = \sup_{u+v\leq x} (MIN(A(u),B(v))) = \tau_{MIN}(A,B).$$

Demostración: Primero, observamos el siguiente hecho (Apéndice [1], (iv)): si f es creciente y continua por la derecha, entonces:

$$[0, f^{-1}(x)) = \{t \geq 0 \mid f(t) < x\} \ .$$

Dado $x > 0$ tenemos:

$$[0,(A^{-1}+B^{-1})^{-1}(x)) = \{t>0 \mid A^{-1}(t)+ B^{-1}(t)<x\}$$

$$= \bigcup_{0<u<x} [\{t \mid A^{-1}(t)<u\} \cap \{t \mid B^{-1}(t)<x - u\}]$$

$$= \bigcup_{0<u<x} [[0, A(u)) \cap [0, B(x - u))]$$

Nota: $(A^{-1})^{-1} = A$

$(B^{-1})^{-1} = B$ Apéndice[1].

$$= \bigcup_{0<u<x} [0, MIN\{A(u), B(x - u)\})$$

$$= [0, \sup_{0<u<x} MIN\{A(u), B(x - u)\})$$

$$= [0 , \tau_{MIN}(A, B)(x)).$$

Por lo tanto, se tiene la idualdad deseada. ∎

REFERENCIAS.

[1] Weber, S. Espacios probabilísticamente métricos, Universidad Nacional de Colombia, 1977, Conferencias de un curso.

[2] Weber, S. Espacios Probabilísticamente métricos. Rev. Col. Mat. XI (1977) (de próxima aparición).

[3] Riesz, F., Nagy,B.SZ. Funcional Analysis, Frederick Ungar Pub. Co. New York, 1955.

[4] Dirac, P.A.M. The Principles of Quantum Mechanics, Oxford University Press, London, 1947.

[5] Apostol, T.M. Mathematical Analysis, Addison Wesley, Reading, 1957.

[6] Takeuchi, Y. Espacio de Hilbert, Universidad Nacional de Colombia, 1967.

[7] Takeuchi, Y. Representación de los números no convencionales mediante operadores herméticos. Rev. Col. Mat. X (1976), 125-140.

***

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, 6, D.E., Colombia,S.A.

(Recibido en enero de 1977)