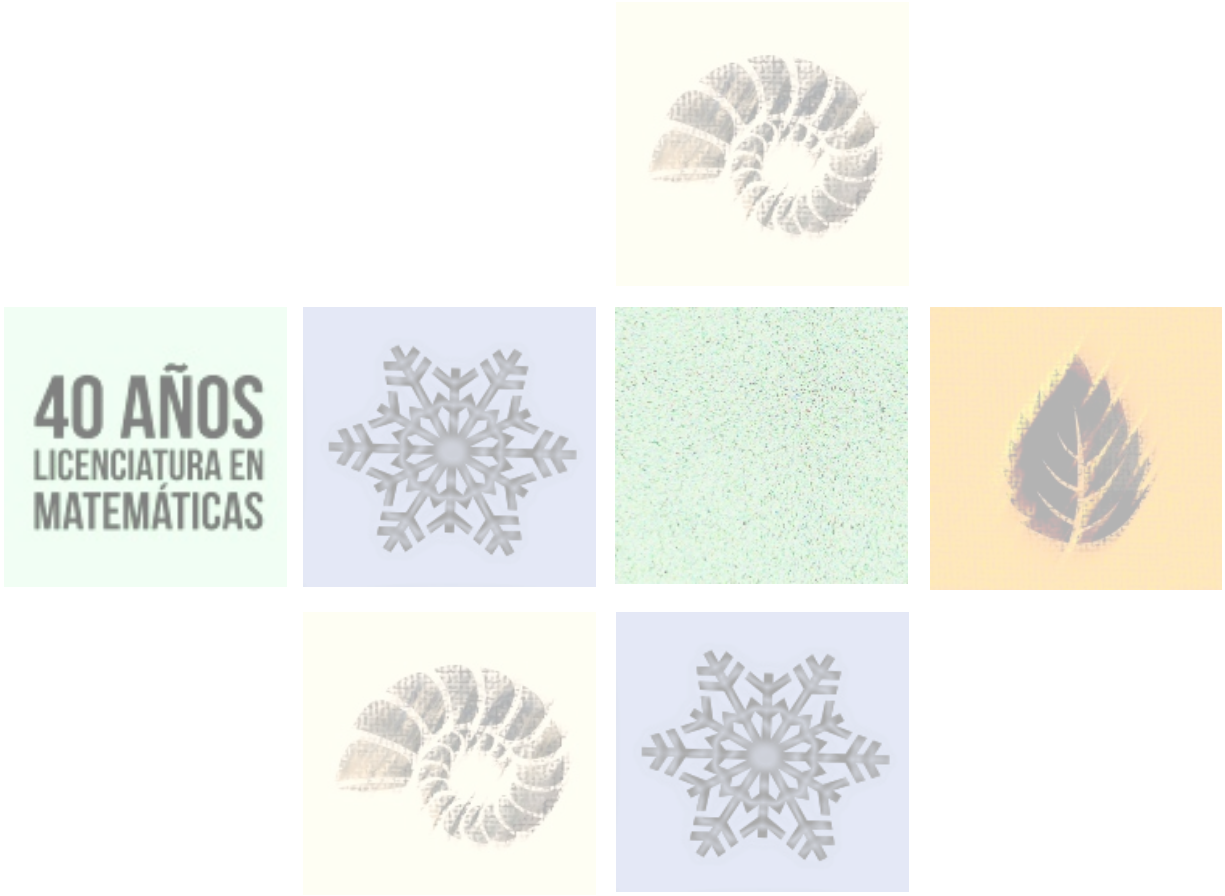


MATEMÁTICAS DEL NORORIENTECOLOMBIANO

ISBN: 978-958-8819-12-9
Publicaciones Universidad Industrial de Santander: UIS (958-8819)
Bucaramanga (Colombia), Febrero de 2014

MEMORIA

Simposio
Nororiental de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander

Editores:

Gilberto Arenas Díaz
Solange Roa Fuentes

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
2014

COMITÉ ORGANIZADOR

German Moreno
Jorge Fiallo Leal
Solange Roa Fuentes
Carlos Wilson Rodríguez Cárdenas
Carlos Arturo Rodríguez Palma
Javier Camargo García
Sofía Pinzón Durán

COMITÉ CIENTÍFICO

Topología y Geometría
Javier Camargo García
Sofía Pinzón Durán

Álgebra, Combinatoria y Teoría de Números
Carlos Arturo Rodríguez Palma
Rafael Fernando Isaacs Giraldo

Análisis y Ecuaciones Diferenciales
Elder Jesús Villamizar Roa
Gilberto Arenas Díaz

Estadística
Gabriel Yáñez Canal
Tulia Esther Rivera Flórez

Educación Matemática
Solange Roa Fuentes
Sandra Evely Parada

Presentación

El **VIII Simposio Nororiental de Matemáticas** se realizó los días 4, 5 y 6 de diciembre del año 2013 en la Universidad Industrial de Santander (UIS) en Bucaramanga, departamento de Santander (Colombia).

El Simposio está organizado por la Escuela de Matemáticas de la UIS y se ha convertido en uno de los eventos más importantes de matemáticas de la región y del país, reuniendo a una gran cantidad de personas interesadas en la investigación, la difusión, el desarrollo y la educación en matemáticas.

Los principales objetivos que se buscan alcanzar con la organización y desarrollo del Simposio son:

. Divulgar diferentes trabajos académicos e investigaciones de la comunidad matemática regional, nacional e internacional.
. Contribuir en la consolidación de la comunidad matemática en el ámbito regional, nacional e internacional.
. Integrar a la comunidad académica y profesional -estudiantes, profesores en ejercicio, matemáticos e investigadores en educación matemática- en torno a la problemática de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas.
. Propiciar espacios para la reflexión y el dialogo entre los profesores de educación básica, media y superior.
. Dar a conocer el desarrollo de ciertas áreas de la matemática y de la enseñanza de la matemática a través de invitados nacionales e internacionales de alta calidad en su formación.
. Motivar a los estudiantes para que sigan formándose en matemáticas y contribuir en el crecimiento vertical de los programas de maestrías y doctorados en matemáticas y educación matemática de la región y del país.

En este documento publicamos los extensos de trabajos que se presentaron durante el VIII Simposio. Esperamos que la publicación de estas Memorias, motive la divulgación y producción del trabajo científico de la comunidad interesada en el desarrollo de las matemáticas y su didáctica.

Índice

Análisis y Ecuaciones Diferenciales

The history and the future of the compensated compactness theory
Yun-Guang Lu 1

Stationary flow for power-law fluids in domains with unbounded boundaries
Marcelo Martins dos Santos 3

Periodic solutions of a nonlinear system of coupled differential equations
José R. Quintero 4

Las Ecuaciones de Navier-Stokes en el espacio de Fourier
Jean Carlos Cortissoz Iriarte 8

Dos artículos cortos con profundas implicaciones
Alfonso Castro 9

Soluciones con signo para un problema cuasilineal radial con peso
Sigifredo Herrón Osorio 10

Un problema de control para fluidos micropolares estacionarios
Exequiel Mallea Zepeda 11

Ecuaciones de Navier-Stokes con condiciones de Navier
Élder Jesús Villamizar Roa 13

Sobre soluciones exactas de ecuaciones diferenciales parciales
Rosalba Mendoza Suarez & Juan Carlos López C. 16

Sobre conjuntos realización de sucesiones
Edilberto José Reyes & Jorge Andrés Rojas 18

Atractores extraños y sus aplicaciones a sistemas dinámicos
Robayo M. Jaime, Hortúa O. Hector & Florian M. Andrea 21

Expansiones asintóticas de ecuaciones elípticas en medios de alto contraste
Juan Galvis & Leonardo Andrés Poveda 24

Convergencia débil de medidas radonianas con valores en retículos de Banach separables
Liliana Posada Vera & Guillermo Restrepo Sierra 28

Sobre la dinámica poblacional de cepas de *Mycobacterium tuberculosis* sensibles y resistentes a múltiples antibióticos simultáneamente
Jhoana Patricia Romero L. & Eduardo Ibargüen M. 32

El teorema de la función abierta para funciones multivaluadas convexas
Diana Ximena Narváez 35

Teoremas clásicos de convergencia en espacios débiles de Orlicz
Oscar Mauricio Guzmán Fonseca 37

Sobre la diferenciabilidad en el contexto difuso
Gilberto Arenas Díaz & Alexánder Reátiga Villamizar 38

Sobre el teorema de Bohr-Mollerup-Artin, una reconstrucción histórica de la función Gamma
Joan Amaya Triana, Stefan Gomez Guevara & Mauricio Rodríguez Garzón 40

Aplicaciones de las funciones débilmente contractivas a problemas de valor inicial difuso usando derivada generalizada de Hukuhara
Vladimir Angulo Castillo 42

Familias de operadores de Jacobi unitariamente equivalentes
Diego Leonardo Hernández Bustos 45

Algunos resultados analíticos para ecuaciones de campo neural con aprendizaje Hebbiano
Alejandro Jiménez Rodríguez & Juan Carlos Cordero Ceballos 50

Weyl type theorems for restrictions of bounded linear operators
Carlos Carpintero 54

Una aplicación de las funciones hipergeométricas
Juan Carlos López C. & Rosalba Mendoza Suárez 64

Grado de Brouwer
Rafael A. Castro T. & Raúl A. Gómez T. 66

Un problema de control óptimo asociado al modelo Rayleigh-Bénard-Marangoni
Diego Armando Rueda Gómez 70

Álgebra y combinatoria

El mínimo común múltiplo de los elementos de un conjunto de enteros
Javier Cilleruelo 73

Involuciones & álgebras de grupo normales
Alexander Holguín Villa 76

Una introducción a los espacios ultramétricos
Oscar F. Casas S. 80

Prime ideals of skew PBW extensions
Oswaldo Lezama 82

Conjuntos de Sidon
Javier Cilleruelo 84

Teoría Espectral de Grafos
Sterling Castañeda Jaimes 88

Teoría de la información: decidibilidad y completes
J. Andrés Montoya 89

Números $p-$ádicos, series de Poincaré y Funciones Zeta
Edwin León Cardenal 90

Sobre la conjetura de Erdös-Hajnal y posibles conexiones con Teoría de Modelos
Darío Alejandro García 99

Algunas construcciones de conjuntos con más sumas que diferencias
Carlos A. Rodriguez P., Ana Milena Santamaría B. & Laura Milena Romero P. 102

Anillo de funciones multisimétricas
David Ortiz & Eddy Pariguan 105

Estudio de soluciones no singulares de un sistema de ecuaciones homogéneas con coeficientes en un cuerpo finito
Jonny Fernando Barreto Castañeda 106

Una caracterización de ordinales primitivamente recursivos usando la función de Ackerman
Franqui Cárdenas 109

Sensado Compresivo
Henry Arguello Fuentes 111

Matroides transversales topológicas
Juan Carlos Rubriche Cárdenas & Raúl Emilio Varela Perea 116

Condiciones de regularidad de Auslander para extensiones de Ore
Nelcy Esperanza Arévalo Baquero 119

Retículos residuados y algunas conexiones con topología y lógica
Sandra Perilla Monroy 121

La Categoría de los Matroides
Wilmer Pineda & Christian Nolasco 124

Números de Fibonacci módulo m
Carlos Arturo Rodriguez Palma & Yzel Wlly Alay Gómez Espíndola 126

Topología y Geometría

Geometrías afines reales en dimensión 2
Alberto Medina 130

Higher Auslander-Reiten theory
Erik Backelin, ... 131

Cocientes en geometría algebraica real
Florent Schaffhauser 133

Affine Lie groups
Omar Saldarriaga 134

On the classification of abelian extensions of Lie algebras
Paul Bressler 135

Los conjuntos también se mueven
Héctor Méndez 136

Una introducción a los retractos absolutos y a los retractos de vecindad absolutos
Sergio Macías 138

Una introducción a los espacios topológicos bien-formados
Félix A. Páez Díaz 139

Una visión algebraica de la conexidad topológica
Sonia M. Sabogal P. 143

A sharp height estimate for compact hypersurfaces with constant k-mean curvature in warped product spaces
Sandra C. García-Martínez, Debora Impera & Marco Rigoli 146

Sobre la categoría de los espacios topológicos totalmente ordenados y algunas de sus subcategorías
Félix A. Páez Díaz 149

Topología sobre conceptos formales
Johana Ramírez Gaviria, Sergio Ricardo Zapata C. & Juan Carlos Riaño R. 151

La armonía entre las estructuras topológicas y las estructuras algebraicas: la construcción de $\mathbb{R}$
Daniel Moran & Diana Parra 153

A result of classification in the spaces $\mathbb{S}^n_t$ and $\mathbb{H}^n_t$
Pascual Lucas & H. Fabián Ramírez-Ospina 161

Multifunciones faintly ω-continuas
Ennis Rosas 165

La función logística y el caos
Cristian Camilo Espitia Morillo 173

Sobre las variedades con curvatura seccional constante y una reconstrucción de la demostración del teorema de Beltrami
Juan Carlos Salcedo Sora 177

Funciones inducidas conexas
Sergio Andrés Pérez León 181

La Conjetura de Poincaré
Sofía Pinzón Durán & Jhoan Sebastián Báez Acevedo 184

La propiedad de arcoaproximación entre continuos
Dúwamg Alexis Prada Marín 186

Nudos virtuales
José Gregorio Rodríguez Nieto & Margarita M. Toro Villegas 190

Cuantización de variedades de Poisson
Eddy Pariguan 192

Estadística

El razonamiento bayesiano en estudiantes universitarios: un estudio longitudinal
Gabriel Yáñez Canal & Cindy Nathalia Morgado Hernández 196

¿Cómo modelamos estadísticamente respuestas entre cero y uno?
Guillermo Martínez Flórez 201

Sobre la elasticidad de la distribución de Pareto y los salarios en Colombia
Edwin Javier Castillo Carreño 203

Un acercamiento histórico-didáctico al teorema de Bayes
Gabriel Yáñez Canal 207

Análisis de datos: metodología y práctica
Julio M. Singer 211

Reflexiones y "Tips" sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la estadística
Roberto Behar Gutiérrez 213

Modelamiento conjunto de datos longitudinales y tiempo para un evento mediante un modelo de riesgo aditivo-multiplicativo
Luis Guillermo Díaz Monroy 214

Diseños de experimentos con arreglos factoriales. Una visión desde la teoría normal y no normal
Luis Alberto López Pérez 215

Medidas de asociación para variables aleatorias por medio de cópulas
Magda Carolina Guevara Muñoz 217

Importancia de la versión de Lindeberg-Lévy en la enseñanza del Teorema Central del Límite a estudiantes de ingeniería
Jhon Jairo León Salazar 221

Análisis de una red social de Facebook a través de la Teoría de Grafos y de algunas Medidas de Centralidad
Yeimy Andrea Castro Quintero 227

Una visión Booleana del Teorema del Límite Central a partir del concepto de elemento aleatorio
Angie Tatiana Suárez Romero & Luis Eduardo Castillo Méndez 231

Un estudio alternativo para estimar los parámetros de la secante hiperbólica generalizada: máxima verosimilitud modificada
Luis Alejandro Másmela Caita & Alvaro Alexander Burbano Moreno 235

Educación Matemática

¿Qué nos dice la teoría APOE acerca del aprendizaje del Álgebra Lineal?
María Trigueros 242

Aproximación temprana al razonamiento geométrico en Educación Básica
Leonor Camargo 249

Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas
Jorge Enrique Fiallo Leal 269

Dificultades de los estudiantes al plantear la ecuación diferencial que modela un problema de mezclas
Luis Alberto Jaimes Contreras, Rafael Felipe Chaves Escobar 285

La paradoja de Aquiles y la Tortuga: Construcción de procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes
Diana Villabona, Solange Roa Fuentes 288

Teoría de las situaciones didácticas en la comprensión de la derivada como pendiente de la recta tangente con GeoGebra
Ingrid Nathalia Bautista G., José Alberto Rueda R., Jorge Enrique Fiallo L. 294

Estudio de la construcción de pasos de razonamiento en problemas de demostracción de geometría
Jesús David Berrío Valbuena, Martín Acosta Gempeler y Jorge Fiallo Leal 301

Automatización de actos de devolución en actividades de matemática recreativa utilizando el software Cabri LM
Martín Acosta Gempeler, Marisol Rueda Puentes, Ángel Miguel Niño Navas 306

El rol de los estándares para matemáticas en el discurso de profesores de primaria: Una visión sobre el desarrollo del pensamiento algebraico
Janeth Castellanos Rodríguez, Juddy Amparo Valderrama Moreno, Solange Roa Fuentes . 309

Rediseño del discurso matemático escolar desde la creación de talleres: Experiencia de formación docente del Semillero Matemático
Claudia Barajas Arenas, María del Pilar Peralta Acevedo 315

Aprendizajes que pueden emerger en la formación de un profesor de matemáticas que funge como tutor
Islenis Carolina Botello Cubides, Sandra Evely Parada R. 320

Análisis intuitivo de datos: La intuición como recurso didáctico de la estadística en el semillero matemático
Edwin López Velando, Ingrid Yulieth Díaz Ruíz, Claudia Barajas Arenas 325

Diseño de instrumentos para introducir el concepto de sucesión
Graciela Morantes Moncada 330

Exploración de conceptos geométricos con el uso de geogebra en estudiantes de cuarto año de básica primaria
Leonel Manrique Vergara, Luigi Alejandro Lasso Munares 336

Laboratorio de Olimpiadas Matemáticas: Propuesta metodológica enfocada en resolución de problemas
Edwin López Velandia, Tulia Ester Rivera Flórez, Juan de Dios Urbina 341

Habilidad para interpretar enunciados y sus repercusiones en la resolución de problemas
Silvia Johanna Rojas S., Sonia Rocío Suárez C., Sandra Evely Parada R. 347

Construcción de pensamiento numérico en niños y niñas invidentes o con baja visión de grado primero utilizando bloques lógicos fijos
Blanca Elineth Barreiro Yáñez 352

Resolución de Problemas Geométricos: Estrategias heurísticas novedosas para un problema variacional
Ana María Palacios Rojas, Sandra Liceth Solarte Alvear 356

Visualización del espacio 3D utilizando software educativo
Efraín Alberto Hoyos Salcedo 365

De la aritmética discreta, al concepto de variable
Natalia Guzmán Bautista, Jairo Pulido Gómez, Mónica Alarcón R. 369

ANÁLISIS Y ECUACIONES DIFERENCIALES

Plenarias y semiplenarias

The history and the future of the compensated compactness theory

Yun-Guang Lu

K.K.Chen Institute for Advanced Studies, Hangzhou Normal University, Hangzhou, P. R. CHINA,

ylu2005@ustc.edu.cn

Abstract

There are three most important methods to study the global existence of weak solutions for a given nonlinear hyperbolic conservation system:

1. Glimm's scheme method: J. Glimm, Comm. Pure Appl. Math., **18** (1965), 95-105.

2. Compensated Compactness method: T. Tartar, In: Research Notes in Mathematics, Nonlinear Analysis and Mechanics, Heriot-Watt symposium, Vol. **4**, ed. R. J. Knops, Pitman Press, London, 1979.

3. BV estimates coupled with the vanishing viscosity method: S. Bianchini and A. Bressan, Annals of Mathematics, **161**(2005), 223-342.

The global existence result, obtained by the methods (1) and (3), is valid for small BV initial data and for strictly hyperbolic system of arbitrary number equations.

The compensated compactness approach mostly applicable to 2×2 strictly or nonstrictly hyperbolic system with large L^∞ initial data.

Based on the above facts, we naturally ask:

Question 1. Whether it is possible to unify the above three arguments to deal with the nonstrictly hyperbolic systems of arbitrary number equations with large initial data?

Question 2. For a given system of $m+n$ equations, if one might obtain some regularity estimates on m variables (for instance, BV estimates), is it possible to deal with another n ($n=1$ or 2 at this moment) variables by the compensated compactness argument?

For answering these questions, we first introduce what is the Compensated Compactness Theory?

Roughly speaking, this term comes from the following fact:

If a sequence of functions satisfies $$w^\varepsilon(x,t) \rightharpoonup w(x,t) \tag{1}$$

with either $$(w^\varepsilon)^2+(w^\varepsilon)^3 \rightharpoonup w^2+w^3 \text{ or } (w^\varepsilon)^2-(w^\varepsilon)^3 \rightharpoonup w^2-w^3 \tag{2}$$

weakly as ε tends to zero, in general, $w^\varepsilon(x,t)$ is not compact. However, it is clear that any one weak compactness in (2) can compensate for another to make the compactness of w^ε. In fact, if we add them together, we get

$$(w^\varepsilon)^2 \rightharpoonup w^2 \tag{3}$$

weakly as ε tends to zero, which combining with (1) implies the pointwise compactness of w^ε.

The first basic theorem in the Compensated Compactness theory is

Lemma 1 (Div-curl lemma). *Let $\Omega \subset R \times R^+$ be a bounded open set and $v^\varepsilon : \Omega \to R^4$ be measurable functions satisfying*

$$v^\varepsilon \rightharpoonup v, \ \textit{in } (L^2(\Omega))^4 \tag{4}$$

and

$$\frac{\partial v_1^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial v_2^\varepsilon}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_3^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial v_4^\varepsilon}{\partial x} \ \textit{are compact in } H_{loc}^{-1}(\Omega). \tag{5}$$

Then there exists a subsequence (still labelled) $\{v^\varepsilon\}$ such that

$$v_1^\varepsilon v_4^\varepsilon - v_2^\varepsilon v_3^\varepsilon \rightharpoonup v_1 v_4 - v_2 v_3 \ \textit{in the sense of distributions.} \tag{6}$$

Now we see how to apply for the above lemma to the scalar hyperbolic equation

Consider
$$u_t + f(u)_x = 0. \tag{7}$$

We add the viscosity term to the right-hand side of (7)

$$u_t + f(u)_x = \varepsilon u_{xx}. \tag{8}$$

We multiply any smooth function $\eta'(u)$ to (8) to obtain

$$\eta(u)_t + q(u)_x = \varepsilon \eta'(u) u_{xx}, \tag{9}$$

where η is called an entropy of Equ. (7) and $q(u) = \int^u \eta'(s) f'(s) ds$ is the corresponding entropy flux. If we could prove that the right-hand side of (9) is compact in $H_{loc}^{-1}(R \times R^+)$, then for any two different entropy-entropy flux pairs $(\eta_1(u), q_1(u))$ and $(\eta_2(u), q_2(u))$, we have the following weak limit relation

$$\eta_1(u^\varepsilon) q_2(u^\varepsilon) - \eta_2(u^\varepsilon) q_1(u^\varepsilon) \rightharpoonup \overline{\eta_1(u^\varepsilon)} \cdot \overline{q_2(u^\varepsilon)} - \overline{\eta_2(u^\varepsilon)} \cdot \overline{q_1(u^\varepsilon)} \tag{10}$$

in the sense of distributions, where $\overline{w^\varepsilon}$ means the weak limit of w^ε.

Scalar equation. 1. L. Tartar (1979): Kruzhkov infinite entropy-entropy flux pairs

$$\eta(u) = |u-k|, \quad q(u) = (f(u) - f(k)) \cdot sign(u-k). \tag{11}$$

2. Chen and Lu(1988): Two natural entropy-entropy flux pairs

$$\begin{cases} (\eta_1(u), q_1(u)) = (u, f(u)), \\ (\eta_2(u), q_2(u)) = (f(u), \int_0^u (f'(s))^2 ds). \end{cases} \tag{12}$$

We shall also introduce the applications on systems of two equations.

Stationary flow for power-law fluids in domains with unbounded boundaries

Marcelo Martins dos Santos

Universidade Estadual de Campinas, IMECC, Campinas, Brazil, msantos@ime.unicamp.br

Abstract

We shall talk about the stationary model for incompressible fluids with the viscosity μ given by the Ostwald-De Waele law, i.e. $\mu = |D(u)|^{p-2}$, where $|D(u)|$ is the shear rate. We are interested in the existence of a solution for this model in domains with unbounded outlets to infinity. We discuss the Amick's solution of the Leray problem for Newtonian fluids, i.e. $p = 2$, and the modified version of Leray problem due to Ladyzhenskaya and Solonnikov. Then we will focus on the case $p > 2$, the so-called shear thickening fluids, and present a result that generalizes Ladyzhenskaya-Solonikov's theorem - joint work with Gilberlandio J. Dias (UNIFAP-Federal University of Amapá, Brazil).

Our main references for this talk are the following:

References

[1] G.P. Galdi, *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier- Stokes Equations*, Vol. I, II. Springer-Verlag, Berlin, 1994;

[2] O.A. Ladyzhenskaya and V.A. Solonnikov, *Determination of the solutions of boundary value problems for steady-state Stokes and Navier-Stokes equations in domains having an unbounded Dirichlet integral.* J. Soviet Math., 21 (1983) 728-761. (V. "Theorem 3.1" in this paper.);

[3] G.J. Dias and M.M. Santos, *Steady flow for shear thickening fluids with arbitrary fluxes.* J. of Differential Equations, 252(6) (2012) 3873-3898.

Periodic solutions of a nonlinear system of coupled differential equations

José R. Quintero

Universidad del Valle, Cali, Colombia, jose.quintero@correounivalle.edu.co

Research supported by Universidad del Valle (Cali- Colombia) under the project C.I. 7910

Abstract

In this talk we establish the existence of at least one weak k-periodic solutions for the coupled system of differential equations of the form

$$\varphi'' - \alpha\varphi'''' + \beta\left(\psi(\varphi')^p\right)' - c\psi' = 0, \tag{1}$$

$$\gamma\psi - \theta\psi'' + \frac{\beta}{p+1}(\varphi')^{p'+1} - c\varphi' = 0, \tag{2}$$

where $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ are positive and c is small enough. The problem is reduced to finding a minimum for the corresponding action integral over a closed convex subset of the space of $H^1_k(\mathbb{R})$ (k-periodic functions $f \in L^2_k(\mathbb{R})$ such that $f' \in L^2_k(\mathbb{R})$).

1. Introduction

The aim of this talk is to use the direct method of the calculus of variations to prove, for the nonlinear system of coupled differential equations (1)-(2), the existence of a k-periodic solution under the restriction of the positiviness of parameters $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ and the smallness of c. For this particular system of coupled differential equations, it is straightforward to write the action integral associated, and relatively standard to establish that this integral has a minimum (ψ, φ) in the set of k-periodic functions $H^1_k(\mathbb{R}) \times \mathcal{V}_k$.

The results in the paper are inspired in a recent work by H. Brezis and J. Mawhin (see [2]) related with the existence of periodic classical solutions for a differential equation

$$\phi(u') - g(x,u) = h(x)$$

where $\phi : (-a, a) \to \mathbb{R}$ is an increasing homeomorphism, g is a Charatéodory function k-periodic with respect to x, 2π-periodic with respect to u, of mean value zero on $[0, k]$, and $h \in L_{loc}(\mathbb{R})$ is k-periodic and has mean value zero. A special case is the relativistic forced pendulum differential equation

$$\left(\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\right) + A\sin(u) = h(x).$$

The nonlinear system of coupled differential equations considered in this talk is related with the existence of periodic travelling waves for a Boussinesq system which describe the evolution of long water waves with small amplitude under the effect of surface tension (see J. Quintero [1])

2. Minimization Problem

Hereafter we set $L_k = [-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}]$ and define the space $\mathcal{V}_k$ as the closure of the $C_k^\infty(\mathbb{R})$ (periodic C^∞ functions of period k) with respect to the norm given by

$$\|\varphi\|_{\mathcal{V}_k}^2 := \int_{L_k} \left((\varphi')^2 + (\varphi'')^2\right)\, d\xi.$$

We define the functional space as $\mathcal{X}_k := H_k^1(\mathbb{R}) \times \mathcal{V}_k$, where $H_k^1(\mathbb{R})$ is the space of functions k-periodic $\psi \in L_k^2(\mathbb{R})$ such that $\psi' \in L_k^2(\mathbb{R})$. Note that $\mathcal{V}_k$ and $\mathcal{X}_k$ are Hilbert spaces with inner products given respectively by

$$\begin{aligned}(u,v)_{H_k^1(\mathbb{R})} &= (u,v)_{L_k^2(\mathbb{R})} + (u',v')_{L_k^2(\mathbb{R})},\\ (u,v)_{\mathcal{V}_k} &= (u',v')_{H_k^1(\mathbb{R})},\\ (u,v)_{\mathcal{X}_k} &= (u,v)_{H_k^1(\mathbb{R})} + (u,v)_{\mathcal{V}_k}.\end{aligned}$$

In particular,

$$\|(u,v)\|_{\mathcal{X}_k}^2 = \|(u,v)\|_{H_k^1(\mathbb{R})}^2 + \|(u,v)\|_{\mathcal{V}_k}^2.$$

In inequalities below, C denotes a generic constant whose value may change from instance to instance. Hereafter p will denote a rational number with odd numerator and denominator. More concretely, $p = \frac{p_1}{p_2}$ with p_i being odd positive integer and $\gcd(p_1, p_2) = 1$.

We see by a direct computation that weak k-periodic solution of the system (1)-(2) $(\psi, \varphi) \in H_k^1(\mathbb{R}) \times \mathcal{V}_k$ can be characterized as critical points for the functional

$$J_{c,k}(\psi,\varphi) = \int_{L_k} \left\{\gamma\psi^2 + \theta|\psi'|^2 + (\varphi')^2 + \alpha(\varphi'')^2 \ -2c\psi\varphi' + \frac{2\beta}{p+1}\psi\,(\varphi')^{p+1}\right\} d\xi \tag{3}$$

$$= I_k(\psi,\varphi) + G_{1,k}(\psi,\varphi) + G_{2,k}(\psi,\varphi), \tag{4}$$

where functional I_k, $G_{1,k}$ and $G_{2,k}$ are defined as

$$\begin{aligned} I_k(\psi,\varphi) &= \int_{L_k} \left\{\gamma\psi^2 + \theta|\psi'|^2 + (\varphi')^2 + \alpha(\varphi'')^2\right\} d\xi,\\ G_{1,k}(\psi,\varphi) &= -2c\int_{L_k} \psi\varphi'\, d\xi,\\ G_{2,k}(\psi,\varphi) &= \frac{2\beta}{p+1}\int_{L_k} \psi\,(\varphi')^{p+1}\, d\xi.\end{aligned}$$

It is easy to see that the functionals I_k, $G_{1,k}$ and $G_{2,k}$ are smooth maps from $\mathcal{X}_k$ to $\mathbb{R}$. For instance, if $f \in H_k^1$ has mean zero in $[0,k]$, then for $q \geq 1$ we have that

$$|f(\xi)| \leq C(k)\|f'\|_{L_k^2}, \quad \|f\|_{L_k^q} \leq C(k)\|f\|_{H_k^1}.$$

On the other hand, from Cauchy's and Young's inequalities, we get that

$$|G_{1,k}(\psi,\varphi)| \leq |c| \int_{L_k} \left(|\psi|^2 + |\varphi'|^2\right)\, d\xi \leq |c|C(k)\|(\psi,\varphi)\|^2_{\mathfrak{X}_k} \tag{5}$$

$$|G_{2,k}(\psi,\varphi)| \leq \frac{2\beta}{p+2}\left(\int_{L_k} |\psi|^2\, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{L_k} |\varphi'|^{2(p+1)}\, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2\beta}{p+2}\|(\psi,\varphi)\|^{p+2}_{\mathfrak{X}_k}, \tag{6}$$

since $\varphi' \in H^1_k$ has trivially mean zero on $[0,k]$. Now, if we set $\Sigma_k = I_{1,k} + G_{1,k}$, we have from (5) that

$$\int_{L_k} \left\{(\gamma - |c|)\psi^2 + \theta(\psi')^2 + (1-|c|)(\varphi')^2 + \alpha(\varphi'')^2\right\}\, d\xi \leq \Sigma_k(\psi,\varphi)$$

and

$$\int_{L_k} \left\{(\gamma + |c|)\psi^2 + \theta(\psi')^2 + (1+|c|)(\varphi')^2 + \alpha(\varphi'')^2\right\}\, d\xi \geq \Sigma_k(\psi,\varphi)$$

Thus, for $0 < |c| < \text{mín}(1,\gamma)$ there is some positive constant $C_1(c,\gamma) > 1$ such that

$$C_1^{-1}\|(\psi,\varphi)\|^2_{\mathfrak{X}_k} \leq \Sigma_k(\psi,\varphi) \leq C_1\|(\psi,\varphi)\|^2_{\mathfrak{X}_k}, \tag{7}$$

We note that critical points of the functional $J_{c,k}$ satisfy the travelling wave system (1)-(2). Hereafter, we will say that weak solutions for (1)-(2) are critical points of the functional $J_{c,k}$. A direct computation shows that

$$\begin{aligned}\left\langle J'_{c,k}(w), w\right\rangle &= 2I_{1,k}(w) + 2G_{1,k}(w) + (p+2)G_{2,k}(w)\\ &= 2\Sigma_k(w) + (p+2)G_{2,k}(w) \;=\; 2J_{c,k}(w) + pG_2(w).\end{aligned} \tag{8}$$

Thus on any critical point w, we have that

$$J_{c,k}(w) = \left(\frac{p}{p+2}\right)\Sigma_k(w), \tag{9}$$

$$J_{c,k}(w) = -\left(\frac{p}{2}\right)G_{2,k}(w), \tag{10}$$

$$\Sigma_k(w) = -\left(\frac{p+2}{2}\right)G_{2,k}(u,v). \tag{11}$$

We must recall that H^1_k is the space of absolutely continuous functions u which are k-periodic and such that $u' \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$.

For $a > 0$, we consider the weakly closed subset of $\mathfrak{X}_k$

$$\mathfrak{X}_{k,a} = \{(\psi,\varphi) \in \mathfrak{X}_k : |\varphi'(\xi)| \leq a, \quad \text{a. e. } \xi \in \mathbb{R}\}$$

Our goal now is to show the existence of a non trivial critical point for $J_{c,k}$. More exactly,

Theorem 2. *Let $0 < a < a_0$. $J_{c,k}$ has a minimum over $\mathfrak{X}_{k,a}$.*

This result will be a direct consequence of the coerciveness of $J_{c,k}$ and that $J_{c,k}$ is (sequentially) weakly lower semi-continuous on $\mathcal{X}_{k,a}$ for $0 < a < a_0$. To see this, we need to establish the following three results,

Lemma 3. *Assume that the sequence $(\psi_n, \varphi_n)_n \subset \mathcal{X}_k$ converges weakly in $\mathcal{X}_k$ to $(\psi_0, \varphi_0) \in \mathcal{X}_k$. If $(\varphi_n')_n$ converges uniformly to φ_0' on $[0, k]$, we have that*

$$\liminf_{n\to\infty} J_{c,k}(\psi_n, \varphi_n) \geq J_{c,k}(\psi_0, \varphi_0). \tag{12}$$

Lemma 4. *1.- There are positive constants C_1 and C_2 such that for any $\vartheta \in \mathcal{X}_k$, we have that*

$$J_{c,k}(\vartheta) \geq C_1 \|\vartheta\|^2_{\mathcal{X}_k} - C_2 \|\vartheta\|^{p+2}_{\mathcal{X}_k}. \tag{13}$$

2.- There exits $a_0 > 0$ such that for $0 < a < a_0$ the functional $J_{c,k}$ is coercive on $\mathcal{X}_{k,a}$. More exactly, there is $C_3 > 0$ such that for $\vartheta \in \mathcal{X}_{k,a}$,

$$J_{c,k}(\vartheta) \geq C_3 |||\|^2_{\mathcal{X}_k}. \tag{14}$$

Theorem 5 ([3])**.** *Let X be a Hilbert space and let $M \subset X$ be a weakly closed subset of X. Suppose that $E : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is coercive and that is (sequentially) weakly lower semi-continuous on M with respect to X, that is, suppose the following conditions are fulfilled:*

1. *$E(u) \to \infty$ as $u \to \infty$, with $u \in M$.*
2. *For any $u \in M$, any sequence $(u_m)_m$ in M such that $u_m \rightharpoonup u$ (weakly) in X there holds:*

$$E(u) \leq \liminf_{m\to\infty} E(u_m).$$

Then E is bounded below on M and attains its minimum in M.

References

[1] J. R. Quintero. Solitary water waves for a 2D Boussinesq type system, *J. Part. Diff. Eq.*, 23 - 3 (2010), 251-280.

[2] Brezis, H.; Mawhin J. (2010): Periodic solutions of the forced relativistic pendulum. *J. Diff. and Int, equat.* **23**, 801-810

[3] Struwe, M. (1996): Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems. *Springer-Verlag*

Las Ecuaciones de Navier-Stokes en el espacio de Fourier

Jean Carlos Cortissoz Iriarte

Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia. jcortiss@uniandes.edu.co

Resumen

Julio Montero encontró una demostración sencilla usando la transformada de Fourier del siguiente hecho: No existen soluciones autosimilares no triviales singulares para la ecuación de Navier-Stokes con energía cinética finita (es decir en $L^2\left(\mathbb{R}^3\right)$). Este hecho es más débil que el célebre resultado de Nečas, Růžiča y Šverák que muestra la no existencia de dichas soluciones en $L^3\left(\mathbb{R}^3\right)$. Ahora bien, dada una solución autosimilar de la ecuación de Navier-Stokes se puede mostrar que si dicha solución pertenece a $\dot{H}^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{R}^3\right)$ entonces esta debe pertenecer también a $L^2\left(\mathbb{R}^3\right)$, lo cual da una nueva demostración de la no existencia de soluciones autosimilares singulares para la ecuación de Navier-Stokes en el espacio $\dot{H}^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{R}^3\right)$. Esto nos ha llevado a estudiar el problema de "backward uniqueness" para ecuaciones diferenciales parabólicas en términos de ecuaciones integrales en el espacio de Fourier. En esta charla hablaremos de los resultados obtenidos, en particular este nuevo argumento para la no existencia de soluciones autosimilares singulares para la ecuación de Navier-Stokes y algunas ideas relacionadas con el problema de "backward uniqueness", y sobre algunos interrogantes que no hemos podido resolver.

Dos artículos cortos con profundas implicaciones

Alfonso Castro

Department of Mathematics, Harvey Mudd College, USA, alfonso_castro@hmc.edu

Resumen

Hablaremos de la gran utilidad de dos artículo muy cortos. En el artículo $H = W$ se demuestra que dos construcciones de una gran gama de espacios de funciones son equivalentes. Una construcción esta basada en límites de sucesiones de Cauchy y la otra en el concepto de convergencia débil. Daremos ejemplos de la aplicabilidad de la equivalencia de estos dos métodos.

El artículo de Pohozaev esta basado en una simple observación resultado de multiplicar por cantidades adecuadas e integrar por partes las posibles soluciones de una ecuación diferencial parcial. Mostraremos la utilidad de este sencillo argumento para entender la existencia de soluciones radiales a un problem de Dirichlet.

Referencias

A. Castro and A. Kurepa, *Infinitely many solutions to a superlinear Dirichlet problem in a ball*, Proc. Amer. Math. Soc., 101 (1987) 57-64.

Meyer N. and Serrin, J., *H=W,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 51 (1964) 105-1056.

Pohozaev, S. I. *On the eigenfunctions of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$*,* Dokl. Akad. Nauk SSSR 165 (1965) 36-39.

Soluciones con signo para un problema cuasilineal radial con peso

Sigifredo Herrón Osorio

Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, Medellín, Colombia, sherron@unal.edu.co

Resumen

Se estudia el problema

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta_p u + K\left(\|x\|\right) f\left(u\right) = 0, \quad x \in B_1\left(0\right) \\ u = 0, \quad \|x\| = 1, \end{cases}$$

en el contexto radial bajo condiciones adecuadas de superlinealidad sobre la función f y condiciones de regularidad sobre el peso K. Aquí denotamos $||x|| = r$. Involucrando el método de "shooting" y una identidad de tipo Pohozaev para el $p-$Laplaciano, se demuestra la existencia de al menos una solución radial positiva de (1) con derivada radial negativa en $r = 1$ y otra solución radial negativa con derivada radial positiva en $r = 1$.

Un problema de control para fluidos micropolares estacionarios

Exequiel Mallea Zepeda

Universidad Católica del Norte, Antofagasta, Chile, emallea@ucn.cl

Resumen

En esta charla consideramos un problema de control óptimo asociado a las ecuaciones estacionarias de los fluidos micropolares en 3D, con control de borde sobre la velocidad traslacional y la velocidad de microrotación. Específicamente, discutiremos el problema de hallar una velocidad lineal u, una velocidad microrotacional w y controles h_1 y h_2 tales que minimicen el funcional

$$\begin{aligned} J(u,w,h_1,h_2) &= \frac{\beta_1}{2}\|\mathrm{rot\,u}-\mathrm{u_a}\|^2_{\mathrm{L^2(\Omega)}}+\frac{\beta_2}{2}\|\mathrm{u}-\mathrm{u_b}\|^2_{\mathrm{L^2(\Omega)}}+\frac{\beta_3}{2}\|\mathrm{w}-\mathrm{w_d}\|^2_{\mathrm{L^2(\Omega)}} \\ &\quad +\frac{\beta_4}{2}\|h_1\|^2_{L^2(\Gamma_1)}+\frac{\beta_5}{2}\|h_2\|^2_{L^2(\Gamma_2)}, \end{aligned}$$

sujeto a

$$\begin{cases} -\nu_1\Delta u+u\cdot\nabla u = 2\nu_r\mathrm{rot\,w}+\mathrm{f} & \text{en } \mathrm{V}', \\ -\nu_2\Delta w-\nu_3\nabla\mathrm{div\,w}+4\nu_\mathrm{r}\mathrm{w} = 2\nu_r\mathrm{rot\,u}+\mathrm{g} & \text{en } \mathrm{H^{-1}(\Omega)}, \\ u = h_1 & \text{sobre } \Gamma_1, \\ u = u_0 & \text{sobre } \Gamma_2^1 \\ T(u)\cdot n = 0 & \text{sobre } \Gamma_2^2, \\ w = w_0 & \text{sobre } \Gamma_3, \\ w = w_0+h_2 & \text{sobre } \Gamma_4. \end{cases} \tag{1}$$

Aquí, Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^3$ con frontera $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2=\Gamma_3\cup\Gamma_4$ y $\Gamma_2=\Gamma_2^1\cup\Gamma_2^2$. En (1), ν_1, ν_2, ν_3 y ν_r son constantes positivas que representan coeficientes relacionados con las propiedades viscosas del fluido y f y g son fuerzas externas actuando sobre el fluido. El término $T(u)=-pI+\frac{\mu}{2}(\nabla u+(\nabla u)^T)$ y representa el llamado tensor de estrés. El espacio V' es el dual de $V=\{u\in H_0^1(\Omega)\,:\,\mathrm{div\,u}=0\}$, siendo $H_0^1(\Omega)=\{u\in H^1(\Omega)\,:\,u=0 \text{ sobre } \Gamma\}$ y el espacio $H^{-1}(\Omega)$ es el dual del espacio $H_0^1(\Omega)$. En la parte Γ_1 se aplica un control h_1 del tipo Dirichlet para la velocidad lineal del fluido y en la parte Γ_4 se aplica un control h_2 del tipo Dirichlet para la velocidad microrotacional del fluido.

El funcional J representa una medida entre la turbulencia del flujo y un campo lineal dado u_a, lo cual es descrito por el primer sumando, la velocidad traslacional del flujo y una velocidad dada u_b, como se observa en el segundo sumando y la relación entre la velocidad microrotacional del flujo y una velocidad microrotacional deseada w_d, descrito en el tercer sumando. El cuarto y quinto sumando son introducidos con el objetivo de generar un balanceo en el funcional. En la definición de J, los parámetros $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ y β_5 son números reales no negativos, donde al menos uno de ellos es no nulo.

Mostraremos la existencia de solución óptima, ésto es, la existencia de un elemento $(\hat{u}, \hat{w}, \hat{h}_1, \hat{h}_2) \in \mathcal{S}_{ad}$ tal que

$$J(\hat{u}, \hat{w}, \hat{h}_1, \hat{h}_2) = \min_{(u,w,h_1,h_2)\in\mathcal{S}_{ad}} J(u, w, h_1, h_2),$$

donde $\mathcal{S}_{ad}$ es el conjunto de soluciones admisibles para el problema de control óptimo, es decir $\mathcal{S}_{ad} = \{(u, w, h_1, h_2) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma_1) \times H^{1/2}(\Gamma_4) \ : \ J(u, , w, h_1, h_2) < \infty$ y satisface (1)$\}$. Además, aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange obtendremos las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden y derivaremos un sistema de optimalidad.

Referencias

[1] A. V. Fursikov *Optimal Control of distributed Systems. Theory and Applications.* Translations of mathematical monographs, AMS, (2000).

[2] M. Gunzburger, L. Hou & T.P. Svobodny, *Boundary velocity control of incompressible flow with an application to viscous drag reduction.* SIAM J. Control and Optimization, Vol. 30, No 1, (1992), 167-181.

[3] A. Iofee & V. Tikhomirov, *Extremal Problems.* Norht Holland, Amsterdam, (1979).

[4] G. Lukaszewicz, *Micropolar fluids: Theory and Applications.* Birkhauser, (1999).

[5] R. Stavre, *Optimization and numerical approximation for Micropolar fluids.* Numer. Funct. Anal. Optim. Vol. 24, (2003), 223-241.

Ecuaciones de Navier-Stokes con condiciones de Navier

Élder Jesús Villamizar Roa

Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, jvillami@uis.edu.co

Resumen

Esta semiplenaria está direccionada al estudio teórico de las ecuaciones de Navier-Stokes con densidad variable, en un dominio acotado, y asumiendo condiciones de frontera de tipo Navier. Este modelo es dado por el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\begin{cases} \partial_t(\rho u) + \text{div } (\rho u u) - \nu\Delta u + \nabla\pi = \rho f \text{ in } Q, \\ \text{div } u = 0 \text{ en } Q, \\ \partial_t\rho + \text{div } (\rho u) = 0 \text{ en } Q, \end{cases} \tag{1}$$

con condiciones iniciales y de frontera (de tipo Navier) dadas por

$$\begin{cases} u \cdot n = 0 \text{ on } \Sigma, \\ [D(u)n + \alpha u]_{tan} = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ \rho(0) = \rho_0 \text{ en } \Omega, \\ (\rho u)(0) = v_0 \text{ en } \Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Aqui, $Q \equiv \Omega \times (0,T)$, donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^3$ con bordo suave $\partial\Omega$, y $T > 0$. Las incógnitas del sistema son: la velocidad u, la densidad ρ, y la presión del fluido π. El parámetro $\nu > 0$ representa el coeficiente de viscosidad del fluido y f es un campo dado que denota el campo de fuerzas externas actuando en el sistema. Además, $\Sigma \equiv \partial\Omega \times (0,T)$, n es el vector normal, exterior a $\partial\Omega$, $\rho_0 \geq 0$ denota la densidad inicial y v_0 verifica que $v_0(x) = 0$ siempre que $\rho_0(x) = 0$. El tèrmino $D(u) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)_{1\leq i,j\leq n}$ denota el tensor de deformación, $[\cdot]_{tan}$ es la componente tangencial de un vector sobre $\partial\Omega$, y $\rho u u = \rho(u \otimes u)$. La constante $\alpha \geq 0$ denota el coeficiente de fricción el cual mide la tendencia del fluido a deslizarse sobre el bordo.

El objetivo de esta charla es abordar el problema de la existencia de soluciones débiles para el sistema de Navier-Stokes no homogeneo (densidad variable) con condiciones de bordo para la velocidad, de tipo Navier (sistema (1)-(2)), permitiendo además, la presencia de regiones de vacío, reflejadas en la posibilidad de tomar $0 \leq \rho_0$, y asumiendo condiciones muy generales desde el punto de vista de la regularidad de los datos ρ_0, v_0 y f. Se mostrarán las ideas centrales de la prueba de la existencia de soluciones débiles, destacando la combinación de métodos que incluyen argumentos de regularidad parabólica, Métodos de energía, técnicas de punto fijo, y argumentos de compacidad.

Posteriormente discutiremos un resultado que relaciona las soluciones del modelo (1)-(2), con las soluciones del modelo tipo Euler asociado. Más específicamente, mostratemos que las soluciones débiles del sistema (1)-(2), convergen a las soluciones locales fuertes del modelo de Euler (con densidad variable), en la norma L^2, cuando la viscosidad tiende a cero. El modelo de Euler (con densidad variable) es dado por el siguiente sistema de EDPs:

$$\begin{cases} \partial_t(\rho u) + \text{div } (\rho u u) + \nabla \pi = \rho f & \text{in } Q, \\ \text{div } u = 0 & \text{in } Q, \\ \partial_t \rho + \text{div } (\rho u) = 0 & \text{in } Q, \\ u \cdot n = 0 & \text{on } \Sigma, \\ \rho(0) = \rho_0 & \text{in } \Omega, \\ (\rho u)(0) = v_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Los resultados presentados en esta charla hacen parte de los resultados publicados recientemente en [7].

Referencias

[1] S.A. Antontsev and A.V. Kazhikov, *Mathematical study of flows of nonhomogeneous fluids*, Lecture Notes, USSR: Novosibirsk State University (in Russian), 1973.

[2] H. Beirao da Veiga and A. Valli, *Existence of C^∞ solutions of the Euler equations for nonhomogeneous fluids*, Comm. Partial Differential Equations, 5 (1980), pp. 95–107.

[3] O. Ladyzhenskaya and V. Solonnikov, *The unique solvability of an initial-boundary value problem for viscous incompressible inhomogeneous fluids*, Journal of Soviet Mathematics, 9 (1978), pp. 697–749.

[4] P.L. Lions, *Mathematical topics in fluid mechanics. Incompressible Models*, Vol. 1, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications 10, 1996.

[5] C.L.M.H. Navier, *Sur les lois de l'équilibrie et du mouvement des corps élastiques*, Mem. Acad. R. Sci. Inst. France, 369 (1827).

[6] J. Simon, *Nonhomogeneous viscous incompressible fluids: existence of velocity, density, and pressure*, SIAM J. Math. Anal., 21 (1990), pp. 1093–1117.

[7] E.J. Villamizar-Roa, L.C.F. Ferreira, G. Planas, *On the nonhomogeneous Navier-Stokes system with Navier friction boundary conditions*, SIAM J. Math. Anal., 45, (2013), pp. 2576-2595.

ANÁLISIS Y ECUACIONES DIFERENCIALES

Ponencias

Sobre soluciones exactas de ecuaciones diferenciales parciales

Rosalba Mendoza Suarez* y Juan Carlos López C.**

*Universidad de Pamplona, Pamplona, Colombia, rosalbame@unipamplona.edu.co

**Universidad de Pamplona, Pamplona, Colombia, jclopez@unipamplona.edu.co

Resumen

Gómez y Salas en [6] utilizando el método proyectivo de las ecuaciones de Riccati obtienen soluciones en forma de onda viajera de una ecuación de onda. Gómez en [2] utiliza el "método generalizado de la tangente hiperbólica" para encontrar soluciones exactas del sistema Mikhailov-Novikov-Wang, (MNW). En esta nota mostramos que las ecuaciones consideradas en [6], [2] se pueden resolver de manera elemental. Gómez en [3] utiliza el método extendido de la tangente hiperbólica para encontrar soluciones exactas del sistema (MNW), y afirma haber encontrado nuevas soluciones, mostramos que esa afirmación es falsa, pues las soluciones encontrada por el autor en [3] son sencillamente formas diferentes de las encontradas en [2].

1. Introducción

Las soluciones exactas de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, juegan un papel importante en las ciencias físicas, ya que estas ecuaciones describen varios fenómenos naturales tales como vibraciones, solitones, propagación de ondas, etc. Así estas soluciones nos pueden dar un mejor entendimiento de los aspectos físicos del problema.

En años recientes, con el desarrollo de los sistemas algebraícos de computador, se han implementado varios métodos para hallar soluciones de onda viajera, tales como el método de la tangente hiperbólica, el método de la exponencial, el método extendido de la tangente hiperbólica, el método proyectivo de la ecuación de Riccati, etc. En general, para la búsqueda de soluciones de onda solitaria se reduce la ecuación de evolución, que es una ecuación diferencial parcial no lineal, a una ecuación diferencial ordinaria y entonces se usan las ideas fundamentales de la teoria geométrica de estas.

Una gran cantidad de artículos de investigación sobre esta témática, se ha venido publicando en los últimos años en prestigiosas revistas de carácter tanto nacional como internacional.

2. Algunos resultados

En la charla se mostrará que las ecuaciones que se resuelven en Gómez [6], Gómez [2] y Gomez [3] se pueden resolver por métodos elementales y que las soluciones encontradas en los anteriores

artículos se pueden obtener como casos particulares de la solución general que se halla al resolver la respectiva ecuación. Con lo anterior, se quiere evidenciar lo que sucede cuando se hace uso de paquetes de cálculo simbólico si llevar a cabo un análisis cuidadoso de los resultados obtenidos.

Referencias

[1] Gomez C.A. & Salas A., *Exact solutions for the generalized shallow water wave equation by the general projective Riccati equations method*, Boletín de Matemáticas, Volumen XIII N°1 (2006), 50-56.

[2] Gomez C.A., *Exact solutions for a new fifth-order integrable system*, Revista Colombiana de Matemáticas, Volumen 40 (2006), 119-125.

[3] Gomez C.A., *A new travelling wave solution of the Mikhailov-Novikov-Wang system using the extended tanh method*, Boletín de Matemáticas, Volumen XIV N°1 (2007), 38-43.

Sobre conjuntos realización de sucesiones

Edilberto José Reyes* y Jorge Andrés Rojas**

*Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, ereyes@uis.edu.co

**Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, joan_rogo@hotmail.com

Resumen

Dada una sucesión real (x_n) con $x_n \neq 0$ para todo n, estudiamos el conjunto de todas las sumas de la forma $\sum_{i\in I} x_i$ con $I \subseteq \mathbb{Z}^+$. Se define a este conjunto como el conjunto realización de (x_n), denotado como $AS(x_n)$. Por ejemplo, $AS(1/2^n) = [0, 1]$ y $AS(2/3^n)$ es el conjunto del tercio medio de Cantor. Hacemos una exploración de las propiedades descritas por R.Jones [2] que explican la razón por la cual las sucesiones mencionadas anteriormente tienen conjuntos realización tan diferentes. Explicamos una condición suficiente para que una sucesión tenga como conjunto realización un intervalo, y otra condición suficiente para que el conjunto realización sea un conjunto de Cantor. Además examinamos que conjuntos pueden ser realizables, y damos algunos resultados en la topología de los conjuntos realización.

1. Introducción

Desde los comienzos de la civilización, la humanidad ha estado fascinada por los números, probablemente por el hecho de que el concepto de número está intrínsecamente relacionado con el ejercicio de contar y comparar conjuntos. Los Babilonios, Egipcios, Romanos e Indios son ejemplos de sociedades que son reconocidas actualmente por haber hecho esfuerzos notables con los números que hoy día se llaman números naturales.

Este esfuerzo llevó a estas sociedades a tener un sistema que les permitiera representar estos números de forma simbólica. Aunque el sistema de representación de números dominante actualmente es el sistema de base decimal, desarrollado primariamente por los Indios, esto no quiere decir que se haya ignorado el estudio de otros sistemas de representación.

Un ejemplo de esto son los sistemas de base doce y base dos, el primero defendido por algunos bajo la idea de que, debido a su alta divisibilidad (doce tiene más divisores positivos que diez) se simplifica el calculo de fracciones; el último porque es usado ampliamente en informática y electrónica.

Es plausible afirmar que uno de los motivos por los cuales los matemáticos no han perdido ese gusto por los números, es por el hecho de que, a pesar de toda la información que se sabe acerca de ellos, aún existen algunos de ellos con propiedades aún sin demostrar (la racionalidad o irracionalidad de $\gamma = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right]$ de Euler, por ejemplo), lo que ha valido el esfuerzo y tesón de muchas personas sobresalientes a lo largo de la historia para intuir, conjeturar, enunciar y demostrar dichas propiedades.
Una de las áreas de estudio en Matemáticas que aún se desarrolla y en la que se han obtenido

resultados muy importantes es la teoría general de sucesiones y series.
La teoría general de sucesiones y series infinitas probablemente nace con los problemas planteados hace unos 2400 años, por el filósofo griego Zenón de Elea (495-435 a. de C.) quien propuso el problema conocido actualmente como *la paradoja del corredor o paradoja de Aquiles y la tortuga* (ver [1]) la cual se dice que generó una crisis en la matemática antigua, ya que esta afirma (en términos modernos) que:

> Un número ilimitado de cantidades positivas no puede tener una suma finita.

La afirmación de Zenón en la paradoja del corredor fue resuelta alrededor de 2000 años más tarde con la creación de la teoría de las series infinitas. Los matemáticos vieron posible extender la idea de suma usual de conjuntos finitos de números a conjuntos infinitos, con el objetivo de que la "suma" de un conjunto de infinitos números sea finita. Entre los primeros matemáticos que estudiaron las series se encuentra en un lugar destacado a Leonard Euler(1707–1783) pues notó que las series son un concepto unificador de diversas ramas de la Matemática, como por ejemplo, el análisis matemático y la teoría de números, que no estaban relacionadas en su época.

Un avance significativo se dio cuando Carl Friedrich Gauss(1777–1855) hizo un estudio riguroso de la convergencia de algunas series infinitas. Como complemento al trabajo de Gauss, Augustin Louis Cauchy(1789–1857) introdujo una definición analítica del concepto de límite y expuso los fundamentos de la teoría moderna de convergencia y divergencia.

La teoría general de series infinitas hace una distinción entre las series cuyas sumas parciales tienden a un límite finito y las series cuyas sumas parciales no tienen límite finito. El orden de los términos en una suma finita puede alterarse sin que por ello quede afectado el valor de la suma. En 1833 Cauchy demostró que eso no es siempre cierto para las series. Este hecho puede ocurrir solamente si la serie dada es condicionalmente convergente. Es decir, la reordenación de una serie absolutamente convergente no altera su suma.
En 1854 Bernhard Riemann(1826–1866) demuestra un resultado sorprendente sobre reordenación de series

Teorema 1 (de Reordenación de Riemann)**.** *Sea $\sum a_n$ una serie condicionalmente convergente de números reales, y sea S un número real. Existe una reordenación $\sum b_n$ de $\sum a_n$ que converge a S.*

El cual es el punto de partida para el estudio de los conjuntos realización, pues en vez de reordenar términos, se permiten hacer omisiones de éstos, lo que es una oportunidad para explorar nuevas propiedades acerca de conjuntos de números y se generan nuevas preguntas e interesantes respuestas. Es así como inicia el trabajo con los conjuntos realización.
Nos proponemos explorar el trabajo hecho por Jones (ver [2]) con una breve explicación de diversos ejemplos de conjuntos realización, de las propiedades que garantizan que un conjunto realización es un intervalo, de qué propiedades necesita una sucesión para tener un conjunto de Cantor como su conjunto realización, convencer al público de que los conjuntos realización o tienen interior denso o tienen interior vacío y por último se hacen unos comentarios acerca de la existencia de sucesiones reales que sean el conjunto realización de algunos subconjuntos conocidos de $\mathbb{R}$, como

por ejemplo, $\mathbb{Q}$.

2. Algunos resultados

Se quiere socializar por parte de los autores algunos resultados que garantizan que el conjunto realización de una sucesión sea o conexo o totalmente disconexo y que hacen parte de [2]. Más específicamente:

1. Sea $(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ una sucesión real convergente a cero. Si para todo $k \geq 1$

$$|x_k| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n|. \tag{1}$$

   Entonces $AS(x_n)$ es un intervalo. Más aún, si $|x_k| \geq |x_{k+1}|$ para todo $k \geq 1$ entonces $AS(x_n)$ es un intervalo si y sólo si (1) se cumple.

2. Sea (x_n) una sucesión real, y suponga que para cada $k \geq 1$,

$$|x_k| > \sum_{i=k+1}^{\infty} |x_i|$$

   Entonces $AS(x_n)$ es un conjunto central de Cantor.

Referencias

[1] Apostol T., *Calculus. Volumen I*, Segunda edición, Editorial Reverte, Barcelona España, 1988, 457–460.

[2] Jones R., *Achievement Sets of Sequences*, Amer. Math. Monthly 118 (2011), 509–521.

Atractores extraños y sus aplicaciones a sistemas dinámicos

Robayo M. Jaime*, Hortúa O. Hector** y Florian M. Andrea***

*Fundación Universitaria Los Libertadores, Bogotá, Colombia, jarobayom@libertadores.edu.co

**Fundación Universitaria Los Libertadores, Bogotá, Colombia, hjhortuao@libertadores.edu.co

***Fundación Universitaria Los Libertadores, Bogotá, Colombia, ansteflo91@hotmail.com

Proyecto desarrollado por el grupo GIMA.

Resumen

En este trabajo se estudian algunos atractores como Lorenz, Lotka-Volterra y Rössler, para cada uno de ellos, se estudia la evolución temporal, sus diagramas de bifurcaciones y cómo evolucionan respecto al cambio de los parámetros del sistema. Por último, se da a conocer algunas aplicaciones que tienen estos atractores en fenómenos físicos y su importancia en el estudio de la estabilidad de soluciones de ecuaciones no lineales.

1. Introducción

En el proyecto se encontraron, a través de procesos analíticos, los puntos de estabilidad de los sistemas dinámicos de Lorenz, Lotka-Volterra y Rössler. Adicionalmente, dando valores de constantes a cada uno de los parámetros, se compara (a través de simulaciones) el comportamiento del sistema al realizar cambios en las condiciones iniciales.

Para determinar estos cambios y variaciones, se estudia la evolución temporal de cada una de las funciones componentes, los diagramas de fase asociados a cada par de funciones, y el comportamiento del sistema dinámico en general.

Una vez se logra evidenciar el comportamiento caótico de los sistemas dinámicos anteriores, se procedió a estudiar el cambio que sufre los sistemas dinámicos, al realizar variaciones en los parámetros que componen cada uno de los sistemas. Este proceso se realizó por medio de diagramas de bifurcación para cada parámetro y, con base a los diagramas anteriores, se determina el valor éstos deben tener para reducir el *caos* que presenta el sistema.

2. Algunos resultados

En este caso, para ilustrar algunos resultado obtenidos, consideremos el atractor de Rössler. Este sistema dinámico se expresa a través de las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x} = -y - z, \qquad \dot{y} = x + ay, \qquad \dot{z} = b + z(x - c)$$

Para su estudio se consideró la condición inicial $X^*(0) = (1, 1, 1)$ y se han tomado como valores de los parámetros $a = 0{,}2 = b$ y $c = 5$ (azul) y $a = 0{,}2, b = 0{,}21$ y $c = 5$ (rojo). Con éstos, se ha simulado las soluciones del sistema dinámico realizando una variación en t en el intervalo $[0, 10000]$. En las siguientes gráficas se ilustran los diagramas de fase del cruce de las funciones xz y yz:

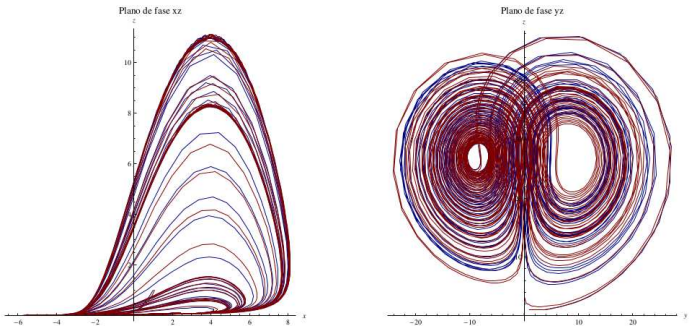


Figura 1. Diagramas de fase de la soluciones en xz y yz.

Al realizar el modelado de este sistema dinámico resulta interesante estudiar los cambio que pueda tener éste si se realizan cambios en los parámetros. En este aspecto se construyó el mapa de bifurcaciones del atractor. Este proceso consiste en solucionar la ecuación diferencial a través de procesos iterativos basados en la variación de un parámetro dejando fijo los otros. En cada una de las iteraciones se procede a registrar los valores máximos que posee una variable (fija).

Con este proceso se pretende estudiar la variación que posee la variable en cuestión, bajo la variación de un parámetro determinado. Esto permite entender de qué manera el parámetro afecta el desarrollo temporal de las funciones soluciones del sistema dinámico.

Para el atractor de Rössler se han variado los parámetros b y c y se ha registrado los cambios para las funciones x, y, z. Los diagramas de bifurcación son los siguientes:

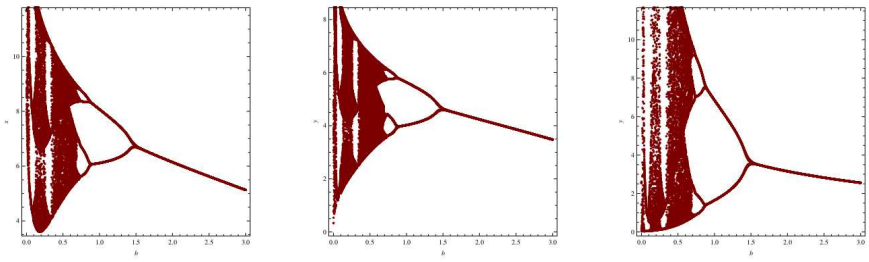


Figura 2. Mapas de bifurcación del parámetro b con relación a las funciones x, y, z.

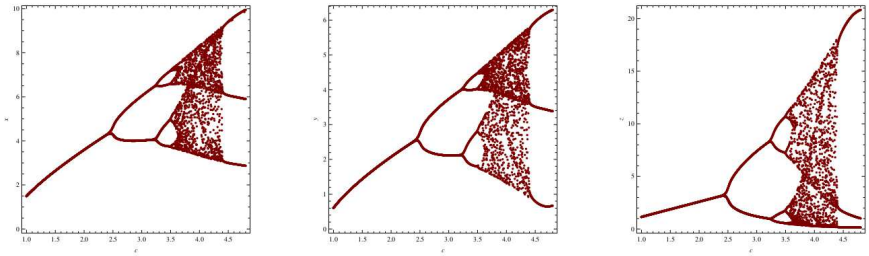
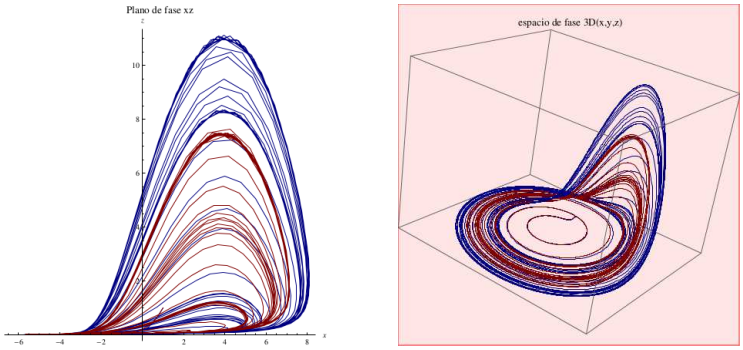


Figura 3. Mapas de bifurcación del parámetro c con relación a las funciones x, y, z.

Se evidencia en las gráficas que una mayor densidad de puntos para valores de $b \in [0,0{,}5]$ y para valores de c cercanos a 4. Esto evidencia que en dichos puntos se tiene una gran cantidad de puntos máximos y mínimos. Se espera entonces que los diagramas temporales se vean saturados y curva sea más *densa*: para evidencia lo anterior se variaron los valores de los parámetros dando los siguientes valores: $a = 0{,}2$, $b = 2{,}1$ y $c = 4{,}9$. Con ellos se estudió el sistema y se obtuvieron los siguientes resultados:



En los gráficos anteriores se presentan el diagramada de fases en el plano zy y el diagrama en la tres dimensiones. Se puede evidenciar que, en efecto, la variación de los diagramas temporales es menor (es decir, tienen comportamientos más homogéneos), la variación en los diagramas de fase se reduce por esta razón, aún así, el atractor continua siendo un invariante.

Referencias

[1] Aguirregabiria J., Ecuaciones diferenciales ordinarias para estudiantes de física, Argiltapen Zerbitzua, 2000.

[2] Boari S., Simulaciones numéricas de atractores extraños, Dinámica No Lineal, Departamento de Física FCEyN, UBA, 2011.

[3] Caraballo T., Kloeden P., Langa J., Atractores globales para sistemas diferenciales no autónomos.

[4] Costello J., Synchronization of Chaos in a Generalized Lotka-Volterra Attractor, The Nonlinear Journal 1, (1999), 11-17.

[5] Ivancevi T., Bottema M., Jain L., A Theorical Model of Chaotic Attractor in Tumor Growth and Metastasis, 2008. arXiv: 0807.4272v1

[6] López Cruz J.M., Blé González G., Modelo Depredador-PresaModelo depredador-presa, Revista de Ciencias Básicas UJAT 7 (2008), no. 2.

Expansiones asintóticas de ecuaciones elípticas en medios de alto contraste

Juan Galvis y Leonardo Andrés Poveda

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia, leapovedacu@unal.edu.co

Resumen

En este escrito mostramos como derivar expansiones asintóticas de problemas elípticos. También veremos que este ejercicio es una buena manera de entender y practicar el concepto de soluciones débiles de ecuaciones diferenciales parciales elípticas. En particular, el entendimiento de diferenciar la imposición de condiciones de frontera naturales y esenciales se convierte en una herramienta importante con el objetivo de calcular los términos de la expansión.

Consideramos el caso de ecuaciones elípticas de alto contraste, en primer lugar, presentamos el caso de sólo inclusiones de alto-contraste. Con el fin de simplificar la presentación sólo presentamos en detalle el caso uni-dimensional.

1. Introducción

El análisis matemático y el análisis numérico de ecuaciones diferenciales parciales en medios multiescala y de alto contraste son importantes en las aplicaciones practicas. De hecho, en muchas aplicaciones relacionadas a flujo de fluidos en medios porosos se pueden tener subregiones o subdominios que contienen propiedades (como la permeabilidad) que tienen un alto contraste en los valores. Un objetivo fundamental es tratar de entender los efectos en la solución relacionados con las variaciones de alto contraste en las propiedades del medio poroso. En términos del modelo, estas altas variaciones se encuentran ligadas a los coeficientes de las ecuaciones diferenciales. En particular, este interés da una importancia para el cálculo de soluciones numéricamente [1, 2].

En este trabajo consideramos las soluciones de los problemas elípticos con coeficientes de alto contraste en dominios de una dimensión. En particular, tomamos el problema

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))' = f(x), \text{ for all } x \in (-1,1), \\ u(-1) = u(1) = 0, \end{cases} \quad \text{con} \quad a(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x < -\delta \\ \eta, & -\delta \le x < \delta \text{ o } \delta \le x \le 1. \end{cases} \tag{1}$$

Aquí asumimos $\eta >> 1$. Observe que imponemos la condición de Dirichlet homogénea $u(x) = 0$ en $x \in \{-1, 1\}$. Se muestra que en este caso la solución se puede expresar como $u_\eta = u_0 + \frac{1}{\eta}u_1 + \frac{1}{\eta^2}u_2 + \dots$. Esta expansión es introducida en [3] donde los autores muestran como obtener todas las funciones u_i, $i = 0, 1, \dots$. Observamos que en el caso particular de (1), debido a la simetría del dominio y la posición de la inclusión de contraste alto, esta serie se reduce a una expresión de la forma $u_\eta = u_0 + f(\eta)u_1$.

2. Descripción de algunos resultados relacionados a la expansión asintótica

Se muestra como obtener expansiones asintóticas en términos de η. También se observa que obtener las expansiones asintóticas puede ser una herramienta importante en el entendimiento del concepto de formulación débil y solución débil de algunos problemas elípticos. La expansión se obtiene siguiendo el procedimiento explicado a continuación (vea [3, 5]).

Se escribe la forma débil del problema (1) con el procedimiento usual. Para tales condiciones, se tienen los espacios usuales de soluciones y funciones prueba, tomando el subespacio $H^1(-1,1)$. Con $v \in H_0^1(-1,1)$ una función prueba y $u \in H^1(-1,1)$ la solución buscada. Se tiene la forma débil de (1). Se divide la integral en las subregiones definidas por el coeficiente de conductividad de alto-contraste $a = a(x)$ y obtenemos

$$\int_{-1}^{-\delta} u'v' + \eta \int_{-\delta}^{\delta} u'v' + \int_{\delta}^{1} u'v' \quad = \quad \int_{-1}^{1} fv, \quad \text{para toda } v \in H_0^1(-1,1). \tag{2}$$

La existencia y unicidad de la solución se garantizada por Lax-Milgram en [4]. Escribimos una expansión de la forma $u_\eta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^{-k} u_k(x)$ con términos individuales en $H^1(-1,1)$ tal que satisfacen la condición de Dirichlet $u_k(-1) = u_k(1) = 0$ for $k \geq 1$. Otras condiciones de frontera para (1) pueden ser tratadas de manera parecida. Cada término se resuelve débilmente un problema con condición de frontera específica en las subregiones $(-1,-\delta)$, $(-\delta,\delta)$ y $(\delta,1)$. Cada valor de la frontera se garantiza por la formulación débil local correspondiente que se obtiene de la serie de potencias. Al sustituir esta serie en (2) se logra

$$\sum_{k=0}^{\infty} \eta^{-k} \left[\int_{-1}^{-\delta} u_k'v' + \int_{\delta}^{1} u_k'v' + \int_{-\delta}^{\delta} u_{k+1}'v' \right] + \eta \int_{-\delta}^{\delta} u_0'v' = \int_{-1}^{1} fv, \quad \text{con } v \in H_0^1(-1,1). \tag{3}$$

Se igualan los coeficientes de las potencias de η en (3). Para $k = 1$ solo un término contiene η, se concluye de la ecuación resultante que u_0 constante en el intervalo $(-\delta,\delta)$. Para $k = 0$ se obtiene

$$\int_{-1}^{-\delta} u_0'v' + \int_{-\delta}^{\delta} u_1'v' + \int_{\delta}^{1} u_0'v' = \int_{-1}^{1} fv, \quad \text{for all } v \in H_0^1(-1,1). \tag{4}$$

Para estudiar este problema introducimos la siguiente descomposición para la función $v \in H_0^1(-1,1)$. Para algún $v \in H_0^1(-1,1)$ escribimos $v = c\chi + v^{(1)} + v^{(2)}$ donde $v^{(1)} \in H_0^1(-1,-\delta)$, $v^{(2)} \in H_0^1(\delta,1)$ y χ es una función continua definida por $\chi(x) = 1$ para $x \in (-\delta,\delta)$, $\chi(x) = 0$, para $x = -1$ y $x = 1$ y $\chi(x)$ como siendo *harmonica* (lineal) en los otros valores de x.

Asumimos una descomposición similar para $u_0 = d\chi + u^{(1)} + u^{(2)}$. Ahora sea $v = \chi \in (-1,1)$ y usando el la expresión para $(u_0 = d\chi + u^{(1)} + u^{(2)})$ se obtiene el valor de $d = \frac{\int_{-1}^{1} f\chi}{\int_{-1}^{-\delta} (\chi')^2 + \int_{\delta}^{1} (\chi')^2}$. De la misma forma asumimos $v = v^{(1)}, v^{(2)}$ en $(-1,-\delta)$ y $(\delta,1)$, respectivamente. Así obtenemos dos problemas de Dirichlet para $u^{(1)}$ y $u^{(2)}$ en su forma fuerte con condiciones de frontera respectivas

$$\begin{cases} -(u^{(1)})'' = f \\ u^{(1)}(-1) = 0,\ u^{(1)}(-\delta) = 0, \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} -(u^{(2)})'' = f \\ u^{(2)}(\delta) = 0,\ u^{(2)}(1) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Con estas condiciones regresamos a (4) y reescribiendo la ecuación como un problema de Neumann asociado a la función u_1 en la forma fuerte

$$\begin{cases} -(u_1)'' = f \\ u_1'(-\delta^+) = u_0'(-\delta^-),\ u_1'(\delta^-) = u_0'(\delta^+). \end{cases} \tag{6}$$

La condición de compatibilidad se satisface y por tanto el problema (6) tiene solución (ver [3, 5]). Así, la función $u_1 = \tilde{u_1} + c_1$, con c_1 una constante de integración que no puede ser determinada en esta parte. Adicionalmente, se tiene que $\tilde{u_1}$ tiene media nula, es decir $\int_{-1}^{1} \tilde{u_1} = 0$.

Ahora, para $k = 1$ en (3) y para toda $v \in H_0^1(-1, 1)$, nuevamente se restringe a funciones de prueba v en $(-1, -\delta)$ y separadamente en $(\delta, 1)$ para obtener dos problemas de Dirichlet asociados a u_1. Estos son,

$$\begin{cases} -u_1'' = 0 \quad \text{en } (-1, -\delta), \\ u_1(-1) = 0,\ u_1(-\delta) = u_1(-\delta^+), \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} -u_1'' = 0 \quad \text{en } (\delta, 1), \\ u_1(\delta) = u_1(\delta^-),\ u_1(1) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Observe que los valores $u_1(-\delta^+)$ y $u_1(\delta^-)$ son obtenidos de (6). Este procedimiento queda definido una vez se calcula el valor de c_1 que da la compatibilidad del problema de Neumann correspondiente a u_2.

Al regresar a (3) con $k = 1$ y por (7) obtenemos una solución débil al problema de Neumann asociado a la función u_2 en el intervalo $(-\delta, \delta)$. Nuevamente, para determinar los partes restantes de u_2 en los intervalos $(-1, -\delta)$ y $(\delta, 1)$ respectivamente, se requiere los coeficientes de (3) con $k = 2$, para toda $v \in H_0^1(-1, 1)$. Con v restricta a $(-1, -\delta)$ y $(\delta, 1)$ se pueden determinar los problemas de Dirichlet asociados a u_2 en los intervalos $(-1, -\delta)$ y $(\delta, 1)$, respectivamente. Así u_2 es de la forma $\tilde{u_2} + c_2$, con c_2 constante que dará la condición de compatibilidad para el siguiente problema de Neumann que determina u_3 en $(-\delta, \delta)$. Igualmente se tiene la condición $\int_{-1}^{1} \tilde{u}_2 = 0$.

Finalmente, en forma secuencial se pueden calcular los términos siguientes en la serie de potencias con un proceso similar al anterior (resolviendo alternativamente problemas de Neumann y Dirichlet).

3. Ejemplo

Se da un ejemplo con formulación fuerte como sigue

$$\begin{cases} (a(x)\, u'(x))' = 0 \\ u(-2) = 0,\ u(2) = 4, \end{cases} \quad \text{con} \quad a(x) = \begin{cases} 1,\ -2 \le x < -1 \\ \eta,\ -1 \le x < 1 \\ 1,\ 1 \le x \le 2. \end{cases} \tag{8}$$

Calculamos cada término de la serie, empezando por u_0 y sus condiciones asociadas en cada parte del intervalo, se obtiene los datos de Dirichlet y Neumann necesarios para el cálculo sucesivo de las

u_i con $i \geq 1$. La serie esta dada por

$$u(x) = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} 2(x+2) \\ 2 \\ 2x \end{array} \right\}}_{u_0} + \frac{1}{\eta} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} -2(x+2) \\ 2x \\ -(2x-4) \end{array} \right\}}_{u_1} + \frac{1}{\eta^2} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} 2(x+2) \\ -2x \\ (2x-4) \end{array} \right\}}_{u_2} + \cdots, \tag{9}$$

cuya suma corresponde a la solución exacta dada por $u(x) = u_0 + \frac{\eta}{1+\eta} u_1$. Note que $u_1 = -u_2 = u_3 = \ldots$. La solución exacta puede ser calculada directamente como $u(x) = c \int_{-2}^{x} \frac{1}{a(t)} dt$, donde c es una constante de integración que es determinada mediante la condición $u(2) = c(2 + \frac{2}{\eta}) = 2(1 + \frac{1}{\eta}) = 4$ y resulta $c = \frac{2\eta}{1+\eta}$. Así, calculando la integral tenemos que

$$u(x) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2\eta}{1+\eta}(x+2), \; x \in [-2,-1) \\ \frac{2\eta}{1+\eta}\left[1 + \frac{1}{\eta}(x+1)\right], \; x \in [-1,1) \\ \frac{2\eta}{1+\eta}\left[1 + \frac{2}{\eta} + (x-1)\right], \; x \in [1,2], \end{array} \right. \tag{10}$$

que coincide con la suma de la seria arriba.

Por último citamos [3, 5] para el caso 2-dimensional, al cual se le aplican los procedimientos anteriores. Vea [3] para casos mas generales de la distribución de las inclusiones de alto y bajo contraste. Para una realización numérica en el caso 2-dimensional usando *elementos finitos* vea [5].

Referencias

[1] Babuska I., & Lipton R., *Optimal Local approximation spaces for generalized finite element methods with application to multiscale problems*, submitted.

[2] Berlyand L., Gorb Y., & Novikov A., *Discrete network approximation for highly-packed composites with irregular geometry in three dimensions*, Multiscale methods in science and engineering, 21-57, Lect. Notes Comput. Sci. Eng., 44, Springer, Berlin, (2005).

[3] Calo V., Efendiev Y., & Galvis, J., *Asymptotic expansions for high-contrast elliptic equations*, Math. Models Methods Appl. Sci. DOI: 10.1142/S0218202513500565

[4] Brezis H., *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer (2010).

[5] Galvis, J., & Poveda, L., *On the derivation asymptotic expansions for high-contrast elliptic equations*, In preparation, 2013.

Convergencia débil de medidas radonianas con valores en retículos de Banach separables

Liliana Posada Vera* y Guillermo Restrepo Sierra**

*Universidad del Valle, Cali, Colombia, lilianapos@yahoo.com.mx

**Universidad del Valle, Cali, Colombia, guireste@yahoo.com

Resumen

Si X es un espacio topológico, sea $bor(X)$ la σ-álgebra de los conjuntos borelianos de X. Sean S y T espacios topológicos. Sean μ y ν medidas radonianas definidas en los conjuntos borelianos de S y T que toma valores en espacios de Banach separables X y Y. Hemos definido en [10] una medida radoniana única λ en los conjuntos borelianos de $S \times T$ tal que $\lambda(A \times B) = \mu(A) \otimes \nu(B)$. Esta medida se llama el producto tensorial de las medidas μ y ν. Mostraremos que si X y Y son espacios de Banach separables y S y T espacios métricos, entonces la función $(\mu, \nu) \to \mu \otimes \nu$ definida en el producto $\mathcal{M}_{rad}(S, X) \times \mathcal{M}_{rad}(T, Y)$ y que toma sus valores en el espacio $\mathcal{M}_{rad}(S \times T, X \widehat{\otimes}_\epsilon Y)$ es continua, considerando en los espacios de las medidas de Radón la topología de la convergencia débil o topología apretada inducida por la dualidad natural entre los espacios de las funciones reales continuas y acotadas y el espacio de las medidas de Radón.

1. Introducción

Sea (T, τ) un espacio topológico hausdorfiano. Denotaremos por $ab(T)$ a la colección de los conjuntos τ abiertos. La σ-álgebra generada por la colección de los conjuntos abiertos llamada σ-álgebra de los conjuntos borelianos de T se denotará por $bor(T)$. Una *medida boreliana* es cualquier función σ-aditiva definida en la σ-álgebra $bor(T)$ de los conjuntos borelianos con valores en $[0, \infty]$. Una *medida radoniana* (medida de Radón) es una medida boreliana en T que satisface las siguientes condiciones:

rad 1) La medida de cualquier abierto es el extremo superior de las medidas de los subconjuntos compactos contenidos en él. Es decir si $G \in ab(T)$, entonces

$$\mu(G) = \sup\{\mu(K) : G \supseteq K \text{ compacto}\}$$

(Propiedad de la regularidad interior).

rad 2) La medida de cualquier conjunto boreliano es el extremo inferior de las medidas de los abiertos que lo contienen. Es decir, si $B \in bor(T)$, entonces

$$\mu(B) = \text{ínf}\{\mu(G) : B \subseteq G \text{ abierto}\}$$

(Propiedad de la regularidad exterior).

rad 3) μ es localmente finita. Es decir, todo $t \in T$ posee una vecindad V tal que $\mu(V) < \infty$.

La propiedad (rad 3) implica que la medida de todo conjunto compacto es finita. La propiedad de regularidad interior es válida para todo boreliano de medida finita. Es decir, si $B \in bor(T)$ y $\mu(B) < \infty$, entonces $\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq B, \ \ K \text{ compacto}\}$. La definición de medida radoniana que hemos adoptado es la definición R_2 en [12], página 13.

Asumimos la teoría de las funciones σ-aditivas con valores en espacios de Banach desarrollada por Diestel y Uhl en [3]. Si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra y X es un espacio de Banach, una función $\mu : \mathcal{A} \to X$ es *σ-aditiva* si para toda familia disjunta $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{A}$ se cumple

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

La *variación* de μ en el conjunto $A \in \mathcal{A}$ es el número

$$|\mu|(A) = \sup_{\{A_k\}} \left(\sum_{k=1}^{n} \|\mu(A_k)\|\right),$$

donde el supremum se toma sobre el conjunto de todas las particiones finitas $\{A_k : 1 \leq k \leq n\}$ de A por subconjuntos A_k que pertenecen a la σ-álgebra. La función $A \to |\mu|(A)$ es una función σ-aditiva que puede asumir el valor $+\infty$. En el caso especial cuando $X = \mathbb{K}$ la variación de μ es una medida finita.

Veamos el propósito de esta ponencia. En [6], Gómez y Restrepo demostraron que si μ y ν son medidas radonianas en los espacios topológicos hausdorfianos S y T respectivamente, entonces existe una medida radoniana única λ en $bor(S \times T)$ tal que $\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ para todo $A \in bor(S)$ y todo $B \in bor(T)$. Llamaremos *medida radoniana producto* a la medida λ y la denotaremos por $\lambda = \mu \otimes \nu$. Este teorema se puede extender a funciones σ- aditivas con valores reales o complejos con la conclusión adicional de que $|\lambda| = |\mu| \otimes |\nu|$. En [10], Posada y Restrepo extendieron ese resultado cuando μ y ν son funciones σ- aditivas con valores en espacios de Banach separables X y Y respectivamente. Concretamente, demostraron:

Teorema 1. *Sean X y Y espacios de Banach separables, $\mu : bor(S) \to X$ y $\nu : bor(T) \to Y$ funciones σ-aditivas radonianas, entonces existe una y sólo una función σ-aditiva radoniana $\lambda : bor(S \times T) \to X\widehat{\otimes}_\epsilon Y$ tal que $\lambda(A \times B) = \mu(A) \otimes \nu(B)$ para todo $A \in bor(S)$ y $B \in bor(T)$.*

En este enunciado $X\widehat{\otimes}_\epsilon Y$ es el producto tensorial inyectivo de $X \otimes Y$ después de ser completado respecto a la ϵ-norma definida así: identificamos a $z = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k$ con la forma bilineal $f_z : X' \times Y' \to \mathbb{K}$ definida por $f_z(x', y') = \sum_{k=1}^{n} x'(x_k)y'(y_k)$ y definimos

$$\|z\|_\epsilon = \sup\{|f_z(x', y')| : \ \|x'\| \leq 1, \ \|y'\| \leq 1\}.$$

Si Ω es un espacio métrico y Z es un espacio de Banach, se consideran los espacios $\mathcal{C}_b(\Omega)$ de las funciones continuas y acotadas con valores reales y el espacio $\mathcal{M}_{rad}(\Omega, Z)$ de las medidas radonianas de $bor(\Omega)$ en Z. La función bilineal

$$b(f, \mu) = \langle f, \mu \rangle = \int_{\Omega} f(w) d\mu(w)$$

es una dualidad. La topología inducida por esta dualidad en $\mathcal{M}_{rad}(\Omega, Z)$ es la *topología apretada* o *topología de la convergencia débil de medidas*. Una red $(\mu_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ *converge débilmente* a μ (con respecto a la topología apretada) si $\langle f, \mu_\gamma \rangle \to \langle f, \mu \rangle$ para toda $f \in \mathcal{C}_b(\Omega)$.

El propósito en esta ponencia es mostrar la continuidad de la función

$$(\mu, \nu) \to \mu \otimes \nu \quad \text{de} \quad \mathcal{M}_{rad}(S, X) \times \mathcal{M}_{rad}(T, Y) \quad \text{en} \quad \mathcal{M}_{rad}(S \times T, X \widehat{\otimes}_\epsilon Y)$$

cuando X y Y son espacios de Banach separables, S y T son espacios métricos y los espacios de medida indicados se dotan de la topología de la convergencia apretada.

Cuando X es una álgebra de Banach reticular tal que $X \widehat{\otimes}_\epsilon X$ es un retículo de Banach demostraremos adicionalmente la continuidad del producto convolución. Este producto se define así. Sean S un grupo topológico y $\theta(s, t) = st$ la operación del grupo. Sean μ y ν medidas radonianas con valores en una álgebra de Banach X y $\lambda = \mu \otimes \nu$. Sea $m : X \times X \to X$, $m(x, y) = xy$, la función multiplicación en la álgebra de Banach X. Denotaremos por $\overline{m}$ a la linearización $x \otimes y \to \overline{m}(x \otimes y) = m(x, y)$ de $X \otimes X$ en X. Supondremos que la linearización es continua respecto a la ϵ-norma. Es decir, $\|\overline{m}(z)\|_X \leq \|z\|_\epsilon$. *El producto de convolución* de las medidas μ y ν es la medida radoniana $\mu * \nu \in \mathcal{M}_{rad}(S, X)$ definida por

$$\mu * \nu(A) = \overline{m}(\lambda(\theta^{-1}(A)))$$

para todo $A \in bor(S)$. Entonces la función

$$(\mu, \nu) \to \mu * \nu \text{ de } \mathcal{M}_{rad}(S, X) \times \mathcal{M}_{rad}(S, X) \text{ en } \mathcal{M}_{rad}(S, X)$$

es continua respecto a las topologías apretadas.

La demostración de este teorema se basa en resultados obtenidos para medidas radonianas en Gomez y Restrepo en [6] y Posada y Restrepo en [10] y [11]. Destacamos muy especialmente la influencia de Kawabe en [7] y [2] en la demostración del teorema indicado en un contexto diferente al de las medidas radonianas.

2. Algunos resultados

Se quiere socializar por parte de los autores algunos resultados obtenidos relativos a la convergencia débil de medidas radonianas. Más específicamente:

Teorema 2. *Sean S y T espacios métricos, X y Y retículos de Banach tales que $X \widehat{\otimes}_\epsilon Y$ es un retículo de Banach. Sean $\{\mu_\alpha\} \subset \mathcal{M}^+_{rad}(S, X)$ y $\{\nu_\alpha\} \subset \mathcal{M}^+_{rad}(T, Y)$ redes de medidas y $\mu \in \mathcal{M}^+_{rad}(S, X)$ y*

$\nu \in \mathcal{M}^+_{rad}(T,Y)$. *Sean* $\lambda_\alpha = \mu_\alpha \otimes \nu_\alpha$ *la medida producto de* μ_α *y* ν_α *y* $\lambda = \mu \otimes \nu$ *la medida producto* μ *y* ν *respectivamente. Si* $\mu_\alpha \xrightarrow{w} \mu$ *y* $\nu_\alpha \xrightarrow{w} \nu$ *entonces* $\lambda_\alpha \xrightarrow{w} \lambda$.

Teorema 3. *Sea* X *una álgebra y retículo de Banach separable, tal que* $X \widehat{\otimes}_\epsilon X$ *es un retículo de Banach.* $\{\mu_\alpha\} \subset \mathcal{M}^+_{rad}(S,X)$ *y* $\{\nu_\alpha\} \subset \mathcal{M}^+_{rad}(S,X)$ *redes de medidas y* $\mu \in \mathcal{M}^+_{rad}(S,X)$ *y* $\nu \in \mathcal{M}^+_{rad}(S,X)$. *Si* $\mu_\alpha \xrightarrow{w} \mu$ *y* $\nu_\alpha \xrightarrow{w} \nu$ *entonces* $\mu_\alpha * \nu_\alpha \xrightarrow{w} \mu * \nu$.

Referencias

[1] Bartle. R.G., *A general bilinear vector integral*, Studia Math 15 (1956), 337-352.

[2] Bourbaki. N., *Elements of mathematics*, Integration II chapters 7-9. Springer (2004).

[3] Diestel J. & Uhl J. J., *Vector Measures*, American Mathematical Society Mathematical Surveys No 15 (1977).

[4] Fremlin D.H., *Tensor products of Archimedian vector lattices*, Amer. J. Math 99 (1972).

[5] Fremlin D.H., *Tensor products of Banach lattices*, Math. Ann. 24 (1974).

[6] Gómez M. & Restrepo G., *Producto Tensorial de Medidas Radonianas y el Teorema de Fubini*, Revista Matemáticas: Enseñanza Universitaria, Vol. XVII, N° 1, Junio (2009), 23-34.

[7] Kawabe J., *Borel Injective Tensor Product and Convolution of Vector Measure and Their Weak Convergence*, Contemporary Mathematics Volume 321, (2003).

[8] Kawabe J., *Joint continuity of injective tensor products of vector measures in Banach lattices*, J.Aust. Soc. 74(2003), 185-199.

[9] Posada Vera L., *Producto tensorial de medidas radonianas con valores en espacios de Banach*, Tesis de maestría. Universidad del Valle (2009).

[10] Posada L. & Restrepo G., *Producto de medidas radonianas con valores en espacios de Banach separables*, Revista Matemáticas: Enseñanza Universitaria, Vol. XVIII, N° 1, Junio (2010), 57-69.

[11] Posada L. & Restrepo G., *Convolución de medidas radonianas con valores en álgebras de Banach separables*, Revista Matemáticas: Enseñanza Universitaria, Vol. XX, N° 1, Junio (2012), 49-62

[12] Schwartz L., *Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures*, Oxford University Press, (1973).

Sobre la dinámica poblacional de cepas de *Mycobacterium tuberculosis* sensibles y resistentes a múltiples antibióticos simultáneamente

Jhoana Patricia Romero L.* y Eduardo Ibargüen M.**

*Universidad de Antioquia, Seccional Bajo Cauca, Colombia, jpatirom3@gmail.com

**Universidad de Nariño, Pasto, Colombia, edbargun@gmail.com

Resumen

En este trabajo se presentan los resultados obtenidos del análisis cualitativo de un modelo matemático que describe una interacción sencilla entre cepas de *Mycobacterium tuberculosis* (*Mtb*) sensibles y resistentes a múltiples antibióticos de acción bactericida y bacteriostática simultáneamente, considerando adquisición de resistencia por mutaciones naturales y adquiridas.

1. Introducción

La resistencia bacteriana es un fenómeno caracterizado por una refractariedad parcial o total de los microorganismos al efecto del antibiótico, generado principalmente por el uso indiscriminado e irracional de éstos y no sólo por la presión evolutiva que se ejerce en el tratamiento terapéutico [1]. Este fenómeno creciente tiene implicaciones sociales y económicas enormes dadas por el incremento de morbilidad y mortalidad, aumento de los costos de los tratamientos y de las largas estancias hospitalarias generadas por la Tuberculosis (TB) [2].

Desde el punto de vista molecular y bioquímico existen básicamente tres mecanismos por medio de los cuales una bacteria puede convertirse en resistente al efecto de un antibiótico: inactivación del antibiótico, alteración del sitio objetivo del antibiótico y formación de barreras de permeabilidad. La primera puede surgir por la producción de enzimas que hidrolizan el antibiótico; la segunda puede generarse debido a que se modifican algunos sitios específicos de la anatomía celular, y la tercera ocurre por permeabilidad de la membrana externa o interna de la bacteria, etc.; cabe resaltar que los tres mecanismos pueden ocurrir simultáneamente [5].

Por otro lado, según la acción que tenga el antibiótico en la bacteria, puede clasificarse en bactericida o bacteriostático. Se dice que un antibiótico es de acción bacteriostática cuando su función es inhibir el crecimiento de la bacteria, y bactericida cuando su función es matar a la bacteria. No obstante esta distinción no es absoluta, pues depende de la concentración del medicamento, la especie de bacteria y la etapa de crecimiento [6].

En términos generales, la infección bacteriana es un proceso complejo en el que tiene un papel importante, no sólo la bacteria infecciosa, sino también el huésped. De hecho, parte importante de los problemas derivados de la infección se deben a la respuesta del huésped a la misma [7]. En el caso de la TB, la resistencia natural es asociada al ácido micólico contenido en su pared celular que le que le permite a la bacteria una baja permeabilidad para los antibióticos y los mecanismos de eflujo tales como tetraciclina, fluoroquinolonas y aminoglicósidos, entre otros. Por otro lado, la resistencia adquirida es causada principalmente por mutaciones espontáneas en los genes cromosómicos, que producen la selección de cepas resistentes durante el tratamiento antibiótico [8].

En este trabajo se formula y analiza un modelo matemático apoyado en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs) que surge como una generalización de los modelos propuestos en [9, 8]. Este describe la dinámica de resistencia bacteriana del género *Mycobacterium tuberculosis* hacia n antibióticos de acción bactericida y m de acción bacteriostática simultáneamente, consiásicderando que la resistencia a los antibióticos se presenta de forma natural y por mutación debido a la exposición de las bacterias a los antibióticos; en el modelo también se considera el efecto de la respuesta inmune del huésped.

2. Resultados

El análisis cualitativo del sistema se hace a través de los parámetros S_0 (ńumero de bacterias generadas por las bacterias sensibles) y R_r (número de bacterias generadas por las bacterias resistentes). En este sentido, los resultados de este trabajo sugieren los siguientes escenarios:

1. La progresión bacteriana es controlada y eliminada ($S_0 < 1$ y $R_r < 1$).
2. La progresión bacteriana se presenta únicamente con cepas resistentes ($R_r > 1$ y $S_0 < R_r$).
3. La progresión bacteriana se presenta tanto con cepas sensibles como resistentes ($S_0 > 1$ y $S_0 > R_r$).

A partir del primer ítem se evidencia la necesidad de combinar el tratamiento antibiótico con la estimulación del sistema inmune de manera adecuada. Mientras que del segundo y tercer ítem se concluye que si no se tiene en cuenta la observación anterior como resultado se obtendrá la progresión de la infección.

Referencias

[1] Sussman O. & Mattos L. & Restrepo A., *Resistencia bacteriana*, Unidad de Infectología, Hospital San Ignacio, (2005),

[2] Sussman O., *Apuntes de resistencia bacteriana*, (2001).

[3] Burke A., *Antibiotic Resistance*, Medical Clinic of North America, (2000), 80-96.

[4] Zhang Y., *Mechanisms of Antibiotic Resistance in the Microbial World*. Baltimore, USA, (2007).

[5] Linare J & Martínez J., *Resistencia a los antimicrobianos y virulencia bacteriana*, Madrid (2005).

[6] Almeida P. & Palomino J,. *Antimicrob Chemother*,(2011), 1417-1430.

[7] Romero J & Ibargüen E & Esteva L., *Un modelo matemático sobre bacterias sensibles y resistentes a antibióticos*, Matemáticas: enseñanza univetaria, Vol XX N°1 (2011).

[8] Ibargüen E & Mosquera S & Cerón M & Burbano E & Hidalgo S & Esteva L & Romero J., *Mathematical modeling on bacterial resistance to multiple antibiotics caused by spontaneous mutations*, prepint on Journal Mathematical Biosystem, (2013).

El teorema de la función abierta para funciones multivaluadas convexas

Diana Ximena Narváez

Universidad del Valle, Departamento de Matemáticas, Cali, Colombia. dianaximena85@yahoo.com

Resumen

El teorema usual de la función abierta de Banach-Schauder afirma que toda función lineal, continua y epiyectiva de un espacio de Banach en otro son abiertas. Este teorema lo demuestra R. Megginson en [6] utilizando el lema de Zabreico (ver [10]). Seguiremos un procedimiento similar para demostrar que toda función multivaluada con valores cerrados, convexa, semicontinua superiormente y epiyectiva es una función abierta. El teorema de Robinson-Urescu enunciado en [1] se deduce fácilmente del teorema anterior.

De otro lado, el teorema de la función abierta, en el lenguaje de hoy, expresa que si X y Y son espacios de Banach (normados y completos) y $f : X \to Y$ es una función lineal, continua y epiyectiva, entonces esta función es abierta. Es decir, para todo conjunto abierto $A \subseteq X$, $f(A) \subseteq Y$ es un conjunto abierto.

(A) (Teorema de la función abierta para las funciones multivaluadas convexas). Sean X y Y espacios de Banach y $f : X \to Y$ una función multivaluada convexa, semicontinua superiormente, epiyectiva y con valores cerrados. Entonces f es una función abierta.

Las siguientes definiciones son pertinenentes para explicar el contenido y alcance de estos teoremas, antes de indicar el procedimiento escogido para las demostración.

Una función multivaluada de un conjunto X en un conjunto Y es una correspondencia $x \mapsto f(x)$ que a cada $x \in X$ le asigna un subconjunto $f(x)$ del conjunto Y. Es posible que el conjunto $f(x)$ sea el conjunto vacío. El **dominio efectivo** de esta función es el conjunto de los $x \in X$ tales que $f(x) \neq \phi$. La gráfica de la función multivaluada f es el conjunto $\gamma(f)$ de las parejas $(x, y) \in X \times Y$ tales que $y \in f(x)$. Supongamos ahora que X y Y son espacios topológicos y $f : X \to Y$ es una función multivaluada. Diremos que esta función es **semicontinua superiormente** en $x_0 \in X$ si para todo conjunto abierto W que contenga a $f(x_0)$, existe un conjunto abierto V que contiene a x_0 tal que $f(x) \subseteq W$ para todo $x \in V$. Es *semicontinua superiormente* si lo es en cada punto $x_0 \in X$. Diremos que es **semicontinua inferiormente** en $x_0 \in X$ si para todo conjunto abierto W en Y que intercepte a $f(x_0)$ existe un conjunto abierto V que contiene a x_0 tal que $f(x) \cap W \neq \phi$ para todo $x \in V$. Es *semicontinua inferiormente*

si lo es en cada punto $x_0 \in X$. La función multivaluada f es **cerrada** si su gráfica $\gamma(f)$ es

un subconjunto cerrado de $X \times Y$ con la topología producto. Esta función es de **valores cerrados** si $f(x)$ es un subconjunto cerrado de Y para todo $x \in X$.
En los espacios de Banach hay unos conceptos especiales que definiremos en seguida. Recordemos que un subconjunto C de un espacio vectorial Γ es un cono si $0 \in C$ y $tx \in C$ para todo $t > 0$ y todo $x \in \Gamma$.
Sean E y F espacios de Banach y $f : E \to F$ una función multivaluada. Esta función es **convexa** si su gráfica $\gamma(f)$ es un subconjunto convexo de $E \times F$. Es un **proceso** si $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ para todo $\lambda > 0$ y todo $x \in X$, y $0_F \in f(0_E)$. Es decir, f es un proceso si y sólo si su gráfica $\gamma(f)$ es un cono. Un proceso es **lineal** si su gráfica $\gamma(f)$ es un subespacio. Esta función es **proceso convexo y cerrado** si su gráfica $\gamma(f)$ es un cono convexo y cerrado.
En cuanto al método de demostración del teorema (A), utilizaremos el lema de Zabreico [10], tal como lo hace R. Megginson (en [6]; página 44) para demostrar el teorema de la función abierta para las funciones monovaluadas. El lema de Zabreico expresa que las seminormas numerablemente subaditivas en un espacio de Banach son continuas.

Referencias

[1] Aubin, Jean-Pierre and Hélene Frankowska. *Set-Valued Analysis* Birkhäuse (1990).

[2] Aubin, Jean-Pierre. *Mathematical Methods Game Theory and Economic Theory* (revised edition), Dover Publications Inc (2007).

[3] Aubin, Jean-Pierre and Ekeland, Ivar. *Applied Nonlinear Analysis*, Dover Publications Inc (2006). La Primera edición, John Wiley (1984).

[4] N. N. Bourbaki. *Espaces vectoriels topologiques*, Springer.

[5] Ioffe, A. D. *Non- Smooth analysis: differential callculus of non differentiable mappings.* Transactions of the AMS, 206, 1-56 (1981).

[6] Megginson, R. E. *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer (1998).

[7] Narváez, D. *Funciones multivaluadas y topológias en el conjunto de partes de un espacio topológico*, (2010).

[8] Pang, J. *Generalized differentiation with positevely homogeneous maps: applications in set- valued Analysis and metric regularity*, Mathematics of Operations Research. 363 (3), 377- 397 (2011).

[9] Restrepo, G. *Introducción al Análisis Funcional.* Departamento de matemáticas, Universidad del Valle (2010).

[10] Zabreico, P.P. *A Theorem on Semiadditiva funtionals*, Functional Anal. Appl. 3. (1969) (English traslation form Russian)

Teoremas clásicos de convergencia en espacios débiles de Orlicz

Oscar Mauricio Guzmán Fonseca
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Resumen

Los espacios débiles de Orlicz con una función peso no están dotados de una norma, sin embargo poseen la cuasi-norma

$$\|f\|_{wL_\phi} = \text{ínf}\left\{c > 0 : \sup \Phi\left(\frac{t}{c}\right)\mu\left(|f| > t\right)\right\}$$

que no está definida en términos de una integral, es por esto que el estudio de la convergencia de sucesiones en wL_ϕ cobra particular importancia. Se pretende mostrar el equivalente a los teoremas clásicos de convergencia (*Teorema de la convergencia Dominada, Teorema de la convergencia monótona, Teorema de Fatou*) en los espacios débiles de Orlicz, con una fución peso perteneciente a Δ_0, un conjunto de funciones que contienen a las funciones convexas, empleadas habitualmente como peso. Se procura extender el tratamiento que se la da a los teoremas de convergencia en [1] restringidos para espacios de probabilidad a espacios de medida σ-finita, además completos y no atómicos.

Referencias

[1] Liu Ning & Ye Yonggang, "Weak Orlicz Space and its convergence theorems", *Acta Matematica Scientia*, 2009.

Sobre la diferenciabilidad en el contexto difuso

Gilberto Arenas Díaz* y Alexánder Reátiga Villamizar**

*Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, garenasd@uis.edu.co

**Universidad Pontificia Bolivariana, Seccional Bucaramanga, Colombia, alexander.reatiga@upb.edu.co

Resumen

Basados en los estudios hechos por L. Stefanini & B. Bede [10] y L. Stefanini [9], sobre la diferencia generalizada de Hukuhara [3] y la diferenciabilidad de multifunciones del tipo $F : T \longrightarrow \mathcal{F}^1$, siendo $\mathcal{F}^1$ la clase de conjuntos difusos definidos sobre $\mathbb{R}$ que son normales, convexos, semicontinuos superiores y con soporte compacto; se hace un aporte a la teoría multivoca difusa al introducir nuevas definiciones de diferenciabilidad para multifunciones difusas del tipo $F : T \longrightarrow \mathcal{F}^n$. Estas nociones de diferenciabilidad se logran gracias a algunas propiedades interesantes que tiene la diferencia generalizada de Hukuhara. De igual forma se demuestra que estas nociones de diferenciabilidad de multifunciones difusas, generalizan algunas definiciones existentes en la literatura, como son las definiciones que aparecen en [2, 4, 6, 6, 8].

1. Introducción

La teoría de conjuntos difusos aparece hacia 1965, con el trabajo pionero de Zadeh [11], y por esa misma época comienza a desarrollarse el llamado Análisis Multívoco. Estas dos teorías tienen multiples aplicaciones en campos como la matemática pura y la matemática aplicada, también en ciencias de la ingeniería y las ciencias sociales. Particularmente las multifunciones tienen aplicaciones en problemas de control y teoría de ecuaciones contingentes, matemáticas económicas y en varias ramas del análisis por ejemplo en el estudio de subdiferenciales de funciones convexas, (ver [1] y referencias que allí se encuentran).

En los últimos años estas dos teorías se han acercado estrechamente, apareciendo así el llamado Análisis Multívoco Difuso, como una fusión entre estas dos teorías.

El Análisis Difuso Multívoco, ha tenido últimamente un vertiginoso avance que se debe básicamente a la diversidad y riqueza de los conceptos y técnicas que allí se manejan, y también a las interesantes aplicaciones que esta teoría tiene.

Naturalmente los objetos de estudio del Análisis Multívoco son las multifunciones, definidas estas como: dados dos conjuntos no vacíos X y Y, una multifunción $F : X \longrightarrow Y$ es un subconjunto de $X \times Y$ con dominio X, tal que $F(x) \in \mathcal{P}(Y)$, $F(x) \neq \emptyset$, $\forall\, x \in X$, donde $\mathcal{P}(Y)$ denota el conjunto de partes de Y. Los objetos de estudio del Análisis Multívoco Difuso son las multifunciones difusas, siendo estas multifunciones, aquellas donde los conjuntos imágenes son conjuntos difusos sobre Y, esto es, $F : X \longrightarrow Y$ es una multifunción difusa, si $F(x) = u$ donde $u : Y \longrightarrow [0, 1]$.

Surgidas estas dos teorías (multívoca y multívoca difusa), es importante hacer de ellas una teoría bien consolidada, es decir, obtener en ellas una serie de herramientas (definiciones, teoremas, ...) que establezcan resultados equivalentes a los que se tienen en la teoría del análisis clásico.

2. Algunos resultados

Se quiere socializar por parte de los autores algunos resultados obtenidos relativos a diferenciabilidad de multifunciones difusas y que hacen parte de [2]. Más específicamente:

1. Se presentan nuevas nociones de diferenciabilidad para multifunciones difusas del tipo $F : T \longrightarrow \mathcal{F}^n$ y se demuestra que estas definiciones generalizan algunas nociones de diferenciabilidad que existen en la literatura.
2. Se estudian diferentes propiedades de la noción más general, y que llamamos gH_α-diferenciabilidad.
3. Se utiliza la gH_α-diferenciabilidad para abordar el problema de Cauchy en el contexto difuso.

Referencias

[1] Banks H.T. & Jacobs M.Q., *A differential calculus for multifunctions*, J. Math. Anal. Appl. 29 (1970), 246–272.

[2] Bede B. & Gal S.G., *Generalizations of the differentiability of fuzzy number valued functions with applications to fuzzy differential equations*, Fuzzy Set and System, 151 (2005), 581–99.

[3] Hukuhara M., *Intégration des applications measurables dont la valeur est un compact convexe*, Funkcialaj Ekvacioj 10 (1967), 205–223.

[4] Kaleva O., *Fuzzy differential equations*, Fuzzy Sets and Systems 24 (1987), 301–317.

[5] Kaleva O., *The calculus of fuzzy valued functions*, Appli. Math. Lett. 3 (1990), no. 2, 55–59.

[6] Park J. & Han H., *Existence and uniqueness theorem for a solutions of fuzzy diferential equations*, Int. Journal Math. Math. Sci. 22 (1999), 271–279.

[7] Reátiga-Villamizar A. & Arenas-Díaz G., *On the Hukuhara differentiability notions on fuzzy set-valued mappings*, Preprint.

[8] Song S. & Wu C., *Existence and uniqueness of solutions to Cauchy problem of fuzzy diferential equations*, Fuzzy Set and System 110 (2000), 55–67.

[9] Stefanini L., *A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic*, Fuzzy sets and systems 161 (2010), 1564–1584.

[10] Stefanini L. & Bebe B., *Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations*, Nonlinear Analysis 71 (2009), 1311–1328.

[11] Zadeh. L.A., *Fuzzy sets*, Infor. and Control, 8 (1965), 338–353.

Sobre el teorema de Bohr-Mollerup-Artin, una reconstrucción histórica de la función Gamma

Joan Amaya Triana, Stefan Gomez Guevara y Mauricio Rodríguez Garzón

*Universidad Distrital Francisco José de Caldas, jjamayat@correo.udistrital.edu.co

**Universidad Distrital Francisco José de Caldas, sagomezg@correo.udistrital.edu.co

**Universidad Distrital Francisco José de Caldas, bmrodriguezg@correo.udistrital.edu.co

Resumen

Se propone reconstruir los fundamentos matemáticos de la función Gamma desde 1729 con la correspondencia entre: Leonard Euler y Christian Golbach, hasta la formulación y demostración el teorema de Bohr-Mollerup-Artin, nombrando o derivando resultados relevantes como: La fórmula del Producto de Gauss, Las integrales de Euler y La fórmula de Stirling. Se presentarán aplicaciones de la función Gamma.

1. Introducción

La función Gamma tiene su origen alrededor alrededor del año 1729 en una correspondencia entre Leonard Euler (1707-1783) y Christian Goldbach (1690-1794), dicha correspondencia se dio en torno a un problema común, este era:
"*Dar una fórmula simple para calcular el factorial de un número sin la restricción de que este fuese entero*".
Ya por ese entonces había surgido la teoría de la interpolación y la de integración, teorías que intervendrían en el desarrollo de la función gamma. Deseaban una fórmula como la de la suma de los n primeros números la cual aunque pensada para enteros es aplicable a cualquier real. A saber

$$\sum_{i=0}^{n} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

El problema inicialmente fue tratado por Goldbach como un problema de interpolación, es decir se necesita encontrar una curva que pasara por los puntos $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,6)$, $\ldots$, este planteamiento tiene la enorme dificultad de no tener solución única. Golbach no encontró una interpolación que extrapolara la función a los demás factoriales. Euler emprendió otro camino, su propósito fue encontrar una expresión a la fórmula que arrojara el factorial de todos los enteros pero que aún tuviera sentido cuando se cambiaran los naturales por otros valores en la variable. Euler encontró el siguiente producto

$$\left[\left(\frac{2}{1}\right)^n \frac{1}{n+1}\right]\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{1}{n+2}\right]\left[\left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{1}{n+3}\right]\cdots = n!.$$

Sin estudiar la convergencia de este producto infinito podemos asegurar que está dado para todo n, además se verifica fácilmente cancelando los factores de los denominadores y los numeradores, Este último lo denominamos "***Producto de Euler***".

La introducción de la integral en este problema tal ves fue sugerida por la aparición del número π al hacer $n = \frac{1}{2}$ en el producto de Euler, la aparición de este número sugiere circulo y su cuadratura, esto a la vez area y el area sugiere integral, grandes matemáticos como Wallis, Newton y Stirling habían trabajado en familias de funciones paramétricas, Euler tomo una de estas familias a saber $\beta(n, m) = x^m(1-x)^n$, calcular el area bajo estas curvas resultó un problema difícil de manejar si la integral es indefinida, así que Euler lo restringió al intervalo $[0, 1]$ encontrando

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \frac{n!}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n+1)}.$$

Y de aquí que

$$n! = \int_0^1 (-ln(x))^n.$$

Por supuesto no sin antes haber desarrollado la integral y haber aplicado algunas sustituciones importantes. Esta la cual fue la primera forma de la forma de la función Gamma, trajo consigo mas interrogantes, como ¿Que pasa si la función Gamma toma valores complejos? ¿Cuando la función Gamma es convexa? Las respuestas a estos interrogantes y muchos mas fueron unos de los resultados mas fecundos de la época.

Posteriormente Artin (1964) utilizando algunos resultados previos de Bohr y Mollerup (1922), estableció para la función Gamma un teorema que afirma que la función Gamma es la única función definida para $x > 0$ la cual es: positiva, $\Gamma(1) = 1$, satisface la ecuación $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ mediante ecuaciones funcionales estableció que y es logarítmicamente convexa. Este teorema trae consigo nuevas propiedades de la función Gamma y el estudio de la convexidad en funciones.

2. Algunos resultados

Se quiere socializar por parte de los autores la evolución de un objeto matemático a través de la historia, para este fin se pretende alcanzar los siguientes objetivos:

1. Exhibir la unicidad de la función Gamma, en el contexto del teorema de Bohr-Mollerup-Artin.
2. Mencionar algunos de los vínculos y aplicaciones de la función Gamma con diferentes áreas de la ciencia.
3. Presentar una investigación histórica acerca de la evolución de la función Gamma.

Referencias

[1] Philip J. Davids, *Leonhard Euler's Integral: A Historical Profile Of The Gamma Function*, Amer. Math. Monthly 66 (1959), 849–869.

[2] Artin E., *The Gamma Function*, Holt, Rinehart and Winston, Inc, New York, 1964.

[3] Rudin W., *Principios de Análisis Matemático*, Mc Graw Hill. 3a Ed., México, 1980.

Aplicaciones de las funciones débilmente contractivas a problemas de valor inicial difuso usando derivada generalizada de Hukuhara

Vladimir Angulo Castillo

Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, vladimir_angulo01@hotmail.com

Resumen

Recientemente se han obtenido resultados de existencia y unicidad de puntos fijos de contracciones f de un espacio parcialmente ordenado $(X, \leq)$ en si mismo, donde $\leq$ es el orden definido sobre X, para el cual existe una métrica d que hace de X un espacio métrico completo, generalizando así, el teorema clásico de punto fijo de Banach. En esta charla se mostraran algunos resultados recientes obtenidos sobre la existencia y unicidad de puntos fijos de aplicaciones contractivas $f : X \longrightarrow X$, donde X es un espacio métrico completo parcialmente ordenado, y a partir de ellos, se presentarán resultados de buena colocación de problemas de valor inicial en el contexto del Análisis difuso, usando la noción de derivada generalizada de Hukuhara (o $gH-$derivada).

1. Introducción

Durante los últimos años, la teoría de las ecuaciones diferenciales difusas (EDD) y con ellos, los problemas de valor inicial asociados a las EDD, han tenido un sorprendente desarrollo debido en gran parte a su importancia en el modelado de sistemas dinámicos con datos que poseen cierto grado de imprecisión o incertidumbre, resolviendo de esta manera, varios inconvenientes que se presentan en el modelado matemático a través de la teoría clásica de ecuaciones diferenciales ordinarias. Su desarrollo ha tomado diferentes direcciones teóricas, y un gran número de aplicaciones en diferentes problemas reales ha sido considerado (ver por ejemplo [1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12]). En términos generales un problema de valor inicial (PVID) asociado a una EDD ordinaria de primer orden, consiste en encontrar una función difusa x definida en un intervalo J de números reales, con valores en la clase de los conjuntos difusos definidos sobre R^n, tal que

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

donde $x_0 \in X$, $t_0 \in J$, X es una clase de conjuntos difusos y $f\colon J \times X \longrightarrow X$ es una función difusa. Así, al plantear el PVID (1), observamos como primera medida, la necesidad de conocer el sentido de la derivada $x'(t)$ de la función incógnita difusa $x(t)$, lo cual ha sido el factor semilla en la búsqueda de abordajes teóricos para analizar la existencia de solución. Naturalmente, conocer

el sentido de la derivada de x' no solo implica el desarrollo de la teoría de la diferenciabilidad de funciones difusas y sus propiedades, sino también, el desarrollo de la teoría de integrabilidad de funciones difusas.

El primero y más común abordaje de la derivada de x' ha sido a través de la denominada diferenciabilidad de Hukuhara para las funciones con valores difusos [6, 8, 9, 11]. Bajo este enfoque, varios resultados de existencia y unicidad de soluciones de problemas de valor inicial difuso (PVID) han sido obtenidos. Sin embargo, en los últimos años se ha conocido que en muchos casos, este enfoque sufre ciertas desventajas debido a que la solución se vuelve más difusa a medida que aumenta el tiempo, y consecuentemente, la solución difusa se comporta bastante diferente de la solución en el contexto de PVIs asociados a ecuaciones diferenciales ordinarias. Se considera que este problema es debido a la "fusificación" particular de la derivada usada en la formulación de la EDD. Adicionalmente, se conoce que la clase de funciones Hukuhara diferenciables, es bastante restrictiva. Como consecuencia, en los últimos años han sido propuestas algunas definiciones de diferenciabilidad difusa, más generales que la derivada de Hukuhara, aumentando así la clase de funciones difusas diferenciables y mejorando el comportamiento difuso de la solución. La más reciente noción de derivada para funciones difusas es la llamada gH-derivada, introducida en [10], la cual es basada en el concepto de la gH-diferencia introducida en [13]. Este nuevo concepto de diferenciabilidad difusa amplía la clase de funciones difusas Hukuhara diferenciables y preserva buenas propiedades relacionadas con la integral de funciones difusas [1, 3].

2. Algunos resultados

Con base en lo anterior, en esta charla se quiere presentar algunos resultados correspondientes al estudio del problema de valor inicial difuso (1) asociado a una EDD ordinaria de primer orden, usando la derivada generalizada de Hukuhara (gH-derivada) y algunos teoremas de punto fijo establecidos en [5] sobre funciones débilmente contractivas, y generalizaciones, definidas sobre conjuntos parcialmente ordenados. Y si el tiempo lo permite, como una primera aplicación de los resultados teóricos conseguidos, también se quiere mostrar un resultado sobre existencia de solución de un PVID con retardo (*delay*) finito, el cual expresa el hecho de que la función incógnita en un sistema dinámico no sólo depende del estado del sistema en un instante dado, sino que también depende de la historia de la trayectoria hasta ese instante (ver [7]).

Referencias

[1] Bede, B. & Stefanini, L., *Generalized differentiability of fuzzy-valued functions*, Fuzzy Sets and Systems, In press, Corrected Proof, (2012).

[2] Bede, B. & Gal, S.G., *Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations*, Fuzzy Sets and Systems, 151 (2005), 581-599.

[3] Chalco-Cano, Y.; Román-Flores, H. & Jiménez-Gamero, M.D., *Generalized derivative and $\pi-$derivative for set-valued functions*, Inf. Sci. 181 (2013), 2177-2188.

[4] González, V. & Villamizar-Roa, E.J., *A note on the Cauchy problem of fuzzy differential equations.* Rev. Acad. Colombiana Cienc. Exact. Fís. Natur. 34 (2010), 541-552.

[5] Harjani, J. & Sadarangani, K., *Generalized contractions in partially ordered metric spaces and applications to ordinary differential equations*, Nonlinear Analysis 72 (2010), 1188-1197.

[6] Kaleva, O., *Fuzzy differential equations*, Fuzzy Sets and Systems 24 (1987), 301-317.

[7] Lupulescu, V. & Abbas, U., *Fuzzy delay differential equations*, Fuzzy Optim. Decis. Mak. 11 (2012), 99-111.

[8] Nieto, J.J. & Rodríguez-López, R., *Applications of contractive-like mapping principles to fuzzy equations*, Rev. Mat. Complut. 19 (2006), 361-383.

[9] Puri, M. & Ralescu, D., *Differential of fuzzy functions*, J. Math. Anal. Appl., 91 (1983), 552-558.

[10] Stefanini, L. & Bede, B., *Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations*, Nonlinear Analysis 71 (2009), 1311-1328.

[11] Stefanini, L.; Sorini, L. & M. Guerra, L., *Parametric representation of fuzzy numbers and application to fuzzy calculus*, Fuzzy Sets and Systems, 157 (2006), 2423-2455.

[12] Stefanini, L., *A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic*, Fuzzy sets and systems 161 (2010), 1564-1584.

[13] Stefanini, L., *A generalization of Hukuhara difference for interval and fuzzy arithmetic*, in D. Dubois, M.A. Lubiano, H. Prade, M.A. Gil, P. Grzegorzewski, O. Hryniewicz (Eds), Soft Methods for Handling Variability and Imprecision, Series on Advances in Soft Computing, Springer, 2008.

Familias de operadores de Jacobi unitariamente equivalentes

Diego Leonardo Hernández Bustos

Universidad Nacional Autónoma de México, D.F., México.

Universidad de Cundinamarca, Facatativá, Colombia. mochito8630@hotmail.com

Resumen

Los operadores de Jacobi tienen importancia teórica en la teoría espectral de operadores debido a que todo operador auto-adjunto simple es en realidad un operador de Jacobi auto-adjunto. Además de la relevancia teórica, este tipo de operadores tiene aplicaciones en la mecánica cuántica, particularmente en la óptica cuántica [7, 20], en la física de la materia condensada y mecánica [14, 15, 6, 12, 19], y en la biomatemática [3, 8]. Dada una Matriz de Jacobi $[a]$ y una base ortonormal $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ en un espacio de Hilbert Separable $\mathcal{H}$, se construye un operador J (Este operador, se conoce como operador de Jacobi) de tal forma que la matriz $[a]$ es la representación matricial del operador J con respecto a la base $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$. Entonces una pregunta que surge de manera natural es la siguiente: ¿se puede encontrar otra base ortonormal $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}$, de modo que el operador J tenga como representación matricial con respecto a la base $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ una matriz de Jacobi?
Se propone dar respuesta a la pregunta anterior. Pregunta que no es trivial y su indagación requiere herramientas avanzadas de Análisis Matemático y Análisis Espectral.

1. Introducción

El conjunto de todas las matrices infinitas de la forma

$$[a] = \begin{pmatrix} q_1 & b_1 & 0 & 0 & . & . & . & \\ b_1 & q_2 & b_2 & 0 & . & . & . & \\ 0 & b_2 & q_3 & b_3 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & & & & & & \\ . & & & & & & & \\ . & & . & . & . & & & \\ & & & & & & & \\ . & & 0 & b_{n-1} & q_n & b_n & 0 & . \\ & & & & & & & \\ . & . & & & & . & . & . \end{pmatrix}$$

donde $\{b_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0\}$, $\{q_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ se denota por $\mathfrak{J}$. Y se conoce como el conjunto de Matrices de Jacobi.
Si $[a] \in \mathfrak{J}$; entonces existe un operador simétrico cerrado J en un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$ tal que $[a]$ es su representación matricial con respecto a una base de $\mathcal{H}$, y a este operador se le

llama operador de Jacobi. Los índices de deficiencia de este operador J son $n_+(J) = n_-(J) = 0$ o son $n_+(J) = n_-(J) = 1$. A cada Matriz de Jacobi se le puede asociar un problema de Momentos y viceversa: a cada problema de Momentos se le puede asociar una Matriz de Jacobi, mostrando que según los índices de deficiencia de un operador J representado por una Matriz de Jacobi, el problema de momentos asociado a la Matriz es un problema determinado o un problema indeterminado, donde se recuerda que un problema de momentos es lo siguiente: Supóngase que se tiene una sucesión $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$, se quiere saber, si existe una medida ρ tal que

$$\gamma_k = \int_{\mathbb{R}} t^k d\rho(t).$$

Si $\gamma_k = \int_{\mathbb{R}} t^k d\rho(t)$ tiene una única solución, entonces se dice que el problema de los Momentos es determinado, en caso contrario el problema de los Momentos es indeterminado.
Sea $\mathcal{H}$ un Espacio de Hilbert y A un operador auto-adjunto en $\mathcal{H}$, A es un operador simple, si existe g en $\mathcal{H}$ tal que $\overline{\text{span}\{E_A(\Delta)g\}} = \mathcal{H}$, donde Δ recorre los borelianos en los reales, este vector g se llama vector generador. E_A hace referencia a la medida espectral asociada con el operador A en el Teorema Espectral[1]. Dado un operador simple existe una isometría Φ entre el espacio $L^2(\mathbb{R}; \mu_g)$ y un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} \Phi := L^2(\mathbb{R}; \mu_g) &\to \mathcal{H} \\ \varphi(t) &\mapsto \Phi(\varphi(t)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dE_A g. \end{aligned}$$

aquí $\mu_g(t) := \langle g; E_A(-\infty, t)g \rangle$.
Sea A un operador auto-adjunto, simple en $\mathcal{H}$; entonces existe un vector h en $\mathcal{H}$ tal que h está en $dom(A^k)$ para todo $k \geq 1$, y $\overline{\text{span}\{A^k h\}} = \mathcal{H}$ donde k recorre los $\mathbb{N}$. Un vector h que cumpla las condiciones anteriores se llama vector cíclico. Se puede demostrar que para todo operador simple existe una base ortonormal, tal que, la representación matricial del operador simple con respecto a esa base, es una matriz de Jacobi.

Si los índices de deficiencia de un Operador de Jacobi son $n_+(J) = n_-(J) = 0$, entonces, se construye una familia de bases ortonormales, tal que, la representación matricial de J con respecto a cada una de estas bases en la familia, es una Matriz de Jacobi, hay que anotar que estas matrices son diferentes entre si. En los pasos para construir esta familia de bases ortonormales se definen por primera vez en la literatura matemática los vectores de Stone de un operador auto-adjunto J, que son vectores cíclicos que se expresan de la forma $e^{-J^2} g$ o de la forma $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dE_J g$, donde g es un vector generador de J. Estos vectores de Stone permiten construir recursivamente una familia de vectores cíclicos de la forma $e^{-nJ^2} g$, o de la forma $\int_{\mathbb{R}} e^{-nt^2} dE_J g$, donde n recorre los números naturales. A partir de cada uno de estos vectores cíclicos se puede obtener una base ortonormal, y cada una de estas bases permite construir una matriz de Jacobi que representa al operador de Jacobi J. Esta familia de bases ortonormales se llamara familia de bases de Stone. Es conocido que

[1] **Teorema Espectral**. Sea A un operador auto-adjunto en $\mathcal{H}$. Entonces existe una única medida espectral E_A en $\mathcal{H}$ definida sobre la σ-Álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ tal que

$$A = \int_{\mathbb{R}} t dE_A(t). \tag{1}$$

por cada matriz de Jacobi se obtiene un problema de momentos, y ese problema de momentos se asocia o relaciona con el operador representado por tal matriz, entonces cada familia de bases de Stone genera una familia de problemas de momentos determinados, asociados con el operador J.

Si los índices de deficiencia del operador J son $n_+(J) = n_-(J) = 1$, entonces utilizando la teoría de lo que es un espacio de Hardy, espacio de de Branges, se observa que un operador de Jacobi con índices de deficiencia $n_+(J) = n_-(J) = 1$, es un operador Entero en el sentido de Krein [3, 4, 6, 17, 18]. Esa tarea se hace con el fin de exhibir el siguiente nuevo resultado: Si los índices de deficiencia de un Operador de Jacobi J son $n_+(J) = n_-(J) = 1$, entonces sólo existe una base ortonormal $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, de tal forma, que la representación matricial del operador J, con respectos a esa base $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una Matriz de Jacobi. Por lo tanto existe solo una Matriz de Jacobi, que representa a un operador de Jacobi J, si y solo si, el operador de Jacobi J no es auto-adjunto. También si los índices de deficiencia del operador J son $n_+(J) = n_-(J) = 1$, entonces para cada extensión auto-adjunta J_β de este operador J, $(J \subset J_\beta)$, se construye una Matriz de Jacobi que representa a la extensión J_β con respecto a una base ortonormal. El que cada una de estas extensiones J_β de J sea auto-adjunta, quiere decir que sus índices de deficiencia son $n_+(J_\beta) = n_-(J_\beta) = 0$. Por lo tanto utilizando los resultados anteriores se llega a la conclusión, que por cada una de estas extensiones J_β de J, se obtendrá una familia de bases ortonormales y una familia de matrices diferentes que representan dicha extensión.

2. Algunos Resultados

La construcción de la familia de Bases de Stone nos permite deducir la siguiente conclusión: Si los índices de deficiencia de un Operador de Jacobi son cero, entonces existe una familia de matrices de Jacobi que se pueden asociar con el mismo operador J o lo que es lo mismo a este operador J lo puedo asociar a una familia de matrices de Jacobi. Mientras que por otro lado, a cada Matriz de Jacobi se le puede asociar solo un operador de Jacobi J.

Otra conclución de este trabajo es la siguiente: Para cada base de una familia de bases de Stone se obtiene un problema de momentos determinado asociado a un operador de Jacobi J, donde este operador J esta representado por una familia de matrices de Jacobi, entonces cada familia de bases de Stone genera una familia de problemas de momentos determinados, asociados con el operador J.

Una consecuencia importante de este trabajo es demostrar el siguiente resultado: Dado un Operador de Jacobi J auto-adjunto, y una base ortonormal con respecto a la cual este operador J tiene como representación matricial una Matriz de Jacobi, existen condiciones necesarias y suficientes para que exista otra base ortonormal con respecto a la cual el operador J tiene como representación matricial otra matriz de Jacobi. Este resultado también aparece por primera vez en la literatura matemática.

La imagen inversa de los vectores de la forma $\int_{\mathbb{R}} e^{-nt^2} dE_J g$, bajo la isometría Φ, cumplen las condiciones necesarias del anterior resultado. Sería interesante encontrar una función φ en $L^2(\mathbb{R}; \mu_g)$, que cúmpla las condiciones necesarias del anterior resultado, pero que su imagen bajo Φ no sea de la forma $\int_{\mathbb{R}} e^{-nt^2} dE_J g$.

Si los indíces de deficiencia de un Operador de Jacobi son $n_+(J) = n_-(J) = 1$, como otras consecuencia de este trabajo resultará que:

Sólo existe una base ortonormal $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, de tal forma, que la representación matricial del operador J, con respectos a esa base $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una Matriz de Jacobi.

Por cada extensión del operador J, será posible hallar una familia de problemas de Momentos determinados asociada a cada extensión. Y como ultimo resultado de este trabajo que aparece por primera vez en la literatura matemática es el siguiente: Cada sucesión de la familia de problemas de Momentos determinados asociados a una extensión de J, se podrá expresar en términos del problema de Momentos indeterminado, asociado al operador J.

Referencias

[1] Akhiezer N.I., Glazman I.M.; 1993 *Theory of linear operators in Hilbert space* (New York:Dover)

[2] Akhiezer N.I.; 1965 *The classical moment problem and Some Related Questions in Analysis* (New York:hafner)

[3] Banasiak J., Lachowicz M. and Moszyński M.; *Topological chaos: when topology meets medicine.* Appl. Math. Lett. , **16** (2003) 303–308.

[4] Birman M.S., Solomjak M.Z.; 1987 *Spectral Theory of self-adjoint operators in Hilbert spece* (Mathematics and Its Applications, Soviet Series)(Dordrecht:Reidel)

[5] Conway J.B.; 1991 *Functions of one complex variable I* (New York:Springer-Verlag)

[6] Gladwell G. M. L. ; *"Inverse Problems in Vibration,"* Second edition, Solid Mechanics and its Applications, **119**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004.

[7] K. M. Ng, C. F. Lo and K. L. Liu. ; *Exact eigenstates of the intensity-dependent Jaynes-Cummings model with the counter-rotating term.* Physica A, **275** (2000) 463–474.

[8] Kimmel M., Swierniak A. and Polanski A.; *Infinite-dimensional model of evolution of drug resistance of cancer cells.* J. Math. Systems Estim. Control, **8** (1998) 1–16.

[9] Krein M.G.; *On Hermitian operators with defect numbers ono* Dokl. Akad. Nauk SSSR 43 (1944) 323-326

[10] Krein M.G.; *On Hermitian operators with defect numbers ono II* Dokl. Akad. Nauk SSSR 44 (1944) 131-134

[11] Krein M.G.; *On one remarkable class of Hermitian operators* Dokl. Akad. Nauk SSSR 44 (1994) 175-179

[12] Ram Y. M. ; *Inverse eigenvalue problem for a modified vibrating system*, SIAM Appl. Math., **53** (1993), 1762–1775.

[13] Remling C.; *Schrödinger operators and de Branges spaces* J. Funct. Anal. 196 (2002) 323-394

[14] R. del Rio, Kudryavtsev M. and Silva L. O. ; *Inverse problems for Jacobi operators III: Mass-spring perturbations of semi-infinite systems.* Inverse Probl. Imaging, 6(4):599–621, 2012.

[15] R. del Rio, Kudryavtsev M, and L. O. Silva.; *Inverse problems for Jacobi operators II: Mass perturbations of semi-infinite mass-spring systems.* Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom., 9(2):165–190, 2013.

[16] Simon B.; *The Classical moment problem as a self-adjoint finite difference operators* Adv. Math. 137 (1998) 82-203

[17] Silva L.O. ; Toloza J.H.; *On the spectral characterization of entire operators with deficiency indices (1,1)* J.Math. Anal. Appl. 367 (2010) 360-373

[18] Silva L.O. ; Toloza J.H.; *The class of n-entire operators* J. Phys. A: Math. Theor. 46 (2013) 025202.

[19] Silva L. O. and Weder R. ; *On the two spectra inverse problem for semi-infinite Jacobi matrices*, Math. Phys. Anal. Geom., **9** (2006), 263–290.

[20] Tur E. A.; *Jaynes-Cummings model: A solution without the rotating wave approximation.* Optics and Spectroscopy, **89** (2000) 574–588.

Algunos resultados analíticos para ecuaciones de campo neural con aprendizaje Hebbiano

Alejandro Jiménez Rodríguez[*,†] y Juan Carlos Cordero Ceballos[**]

[*]Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, Colombia, aljimenezro@unal.edu.co

[†]Universidad Autónoma de Manizales, Colombia, Laboratorio de Neurofisiología Oscar Moscoso Ariza

[**]Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, Colombia, jccorderoc@unal.edu.co

Resumen

En el presente trabajo se presentan resultados analíticos de dos modelos de Campo Neural con aprendizaje Hebbiano. El primero, el modelo de A. H. Abbassian [1] en el que se modula el kernel usando una función gaussiana que depende de las activaciones conjuntas de neuronas en distintas posiciones. El segundo, corresponde a un modelo propuesto a partir de las reglas de aprendizaje Hebbiano tradicionales, tal y como se ilustran en [3]. Se realiza una comparación de los dos modelos, analizando las condiciones para la formación de patrones a partir del estado de reposo; aspecto relacionado con el aprendizaje de nueva información. Se demuestra existencia local y global de soluciones usando un argumento de punto fijo similar al empleado en [4].

1. Introducción

Los modelos de campo neural son formalismos para modelar masas neuronales estructuradas en un espacio continuo [3]. En este tipo de modelos se puede estudiar la actividad espaciotemporal de poblaciones neuronales con el fin de obtener descripciones cuantitativas de fenómenos como los ritmos cerebrales y la formación de patrones relacionados con la memoria; además de establecer un puente entre la doctrina-modelado neuronal y los fenómenos observados en el cerebro mediante técnicas como el EEG o la resonancia magnética funcional (FMRI).

Los modelos que se estudian en este trabajo tienen su origen en el trabajo de S. Amari [2], en el que el voltaje de una neurona ubicada en la posición x en el tiempo t, denominada $u(x,t)$, depende de la activación de las neuronas vecinas que se conectan a ella siguiendo una estructura que está determinada por un Kernel Sináptico $w : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$. Se entiende por activación la tasa a la que disparan potenciales de acción. En tal caso, $u(x,t)$ se rige por la siguiente ecuación integrodiferencial:

$$\frac{1}{\tau}u_t(x,t) + u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} w(x,y)f(u(y,t))dy \tag{1}$$

donde $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. El Kernel Sináptico generalmente es tomado como una función continua y acotada, con el fin de reproducir la topología de las conexiones sinápticas observadas en la estructura columnar de la corteza cerebral. Ejemplos de Kernel Sináptico son:

1. Una exponencial de la forma:
$$w(x) = \frac{1}{2}e^{-V|x|} \tag{2}$$
2. La función Sombrero Mexicano:
$$w(x) = \frac{1}{4}(1 - |x|)e^{-V|x|} \tag{3}$$

La función f es una función de activación sigmoidal $f(u) = 1/(1 + \exp(-\beta(u - h)))$ y determina la tasa de disparo de la neurona. La activación se define como la tasa de disparo dependiente del voltaje [2].

Para modelar cambios en el kernel relacionados con el aprendizaje, se introduce un término que modifca el kernel dependiendo de la coactivación de las neuronas en las posiciones x e y. En esta dirección, Abbassian et al [1] proponen el PVI:
$$\frac{1}{\tau}u_t(x,t) + u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} w(x,y)[1 + \gamma g(u(x,t) - u(y,t))]f(u(y,t))dy, \tag{4}$$
$$u(x,0) = u_0(x)$$
donde la función $g : \mathbb{R} \to [0,1]$, definida por:
$$g(u) = e^{-u^2} \tag{5}$$
determina la dinámica sináptica del aprendizaje.

Por otro lado, a partir de la teoría del aprendizaje Hebbiano [3], es posible obtener el siguiente modelo de campo neural con aprendizaje, que retiene muchas de las propiedades de los modelos de redes neronales discretos.
$$\frac{1}{\tau}u_t(x,t) + u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} w(x,y)h(u(x,t)u(y,t))f(u(y,t))dy, \tag{6}$$
$$u(x,0) = u_0(x)$$
Con h definida como:
$$h(u) = \gamma_p \frac{u}{\gamma_p u + \gamma_d} \tag{7}$$
donde γ_p y γ_d determinan la potenciación y depresión sinápticas.

2. Principales Resultados

Se tienen las siguientes hipótesis sobre la función de activación, de aprendizaje y el Kernel [4]:

Hipótesis 1. *Las funciones de activación, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y de aprendizaje $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfacen:*
$$f, g \in BC^1(\mathbb{R})$$
$$0 \leq f, g \leq 1 \tag{8}$$

Hipótesis 2. *El kernel sináptico w satisface:*

$$w(x,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^m), \qquad \forall x \in \mathbf{R}^m \tag{9}$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^m} \|w(x,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^m)} \leq C_w \tag{10}$$

$$\|w(x,\cdot) - w(\tilde{x},\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^m)} \leq k_w|x-\tilde{x}|, \qquad \forall x,\tilde{x} \in \mathbb{R}^m \tag{11}$$

$$|w(x,y)| \leq C_\infty, \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}^m \tag{12}$$

Para ciertas constantes C_w, k_w, $C_\infty > 0$.

Los principales resultados se enuncian mediante los siguientes teoremas:

Teorema 1 (Existencia local de soluciones para el CN con Kernel Dinámico (4))**.** *Suponga que la función de activación f, la función de aprendizaje g y el kernel sináptico w, satisfacen las hipótesis 1 y 2. Sea $\rho > 0$ suficientemente pequeño y y $\gamma = \gamma_0$ tales que (7) se cumpla, siendo L la constante de Lipschitz de f. Entonces, existe una única solución para (4) en $C([0,\rho];C(\mathbb{R}^m))$.*

Teorema 2. *El posible escoger un ρ constante (p.e. $\rho = 1/(2[1 + LC_w + \gamma(L+2K)C_w])$) e iterar el resultado para obtener* ***Existencia Global de Soluciones****.*

Teorema 3 (Límite del CN con Kernel Dinámico)**.** *Suponga que se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Las condiciones iniciales u_{0_γ} y u_0 tienen la siguiente propiedad:*

$$\lim_{\gamma\to 0} \|u_{0_\gamma} - u_0\|_{BC(\mathbf{R}^m)} = 0 \tag{13}$$

2. *$w \in L^1(\mathbf{R}^{m\times m})$ con $\|w(x,\cdot)\|_{L_1} \leq Cw$*
3. *$f \in BC(\mathbf{R})$ y $|f(u) - f(\bar{u})| \leq L|u-\bar{u}|$*

Si ρ es suficientemente pequeño, $u_\gamma \in BC(\mathbf{R}^m \times [0,\rho])$ y $u \in BC(\mathbf{R}^m \times [0,\rho])$ son soluciones de (4) y (6), respectivamente; se tiene:

$$\lim_{\gamma\to 0} \|u_\gamma - u\|_{BC(\mathbf{R}^m\times[0,\rho])} = 0 \tag{14}$$

Teorema 4 (Dependencia continua)**.** *Sean u, $\hat{u}$ soluciones de (4), con datos iniciales u_0 y $\hat{u}_0$, respectivamente, y $\gamma \in \mathbb{R}$ dado. Suponga que f, g y w satisfacen las hipótesis previamente planteadas. Entonces, existe una constante $C = C(\rho)$ tal que, para ρ suficientemente pequeño:*

$$\|u - \hat{u}\|_\rho \leq C\|u_0 - \hat{u}_0\|_{BC(\mathbb{R}^m)} \tag{15}$$

Referencias

[1] Abbassian, A. H., Fotouhi, M. & Heidari, M.(2012). Neural fields with fast learning dynamic kernel. Biological Cybernetics. 106, 15-26.

[2] Amari, S. (1977). Dynamics of pattern formation in Lateral-Inhibition type neural fields. Biological Cybernetics. 27, 77-87.

[3] Gerstner, W. & Kistler, W. M. (2002). Spiking Neuron Models: Single neurons, populations, plasticity. Cambridge University Press.

[4] Potthast, S. & Graben, P.B. (2010). Existence and properties of solutions for neural field equations. Mathematical Methods in Applied Science. 33, 935-949.

Weyl type theorems for restrictions of bounded linear operators

Carlos Carpintero

Universidad de Oriente, Departamento de Matemáticas, Escuela de Ciencias, Cumaná, Venezuela.

Universidad del Atlántico, Facultad de Ciencias Básicas, Barranquilla, Colombia. carpintero.carlos@gmail.com

Abstract

In this paper we give sufficient conditions for which Weyl's theorems for a bounded linear operator T, acting on a Banach space X, can be reduced to the study of Weyl's theorems for some restriction of T.

1. Introduction

Throughout this paper $L(X)$ denotes the algebra of all bounded linear operators acting on an infinite-dimensional complex Banach space X. For $T \in L(X)$, we denote by $N(T)$ the null space of T and by $R(T) = T(X)$ the range of T. We denote by $\alpha(T) := \dim N(T)$ the nullity of T and by $\beta(T) := \operatorname{codim} R(T) = \dim X/R(T)$ the defect of T. Other two classical quantities in operator theory are the *ascent* $p = p(T)$ of an operator T, defined as the smallest non-negative integer p such that $N(T^p) = N(T^{p+1})$ (if such an integer does not exist, we put $p(T) = \infty$), and the *descent* $q = q(T)$, defined as the smallest non-negative integer q such that $R(T^q) = R(T^{q+1})$ (if such an integer does not exist, we put $q(T) = \infty$). It is well known that if $p(T)$ and $q(T)$ are both finite then $p(T) = q(T)$. Furthermore, $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$ if and only if λ is a pole of the resolvent, see [12, Prop. 50.2]. An operator $T \in L(X)$ is said to be *Fredholm* (respectively, *upper semi -Fredholm*, *lower semi-Fredholm*), if $\alpha(T)$, $\beta(T)$ are both finite (respectively, $R(T)$ closed and $\alpha(T) < \infty$, $\beta(T) < \infty$). $T \in L(X)$ is said to be *semi-Fredholm* if T is either an upper semi-Fredholm or a lower semi-Fredholm operator. If T is semi-Fredholm the *index* of T defined by $\operatorname{ind} T := \alpha(T) - \beta(T)$. Other two important classes of operators in Fredholm theory are the classes of semi-Browder operators. These classes are defined as follows, $T \in L(X)$ is said to be *Browder* (resp. *upper semi-Browder*, *lower semi-Browder*) if T is a Fredholm (respectively, upper semi-Fredholm, lower semi-Fredholm) and both $p(T)$, $q(T)$ are finite (respectively, $p(T) < \infty$, $q(T) < \infty$). A bounded operator $T \in L(X)$ is said to be *upper semi-Weyl* (respectively, *lower semi-Weyl*) if T is upper Fredholm operator (respectively, lower semi-Fredholm) and index $\operatorname{ind} T \leq 0$ (respectively, $\operatorname{ind} T \geq 0$). $T \in L(X)$ is said to be *Weyl* if T is both upper and lower semi-Weyl, i.e. T is a Fredholm operator having index 0. The *Browder spectrum* and the *Weyl spectrum* are defined, respectively, by

$$\sigma_{\mathrm{b}}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ is not Browder}\},$$

and

$$\sigma_{\rm w}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ is not Weyl}\}.$$

Since every Browder operator is Weyl then $\sigma_{\rm w}(T) \subseteq \sigma_{\rm b}(T)$. Analogously, The *upper semi-Browder spectrum* and the *upper semi-Weyl spectrum* are defined by

$$\sigma_{\rm ub}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ is not upper semi-Browder}\},$$

and

$$\sigma_{\rm uw}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ is not upper semi-Weyl}\}.$$

In the sequel we need the following basic result:

Lemma 1. *If $T \in L(X)$ and $p = p(T) < \infty$, then the following statements are equivalent:*

(i) *There exists $n \geq p+1$ such that $T^n(X)$ is closed;*

(ii) *$T^n(X)$ is closed for all $n \geq p$.*

Proof. Define $c_i'(T) := \dim(N(T^i)/N(T^{i+1}))$. Clearly, $p = p(T) < \infty$ entails that $c_i'(T) = 0$ for all $i \geq p$, so $k_i(T) := c_i'(T) - c_{i+1}'(T) = 0$ for all $i \geq p$. The equivalence easily follows from [13, Lemma 12]. ∎

Now, we introduce an important property in local spectral theory. The localized version of this property has been introduced by Finch [11], and in the framework of Fredholm theory this property has been characterized in several ways, see Chapter 3 of [1]. A bounded operator $T \in L(X)$ is said to have *the single valued extension property* at $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ (abbreviated, SVEP at λ_0), if for every open disc $\mathbb{D}_{\lambda_0} \subseteq \mathbb{C}$ centered at λ_0 the only analytic function $f : \mathbb{D}_{\lambda_0} \to X$ which satisfies the equation

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = 0 \quad \text{for all } \lambda \in \mathbb{D}_{\lambda_0},$$

is the function $f \equiv 0$ on $\mathbb{D}_{\lambda_0}$. The operator T is said to have SVEP if T has the SVEP at every point $\lambda \in \mathbb{C}$. Evidently, $T \in L(X)$ has SVEP at every point of the resolvent $\rho(T) := \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$. Moreover, from the identity theorem for analytic functions it is easily seen that T has SVEP at every point of the boundary $\partial\sigma(T)$ of the spectrum. In particular, T has SVEP at every isolated point of the spectrum. Note that (see [1, Theorem 3.8])

$$p(\lambda I - T) < \infty \Rightarrow T \text{ has SVEP at } \lambda, \tag{1}$$

and dually

$$q(\lambda I - T) < \infty \Rightarrow T^* \text{ has SVEP at } \lambda. \tag{2}$$

Recall that $T \in L(X)$ is said to be *bounded below* if T is injective and has closed range. Denote by $\sigma_{\rm ap}(T)$ the classical *approximate point spectrum* defined by

$$\sigma_{\rm ap}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ is not bounded below}\}.$$

Note that if $\sigma_{\rm s}(T)$ denotes the *surjectivity spectrum*

$$\sigma_{\rm s}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ is not onto}\},$$

then $\sigma_{\rm ap}(T) = \sigma_{\rm s}(T^*)$ and $\sigma_{\rm s}(T) = \sigma_{\rm ap}(T^*)$.
It is easily seen from definition of localized SVEP that

$$\lambda \notin \operatorname{acc} \sigma_{\rm ap}(T) \Rightarrow T \text{ has SVEP at } \lambda, \tag{3}$$

where $\operatorname{acc} K$ means the set of all accumulation points of $K \subseteq \mathbb{C}$, and if T^* denotes the dual of T, then

$$\lambda \notin \operatorname{acc} \sigma_{\rm s}(T) \Rightarrow T^* \text{ has SVEP at } \lambda, \tag{4}$$

Remark 2. The implications (1), (2), (3) and (4) are actually equivalences whenever $T \in L(X)$ is semi-Fredholm (see [1, Chapter 3]).

Denote by $\operatorname{iso} K$ the set of all isolated points of $K \subseteq \mathbb{C}$. Let $T \in L(X)$, define

$$\begin{aligned} \pi_{00}(T) &= \{\lambda \in \operatorname{iso} \sigma(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\}, \\ \pi^a_{00}(T) &= \{\lambda \in \operatorname{iso} \sigma_{\rm ap}(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\}, \end{aligned}$$

Clearly, for every $T \in L(X)$ we have $\pi_{00}(T) \subseteq \pi^a_{00}(T)$.

Let $T \in L(X)$ be a bounded operator. Following Coburn [8], T is said to satisfy *Weyl's theorem*, in symbol (W), if $\sigma(T) \setminus \sigma_{\rm w}(T) = \pi_{00}(T)$. According to Rakočević [15], T is said to satisfy *a-Weyl's theorem*, in symbol (aW), if $\sigma_{\rm ap}(T) \setminus \sigma_{\rm uw}(T) = \pi^a_{00}(T)$.

Note that

$$a\text{-Weyl's theorem} \Rightarrow \text{ Weyl's theorem},$$

see for instance [1, Chapter 3]. The converse of these implication in general does not hold.

Weyl type theorems have been recently studied by several authors ([2],[3], [5], [6], [8], [9], [10], [15] and [16]). In these papers several results are obtained, by considering an operator $T \in L(X)$ in the whole space X. In this paper we give sufficient conditions for which Weyl type theorems holds for T, if and only if there exists $n \in \mathbb{N}$ such that the range $R(T^n)$ of T^n is closed and Weyl type theorems holds for T_n, where T_n denote the restriction of T on the subspace $R(T^n) \subseteq X$.

2. Preliminaries

In this section we establish several lemmas that will be used throughout the paper. We begin examinig some algebraic relations between T and T_n, T_n viewed as a operator from the space $R(T^n)$ in to itself.

Lemma 3. *Let $T \in L(X)$ and T_n, $n \in \mathbb{N}$, be the restriction of the operator T on the subspace $R(T^n) = T^n(X)$. Then, for all $\lambda \neq 0$, we have:*

(i) $N((\lambda I - T_n)^m) = N((\lambda I - T)^m)$, *for any* m;

(ii) $R((\lambda I - T_n)^m) = R((\lambda I - T)^m) \cap R(T^n)$, *for any* m;

(iii) $\alpha(\lambda I - T_n) = \alpha(\lambda I - T)$;

(iv) $p(\lambda I - T_n) = p(\lambda I - T)$;

(v) $\beta(\lambda I - T_n) = \beta(\lambda I - T)$.

Proof. (i) For $m = 0$,

$$N((\lambda I - T_n)^m) = N((\lambda I - T)^m),$$

holds trivially. Let $x \in N((\lambda I - T)^m)$, $m \geq 1$, then

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda I - T)^m x \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!}(-1)^k \lambda^{m-k} T^k x \\ &= \lambda^m x + \sum_{k=1}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!}(-1)^k \lambda^{m-k} T^k x. \end{aligned}$$

Thus $0 = \lambda^m x + h(T)x$, where $h(T) = \sum_{k=1}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!}(-1)^k \lambda^{m-k} T^k$. Hence $-\lambda^m x = h(T)x$, and since $\lambda \neq 0$, then $x = -\lambda^{-m} h(T)x$. From this equality, it follows that

$$(-\lambda^{-m} h(T))^2 x = -\lambda^{-m} h(T)(-\lambda^{-m} h(T)x) = -\lambda^{-m} h(T)x = x.$$

Consequently $x = (-\lambda^{-m} h(T))^2 x$. By repeating successively the same argument, we obtain that $x = (-\lambda^{-m} h(T))^j x$, for all $j \in \mathbb{N}$. But since $-\lambda^{-m} h(T)x \in R(T)$, then $(-\lambda^{-m} h(T))^j x \in R(T^j)$, for all $j \in \mathbb{N}$. Therefore $x = (-\lambda^{-m} h(T))^n x \in R(T^n)$, and since $R(T^n)$ is T-invariant subspace, we conclude that

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda I - T)^m x \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!}(-1)^k \lambda^{m-k} T^k x \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!}(-1)^k \lambda^{m-k} (T_n)^k x \\ &= (\lambda I - T_n)^m x \end{aligned}$$

So $x \in N((\lambda I - T_n)^m)$, and we get the inclusion

$$N((\lambda I - T)^m) \subseteq N((\lambda I - T_n)^m).$$

On the other hand, since T_n is the restriction of T on $R(T^n)$, and $R(T^n)$ is invariant under T, it then follows the inclusion

$$N((\lambda I - T_n)^m) \subseteq N((\lambda I - T)^m).$$

From which, we obtain that $N((\lambda I - T_n)^m) = N((\lambda I - T)^m)$.

(ii) Since T_n is the restriction of T on $R(T^n)$, and $R(T^n)$ is invariant under T, then

$$R((\lambda I - T_n)^m) \subseteq R((\lambda I - T)^m) \cap R(T^n).$$

Now, we show the inclusion $R((\lambda I - T)^m) \cap R(T^n) \subseteq R((\lambda I - T_n)^m)$. For this, it will suffice to show that for $m \in \mathbb{N}$, the implication

$$(\lambda I - T)^m x \in R(T^n) \Rightarrow x \in R(T^n),$$

holds. For $m = 1$. Let $y \in R(\lambda I - T) \cap R(T^n)$, then there exists $x \in X$ such that $\lambda x - Tx = (\lambda I - T)x = y \in R(T^n)$, so $\lambda^2 x - \lambda Tx = \lambda y \in R(T^n)$. But since $\lambda Tx - T^2 x = Ty \in R(T^n)$, because $\lambda x - Tx = y$ and $R(T^n)$ is invariant under T, we have that $\lambda^2 x - \lambda Tx$, $\lambda Tx - T^2 x \in R(T^n)$. Then

$$\lambda^2 x - T^2 x = \lambda^2 x - \lambda Tx + \lambda Tx - T^2 x \in R(T^n).$$

Thus $\lambda^2 x - T^2 x \in R(T^n)$. Hence $\lambda^3 x - \lambda T^2 x = \lambda(\lambda^2 x - T^2 x) \in R(T^n)$, and since $\lambda T^2 x - T^3 x = T^2 y \in R(T^n)$, we have that $\lambda^3 x - \lambda T^2 x$, $\lambda T^2 x - T^3 x \in R(T^n)$. From which,

$$\lambda^3 x - T^3 x = \lambda^3 x - \lambda T^2 x + \lambda T^2 x - T^3 x \in R(T^n).$$

That is, $\lambda^3 x - T^3 x \in R(T^n)$. Now, suppose that $\lambda^j x - T^j x \in R(T^n)$, for some $j \in \mathbb{N}$. From this, $\lambda^{j+1} x - \lambda T^j x = \lambda(\lambda^j x - T^j x) \in R(T^n)$, and $\lambda T^j x - T^{j+1} x = T^j y \in R(T^n)$, thus $\lambda^{j+1} x - \lambda T^j x$, $\lambda T^j x - T^{j+1} x \in R(T^n)$. From which,

$$\lambda^{j+1} x - T^{j+1} x = \lambda^{j+1} x - \lambda T^j x + \lambda T^j x - T^{j+1} x \in R(T^n).$$

Consequently, by mathematical induction, we obtain that $\lambda^j x - T^j x \in R(T^n)$ for all $j \in \mathbb{N}$. In particular, $\lambda^n x - T^n x \in R(T^n)$, and since $\lambda \neq 0$, then

$$x = \lambda^{-n}((\lambda^n x - T^n x) + T^n x) \in R(T^n).$$

By the above reasoning, we conclude that, for $m = 1$, the implication

$$(\lambda I - T)x \in R(T^n) \Rightarrow x \in R(T^n)$$

holds.

Now, suppose that for $m \geq 1$,

$$(\lambda I - T)^m x \in R(T^n) \Rightarrow x \in R(T^n).$$

If $(\lambda I - T)^{m+1} x \in R(T^n)$, then $(\lambda I - T)((\lambda I - T)^m x) \in R(T^n)$. From the proof of case $m = 1$, we conclude that $(\lambda I - T)^m x \in R(T^n)$. Therefore by inductive hypothesis, $x \in R(T^n)$. Then, by mathematical induction, we conclude that for all $m \in \mathbb{N}$

$$(\lambda I - T)^m x \in R(T^n) \Rightarrow x \in R(T^n),$$

holds.

Finally, if $y \in R((\lambda I - T)^m) \cap R(T^n)$ there exists $x \in X$ such that $(\lambda I - T)^m x = y \in R(T^n)$, then $(\lambda I - T)^m x \in R(T^n)$. As the above proof, we conclude that $x \in R(T^n)$. Thus

$$y \quad = \quad (\lambda I - T)^m x$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!}\lambda^{m-k}T^k x \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!}\lambda^{m-k}(T_n)^k x \\ &= (\lambda I - T_n)^m x, \end{aligned}$$

then $y \in R((\lambda I - T_n)^m)$. This shows that,

$$R((\lambda I - T)^m) \cap R(T^n) \subseteq R((\lambda I - T_n)^m).$$

Consequently, $R((\lambda I - T_n)^m) = R((\lambda I - T)^m) \cap R(T^n)$.

(iii) and (iv), it follows immediately from the equality,

$$N((\lambda I - T_n)^m) = N((\lambda I - T)^m), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

(v) Observe that $R(\lambda I - T_n)$ is a subspace of $R(T^n)$. Let M be a subspace of $R(T^n)$ such that $R(T^n) = R(\lambda I - T_n) \oplus M$. Since $R(\lambda I - T_n) = R(\lambda I - T) \cap R(T^n)$, we have

$$R(\lambda I - T) \cap M = R(\lambda I - T) \cap R(T^n) \cap M = R(\lambda I - T_n) \cap M = \{0\}.$$

Thus $R(\lambda I - T) \cap M = \{0\}$. Now, we show that $X = R(\lambda I - T) + M$.

Let $\mu \in \mathbb{C}$ such that $\mu I - T$ is invertible in $L(X)$, then $(\mu I - T)^j$ is invertible in $L(X)$, for all $j \in \mathbb{N}$. In particular $(\mu I - T)^m$ is invertible in L(X), for all $m \geq n$. Thus, if $y \in X$ there exists $x \in X$ such that $y = (\mu I - T)^m x$. Thus,

$$\begin{aligned} y &= (\mu I - T)^m x \\ &= \sum_{j=0}^{m} \frac{m!}{j!(m-j)!}(-1)^j \mu^{m-j} T^j x \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m!}{j!(m-j)!}(-1)^j \mu^{m-j} T^j x + \sum_{j=n}^{m} \frac{m!}{j!(m-j)!}(-1)^j \mu^{m-j} T^j x. \end{aligned}$$

Since $R(T^j) \subseteq R(T^n)$, for $n \leq j \leq m$, then we can write $y = u + v$, where:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m!}{j!(m-j)!}(-1)^j \mu^{m-j} T^j x \in X, \\ v &= \sum_{j=n}^{m} \frac{m!}{j!(m-j)!}(-1)^j \mu^{m-j} T^j x \in R(T^n). \end{aligned}$$

Now, from the above decomposition and for any $\lambda \neq 0$, we obtain a sequence $(y_k)_{k=0}^{\infty}$, where $y_k = \lambda^{-k-1}(\lambda I - T)T^k u$, for $k = 0, 1, ...$, such that

$$u = y_0 + y_1 + ... + y_{n-1} + \lambda^{-n} T^n u \in R(\lambda I - T) + R(T^n),$$

because $y_k = \lambda^{-k-1}(\lambda I - T)T^k u \in R(\lambda I - T)$ and $\lambda^{-n} T^n u \in R(T^n)$.

On the other hand,

$$v + \lambda^{-n}T^n u \in R(T^n) + R(T^n) = R(T^n) = R(\lambda I - T_n) + M.$$

Thus $v + \lambda^{-n}T^n u = z + m$, where $z \in R(\lambda I - T_n)$ and $m \in M$. From this, and since $R(\lambda I - T_n) \subseteq R(\lambda I - T)$, we obtain that

$$\begin{aligned} y &= u + v \\ &= y_0 + y_1 + ... + y_{n-1} + \lambda^{-n}T^n u + v \\ &= y_0 + y_1 + ... + y_{n-1} + z + m \\ &= (y_0 + y_1 + ... + y_{n-1} + z) + m \in R(\lambda I - T) + M. \end{aligned}$$

Therefore, we have that $X \subseteq R(\lambda I - T) + M$, consequently $X = R(\lambda I - T) + M$. But since $R(\lambda I - T) \cap M = \{0\}$, and hence it follows that $X = R(\lambda I - T) \oplus M$, which implies that $\beta(\lambda I - T) = \dim M = \beta(\lambda I - T_n)$. This shows that $\beta(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T_n)$. ∎

The following result concerning the ranges of the powers of $\lambda I - T$, where $\lambda \in \mathbb{C}$ and $T \in L(X)$, plays an important role in this paper. In the proof of this corollary we use the notion of paraclosed (or paracomplete) subspace and the Neubauer Lemma (see [14]).

Lemma 4. *If $R(T^n)$ is closed in X and $R((\lambda I - T_n)^m)$ is closed in $R(T^n)$, then there exists $k \in \mathbb{N}$ such that $R((\lambda I - T)^k)$ is closed in X.*

Proof. Observe that for $\lambda = 0$, $R((0I - T_n)^m) = R((T_n)^m) = R(T^{m+n})$. Then $R(T^{m+n})$ is a closed subspace of $R(T^n)$. Since $R(T^n)$ is closed, we have that $R((0I - T)^{m+n}) = R(T^{m+n})$ is closed. On the other hand, if $\lambda \neq 0$ and $R((\lambda I - T_n)^m)$ is a closed subspace of $R(T^n)$, since $R(T^n)$ is closed in X, we have that $R((\lambda I - T_n)^m)$ is closed in X. But, from the incise (ii) in the Lemma 3, $R((\lambda I - T_n)^m) = R((\lambda I - T)^m) \cap R(T^n)$. Thus $R((\lambda I - T)^m) \cap R(T^n)$ is closed in X. Also, if $\lambda \neq 0$ the polynomials $(\lambda - z)^m$ and z^n have no common divisors, so there exist two polynomials u and v such that $1 = (\lambda - z)^m u(z) + z^n v(z)$, for all $z \in \mathbb{C}$. Hence $I = (\lambda I - T)^m u(T) + T^n v(T)$ and so $R((\lambda I - T)^m) + R(T^n) = X$. Since both $R((\lambda I - T)^m)$ and $R(T^n)$ are paraclosed subspaces, and $R((\lambda I - T)^m) \cap R(T^n)$ and $R((\lambda I - T)^m) + R(T^n)$ are closed, using Neubauer Lemma [14, Prop. 2.1.2], we have that $R((\lambda I - T)^m)$ is closed. ∎

Recall that for an operator $T \in L(X)$, $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$ precisely when λ is a pole of the resolvent of T (see [12, Prop. 50.2]).

Lemma 5. *If 0 is not a pole of the resolvent of $T \in L(X)$ and $R(T^n)$ is closed, then $\pi_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T_n)$.*

Proof. By Lemma 3, $\sigma(T_n) \setminus \{0\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$. Also, $0 \notin \sigma(T)$ implies T bijective, thus $T = T_n$. Hence $\sigma(T_n) \subseteq \sigma(T)$. Moreover, iso $\sigma(T) \subseteq$ iso $\sigma(T_n)$. Since, if $\lambda \in$ iso $\sigma(T)$, then $\sigma(T) \cap \mathbb{D}_\lambda = \{\lambda\}$ for some open disc $\mathbb{D}_\lambda \subseteq \mathbb{C}$ centered at λ. Thus, $\sigma(T_n) \cap \mathbb{D}_\lambda \subseteq \sigma(T) \cap \mathbb{D}_\lambda = \{\lambda\}$. Consequently $\sigma(T_n) \cap \mathbb{D}_\lambda = \{\lambda\}$ or $\sigma(T_n) \cap \mathbb{D}_\lambda = \emptyset$. If $\sigma(T_n) \cap \mathbb{D}_\lambda = \emptyset$, then $\lambda \notin \sigma(T_n)$, so that $p(\lambda I - T_n) =$

$\beta(\lambda I - T_n) = 0$. For the case $\lambda \neq 0$, from Lemma 3, $p(\lambda I - T) = 0$ and $\beta(\lambda I - T) = 0$, then $\lambda \notin \sigma(T)$ a contradiction. In the case where $\lambda = 0$, $p(T_n) = q(T_n) = 0$ implies, by the Lemmas 2 and 3 in [7] and Proposition 38.6 in [12], that $0 < p(T) = q(T) < \infty$, which is impossible, because 0 is not a pole of the resolvent of T. Consequently, $\sigma(T_n) \cap \mathbb{D}_\lambda = \{\lambda\}$, so we have that $\lambda \in \text{iso } \sigma(T_n)$.

Now, the following argument shows that $\pi_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T_n)$. If $\lambda \in \pi_{00}(T)$, we have that $\lambda \in \text{iso } \sigma(T_n)$, because $\lambda \in \text{iso } \sigma(T)$. On the other hand, for $\lambda \neq 0$, Lemma 3 implies that $\alpha(\lambda I - T) = \alpha(\lambda I - T_n)$, so $0 < \alpha(\lambda I - T_n) < \infty$. For $\lambda = 0$, we claim that $\alpha(T_n) > 0$. If $\alpha(T_n) = 0$, we have that $p(T_n) = 0$. By Lemma 2 in [7], $p(T) < \infty$. Moreover [7, Remark 1],

$$p(T) = \inf \{k \in \mathbb{N} : T_k \text{ is injective}\} \leq n.$$

Thus, by the Lemma 1, T_n is bounded below, because T_n is injective and $R(T_n) = R(T^{n+1})$ is closed, so T_n is semi-Fredholm. Also $(T_n)^*$ has $SVEP$ at 0, because $0 \in \text{iso } \sigma(T_n)$, then $q(T_n) < \infty$ ([1, Chapter 3]), which implies ([7, Lemma 3]) that $q(T) < \infty$. Hence $0 < p(T) = q(T) < \infty$, a contradiction, since 0 is not a pole of the resolvent of T. Thus $0 < \alpha(T_n) = \alpha(0I - T_n)$. Finally, since $N(T_n) \subseteq N(T)$ and $\alpha(T) < \infty$ it then follows the equality $\alpha(T_n) = \alpha(0I - T_n) < \infty$. Thus, $0 \in \text{iso } \sigma(T_n)$ and $0 < \alpha(0I - T_n) < \infty$. Consequently $\lambda \in \pi_{00}(T_n)$, for each $\lambda \in \pi_{00}(T)$, so we have the inclusion $\pi_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T_n)$. ∎

The result of Lemma 5 may be extended as follows.

Lemma 6. *If 0 is not a pole of the resolvent of $T \in L(X)$ and $R(T^n)$ is closed, then $\pi_{00}^a(T) \subseteq \pi_{00}^a(T_n)$.*

Proof. If $\lambda \notin \sigma_{\text{ap}}(T)$, then $\lambda I - T$ is injective and $R(\lambda I - T)$ is closed. Now, here we consider the two different cases $\lambda \neq 0$ and $\lambda = 0$. If $\lambda \neq 0$, by Lemma 3, $N(\lambda I - T_n) = N(\lambda I - T)$ and $R(\lambda I - T_n) = R(\lambda I - T) \cap R(T^n)$ is closed. Hence $\lambda I - T_n$ is bounded below, and so $\lambda \notin \sigma_{\text{ap}}(T_n)$. In the other case, $-T$ bounded below implies that $0 = p(T) = p(T_n)$ and $R(T)$ is closed. Thus T_n is inyective and, by Lemma 1, $R(T_n) = R(T^{n+1})$ is closed. From this we obtain that T_n is bounded below. Consequently, $\sigma_{\text{ap}}(T_n) \subseteq \sigma_{\text{ap}}(T)$. Similarly, as in the proof of Lemma 5 and taking into account Lemma 4, we can prove that $\text{iso } \sigma_{\text{ap}}(T) \subseteq \text{iso } \sigma_{\text{ap}}(T_n)$.

Finally, to show $\pi_{00}^a(T) \subseteq \pi_{00}^a(T_n)$. Observe that, if $\lambda \in \pi_{00}^a(T)$ then $\lambda \in \text{iso } \sigma_{\text{ap}}(T)$ and $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$. Thus $\lambda \in \text{iso } \sigma(T_n)$. For $\lambda \neq 0$, by Lemma 3, $\alpha(\lambda I - T) = \alpha(\lambda I - T_n)$, and so $0 < \alpha(\lambda I - T_n) < \infty$. In the case $\lambda = 0$, $p(T_n) = 0$ and $R(T^n)$ is closed. Similarly to the case $p(T_n) = 0$ and $R(T^n)$ closed in the proof of Lemma 5, one shows that $0 < \alpha(0I - T_n) < \infty$. Consequently $\pi_{00}^a(T) \subseteq \pi_{00}^a(T_n)$. ∎

3. Weyl's theorems and restrictions

In this section we give conditions for which Weyl's theorem (resp. a-Weyl's theorem) for an operator $T \in L(X)$ is equivalent to the Weyl's theorem (resp. a-Weyl's theorem) for certain restriction T_n of T.

It is well known that if λ is a pole of the resolvent of T, then λ is an isolated point of the spectrum $\sigma(T)$. Thus, the following result is an immediate consequence of Lemmas 3 and 5.

Theorem 7. *Suppose that* 0 *is not an isolated point of* $\sigma(T)$*. Then* T *satisfies (W) if and only if there exists* $n \in \mathbb{N}$ *such that* $R(T^n)$ *is closed and* T_n *satisfies (W).*

Proof. (Necessity) Assume that there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $R(T^n)$ is closed and T_n satisfies (W). Let $\lambda \in \pi_{00}(T)$, i.e. $\lambda \in \text{iso}\,\sigma(T)$ and $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$. By hypothesis and Lemma 5, $0 \neq \lambda \in \pi_{00}(T_n) = \sigma(T_n) \setminus \sigma_{\text{w}}(T_n)$. Then $\alpha(\lambda I - T_n) = \beta(\lambda I - T_n) < \infty$ since $\lambda I - T_n$ is a Weyl operator, and so by Lemma 3

$$\alpha(\lambda I - T) = \alpha(\lambda I - T_n) = \beta(\lambda I - T_n) = \beta(\lambda I - T) < \infty.$$

Furthermore, $\lambda \in \sigma(T)$ because $\lambda \in \sigma(T_n) \subseteq \sigma(T)$. Thus $\lambda I - T$ is Weyl, and hence $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{\text{w}}(T)$. But since $\sigma(T) \setminus \sigma_{\text{w}}(T) \subseteq \pi_{00}(T)$, it then follows that $\pi_{00}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{\text{w}}(T)$, which implies that T satisfies (W).

(Sufficiency) Suppose that T satisfies (W). Then for $n = 0$, $R(T^0) = X$ is closed and $T_0 = T$ satisfies (W). ∎

In the same way as in the Theorem 7, we have the following characterization of the a-Weyl theorem for an operator throughout the a-Weyl theorem for some restriction of the operator.

Theorem 8. *Suppose that* 0 *is not an isolated point of* $\sigma(T)$*. Then* T *satisfies (aW) if and only if there exists* $n \in \mathbb{N}$ *such that* $R(T^n)$ *is closed and* T_n *satisfies (aW).*

Proof. (Necessity) Suppose that there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $R(T^n)$ is closed and T_n satisfies (aW). Let $\lambda \in \pi^a_{00}(T)$, by hypothesis and Lemma 6, $\lambda \in \pi^a_{00}(T_n) = \sigma_{\text{ap}}(T_n) \setminus \sigma_{\text{uw}}(T_n)$. Thus $\lambda I - T_n$ is a upper semi-Fredholm operator, because $\lambda I - T_n$ is a upper semi-Weyl operator. Since $\lambda I - T_n$ is upper semi-Fredholm, it follows that $R((\lambda I - T_n)^m)$ is closed in $R(T^n)$ for all $m \in \mathbb{N}$, and so by Lemma 4, there exists $k \in \mathbb{N}$ such that $R((\lambda I - T)^k)$ is closed. But since $\alpha(\lambda I - T) < \infty$, then $\alpha((\lambda I - T)^k) < \infty$. That is, $(\lambda I - T)^k$ is a upper semi-Fredholm operator, which implies that $\lambda I - T$ is upper semi-Fredholm. Furthermore, T has $SVEP$ at λ because $\lambda \in \text{iso}\,\sigma_{\text{ap}}(T)$. Consequently, if $\lambda \in \pi^a_{00}(T)$ then $\lambda I - T$ is upper semi-Fredholm and $p(\lambda I - T) < \infty$. Hence $\lambda I - T$ is upper semi-Weyl and $\lambda \in \sigma_{\text{ap}}(T)$, thus $\lambda \in \sigma_{\text{ap}}(T) \setminus \sigma_{\text{uw}}(T)$, and we obtain the inclusion $\pi^a_{00}(T) \subseteq \sigma_{\text{ap}}(T) \setminus \sigma_{\text{uw}}(T)$. But since $\sigma_{\text{ap}}(T) \setminus \sigma_{\text{uw}}(T) \subseteq \pi^a_{00}(T)$, it then follows that $\pi^a_{00}(T) = \sigma_{\text{ap}}(T) \setminus \sigma_{\text{uw}}(T)$, which implies that T satisfies (aW).

(Sufficiency) If T satisfies (aW). Then for $n = 0$, trivially $R(T^0) = X$ is closed and $T_0 = T$ satisfies (aW). ∎

Clearly, T has SVEP at every isolated point of $\sigma(T)$. Thus, by Theorem 7 and Theorem 8, we have the following corollary.

Corollary 9. *If* T *does not have SVEP at* 0*, then:*

i) there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $R(T^n)$ is closed and T_n satisfies (W) if and only if T satisfies (W).

ii) there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $R(T^n)$ is closed and T_n satisfies (aW) if and only if T satisfies (aW). ∎

Remark 10. *There are more alternative ways to express Corollary 9. We may replace the assumption T does not have SVEP at 0 by: $0 \notin \partial\sigma(T)$, $p(T) = \infty$ or $q(T) = \infty$.*

References

[1] P. Aiena. *Fredholm and Local Spectral Theory, with Application to Multipliers.* Kluwer Acad. Publishers (2004).

[2] P. Aiena. *Classes of Operators Satisfying a-Weyl's theorem.* Studia Math. **169** (2005), 105-122.

[3] P. Aiena, E. Aponte, E. Balzan. *Weyl type theorems for left and right polaroid operators.* Int. Equa. Oper. Theory. **136**, (2010), 2839-2848.

[4] P. Aiena, M. T. Biondi, C. Carpintero. *On Drazin invertibility.* Proc. Amer. Math. Soc. **136**, (2008), 2839-2848.

[5] P. Aiena, P. Peña. *A variation on Weyl's theorem.* J. Math. Anal. Appl. **324** (2006), 566-579.

[6] M. Amouch. *Weyl type theorems for operators satisfying the single-valued extension property,* J. Math. Anal. Appl. 326(2007)1476-1484.

[7] C. Carpintero, O. García, E. Rosas and J. Sanabria. *B-Browder Spectra and Localized SVEP,* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 57 (2008), 241-255.

[8] L. A. Coburn. *Weyl's Theorem for Nonnormal Operators,* Research Notes in Mathematics, 51 (1981).

[9] R. Curto, Y. M. Han. *Generalized Browder's and Weyl's Theorem for Banach Spaces Operators,* J. Math. Anal. Appl. 418 (2007), 385-389.

[10] B. P. Duggal. *Polaroid operators satisfying Weyl's Theorem ,* Linear Algebra and its Appl.. Appl. 414 (2006), 271-277.

[11] J. K. Finch. *The single valued extension property on a Banach space.* Pacific J. Math. 58 (1975), 61-69.

[12] H. Heuser. *Functional Analysis*, Marcel Dekker, New York 1982.

[13] M. Mbekhta, V. Müller. *On the axiomatic theory of the spectrum II.* Studia Math. **119** (1996), 129-147.

[14] J. P. Labrousse. *Les opérateurs quasi Fredholm: une généralization des opérateurs semi Fredholm.* Rend. Circ. Mat, Palermo (2) **29** (1980), 161-258.

[15] V. Rakočević. *Operators obeying a-Weyl's theorem,* Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **34** (1989), N^0 10, 915-919.

[16] H. Zguitti. *A note on generalized Wey'ls theorem*, J. Math. Anal. Appl. **316** (1) (2006), 373-381.

Una aplicación de las funciones hipergeométricas

Juan Carlos López C.* y Rosalba Mendoza Suárez**

*Universidad de Pamplona, Pamplona, Colombia, jclopez@unipamplona.edu.co

**Universidad de Pamplona, Pamplona, Colombia, rosalbame@unipamplona.edu.co

Resumen

Se presentan algunos ejemplos, que nos permiten demostrar cómo sumas de productos de coeficientes binomiales pueden ser reducidas a series hipergeométricas, veremos que el carácter esencial de tales sumas se evidencian escribiéndolas como series hipergeométricas.

1. Introducción

El objetivo de la charla es mostrar cómo ciertas sumas de productos de coeficientes binomiales y otras sumas "interesantes"se pueden reducir a series hipergeométricas, y de esta manera calcular su valor, con el fin de ilustrar la metodología, se ha seleccionado, a gusto de los autores de la propuesta, los siguientes ejemplos:

- El problema 3399 de la revista *The American Mathematical Monthy*, considerado en la revista como uno de los mejores 400 problemas (1918-1950), pide probar o refutar

$$\sum_{k=0}^{t}(-1)^k \binom{r+1}{k} \binom{2r-2k}{r} = r+1$$

  donde $t = \frac{r}{2}$ si r es par y $t = \frac{(r-1)}{2}$ si r es impar.

- El desarrollo en serie de fracciones parciales para la función $\pi\cot(\pi x)$, es conocida desde Euler, numerosas pruebas de este desarrollo han aparecido en la literatura matemática. El objetivo de este ejemplo es presentar aún otra prueba de ello aplicando la teoría de las series hipergeométricas.

2. Algunos resultados

Se quiere socializar por parte de los autores la manera como resolvemos los ejemplos que aparecen en la introducción optimizando la teoría de las series hipergeométricas.

Referencias

[1] R. Askey, *Orthogonal Polynomials and Special Functions*, Regional Conference Series in Applied Mathematics, Volume 21 (SIAM, Philadelphia, 1975).

[2] J. L. Fields, J. Wimp, *Expansions of hypergeometric functions in hypergeometric functions*, Math. Comp. **15** (1961), 390–395.

[3] S. Lewanowicz, *The hypergeometric functions approach to the connection problem for the classical orthogonal polynomials*, Preprint (1997).

[4] Y. L. Luke, *The Special Functions and their Approximations* (Academic, New York, 1969).

[5] Jerry L. Fields and Mourad E. H. Ismail. *Polynomial expansion,* Math. Comp. **131** (1975), 894-902.

[6] Jerry L. Fields and J:Wimp, /em Expansions of hypergeometric functions in hypergeometric functions, Math. Comp. **15** (1961), 390-395.

Grado de Brouwer

Rafael A. Castro T.* y Raúl A. Gómez T.**

*Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, rcastro@uis.edu.co

**Estudiante de Matemáticas de la UIS, Bucaramanga, Colombia, raul.gomez3@uis.edu.co

Resumen

Como la mayoría de las ecuaciones diferenciales no pueden resolverse de forma explícita, se utilizan métodos numéricos para obtener información cuantitativa y los métodos, analíticos , topológicos, dan información cualitativa. El grado de Brouwer es una herramienta topológica que permite obtener información cualitativa sobre una amplia variedad de problemas no lineales. En este trabajo estamos interesados en socializar los fundamentos de la teoría del grado de Brouwer: definición, propiedades, ejemplos y algunas aplicaciones.

1. Introducción

La demostración del siguiente teorema, usando teoría de grado es muy simple. La presentaremos más adelante.

Teorema 1 (Teorema de punto fijo de Brouwer)**.** *Sea* $\Omega = B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| < r\}$.

Toda aplicación continua, $f : \overline{B}_r(0) \to \overline{B}_r(0)$*, tiene por lo menos un punto fijo.*

1.1. Existencia de soluciones

Operador de Poincaré. Para resolver el problema

$$\frac{du}{dt} = f(t,u) \qquad u(0) = u(1), \tag{1}$$

en donde $f : [0,1] \times \mathbb{R}^n$ es continua y Lipschitz en la incognita $u : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, primero se resuelve el problema

$$\frac{du}{dt} = f(t,u) \qquad u(0) = \lambda, \qquad (\lambda \in \mathbb{R}^n) \tag{2}$$

para un λ adecuado de tal forma que la solución obtenida $u_\lambda(t)$ este definida en $t = 1$. Esto permite definir el operador $P(\lambda) = u_\lambda(1)$, llamado *operador de Poincaré*. En general, no es posible determinar el dominio de P con exactitud, pero se sabe que contiene un subconjunto compacto y convexo K tal que $P : K \to K$. En este caso el teorema 1, garantiza que P tiene un punto fijo λ_0, $P(\lambda_0) = u_{\lambda_0}(1) = \lambda_0 = u_{\lambda_0}(0)$. Por lo tanto, u_{λ_0} es una solución del problema (1). El siguiente ejemplo ilustra la anterior situación.

Proposición 2. *Sea $f : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua, y $f(t,u)$ localmente Lipschitz en u tal que*

$$f(t,u) \cdot u < 0 \qquad \text{para } ||u|| = r,$$

en donde $\cdot$ y $||\cdot||$ denotan respectivamente el producto interno y la norma, usuales de $\mathbb{R}^n$, y r una constante positiva. Entonces el problema (1) tiene al menos una solución u tal que $||u||_\infty \leq r$.

Demostración. Sean $\lambda \in \mathbb{R}^n$ tal que $||\lambda|| \leq r$, y u_λ la solución del problema (2) tal que que u_λ está definida hasta cierto valor T. Afirmamos que $||u_\lambda(t)|| \leq r, \forall t \in [0,T]$. En efecto llamando $g(t) = ||u_\lambda(t)||^2$, se tiene $g'(t) = 2u_\lambda(t) \cdot u'_\lambda(t) = 2u_\lambda(t) \cdot f(t, u_\lambda(t))$. Si $g(0) = ||\lambda||^2 < r^2$, entonces $g(t)$ no puede crecer hasta tomar el valor r^2, mientras que si $g(0) = ||\lambda||^2 = r^2$ entonces $g(t)$ decrece en un entorno de cero y luego no puede volver a crecer hasta r^2. Por lo tanto $u_\lambda(t)$ se puede extender hasta $T = 1$.

Ahora, tomando $T = 1$, $||P(\lambda)|| = ||u_\lambda(1)|| \leq r$, esto es, $P : \overline{B}_r(0) \to \overline{B}_r(0)$, $P(\lambda) = u_\lambda(1)$. Por el Teorema de la dependencia de los datos iniciales, el operador P resulta ser continuo, y por el Teorema de punto fijo Brouwer P tiene un punto fijo. Esto es, existe $\lambda_* \in \overline{B}_r(0)$ tal que $P(\lambda_*) = u_{\lambda_*}(1) = \lambda_* = u_{\lambda_*}(0)$. Por lo tanto u_{λ_*} es una solución del problema(1). □

2. Propiedades del grado de Brouwer

Sea $M = \{(f, \Omega, p) : \Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ continua y $p \notin f(\partial\Omega)\}$.

El siguiente teorema afirma que a cada tripla (f, Ω, p) se le puede asociar un entero notado $d(f, \Omega, p)$ y llamado ***grado de Brouwer de*** f en Ω con respecto a p.

Teorema 3. *Existe una única aplicación $d : M \to \mathbb{Z}$, llamado grado de Brouwer, que satisface las siguientes propiedades:*

$(d1)$ *(Normalización) Si $p \in \Omega$, I la aplicación identidad entonces $d(I, \Omega, p) = 1$.*

$(d2)$*(Aditividad) Si Ω_1 y Ω_2 son subconjuntos abiertos disjuntos de Ω y $p \notin f(\overline{\Omega} - (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ entonces $d(f, \Omega, p) = d(f, \Omega_1, p) + d(f, \Omega_2, p)$.*

$(d3)$*(Invariancia por homotopías) Si $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ son funciones continuas, $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ es continua tal que $h(x,0) = f(x)$, $h(x,1) = g(x)$ y $p \notin h(t, \partial\Omega) \quad \forall t \in [0,1]$, entonces $d(f, \Omega, p) = d(g, \Omega, p)$.*

Para su demostración remitimos el lector al Teorema 1.1 en [2, pag. 12]. Otras propiedades son:

$(d4)$ (Existencia) Si $d(f, \Omega, p) \neq 0$ entonces existe $x \in \Omega$ tal que $f(x) = p$.

$(d5)$ (Dependencia de los valores en la frontera) Si $f(x) = g(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$ entonces $d(f, \Omega, p) = d(g, \Omega, p)$.

$(d6)$ (Escisión) Si $\Omega_1 \subset \Omega$ es un abierto y $p \notin f(\overline{\Omega} - \Omega_1)$ entonces $d(f, \Omega, p) = d(f, \Omega_1)$

($d7$) (Grado de aplicaciones lineales inversibles) Si $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es lineal con $\det(A) \notin 0$ y $p \in \Omega$, $d((A, \Omega, p) = signo(\det(A))$.

Teorema 4 (Teorema de Brouwer del punto fijo)**.** *Sea $B = B_r(0)$ una bola abierta $B \subset \mathbb{R}^n$ y $f : \overline{B} \to \overline{B}$ es continua entonces existe $x \in \overline{B}$ tal que $f(x) = x$.*

Demostración. Supongamos que $f(x) \neq x \quad \forall x \in \partial B$ (en caso contrario el teorema ya estaría probado). Considerando la homotopía $h(t, x) = x - tf(x)$, se tiene que $h(1, x) \neq 0$ y $\forall x \in \partial B_r(0)$. Ahora, si $t \in [0, 1)$ y $x \in \partial B_r(0)$ se tiene

$$||h(t, x)|| = ||x - tf(x)|| \geq ||x|| - t||f(x)|| = r - t||f(x)|| \geq r - rt = r(1 - t) > 0.$$

Entonces por ($d3$) y ($d1$) se tiene $d(I - f, B, 0) = d(h(1, .), B, 0) = d(h(0, .), B, 0) = d(I, B, 0) = 1$ Entonces $d(I - f, B, 0) = 1 \neq 0$ y por ($d4$) existe $x \in B$ tal que $x - f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$. □

3. Cálculo del grado de Brouwer

Definición 5. *Sean: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 y $S_f = \{x_0 \in \Omega : \det(f'(x_0)) = 0\}$ el conjunto de los puntos críticos de f en Ω. Un punto $p \in \mathbb{R}^n$ es un* valor regular *si $f^{-1}(p) \cap S_f = \phi$, y un* valor singular *en caso contrario.*

Definición 6. *Sean Ω un conjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ función de clase $C^k(\Omega), k \geq 1$. Si $p \in \mathbb{R}^n - f(\partial\Omega)$ es valor regualar de f, definimos $d(f, \Omega, p)$ por :*

$$d(f, \Omega, p) = \begin{cases} \sum_{x \in f^{-1}(p)} signoJ_f(x), & si \quad f^{-1}(p) \neq \phi, \\ 0, & si \quad f^{-1}(p) = \phi, \end{cases}$$

La anterior definición está bien definida ya que $\overline{\Omega}$ es compacto, y por ser p valor regular, el conjunto $f^{-1}(p)$ es finito(consecuencia del Teorema de la función inversa). Sea

$$\mathcal{A}(p) = \{f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) : f \neq p \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega\}$$

El anterior conjunto es abierto con la distancia inducida por la norma $|| \cdot ||_\infty$: si $f \in \mathcal{A}(p)$, $r = dist(p, f(\partial\Omega))$, entonces la bola abierta $B_r(f) \subset \mathcal{A}(p)$.

Si f es de clase C^1 tal que $f \neq p$ sobre $\partial\Omega$ y además p es un valor regular de f, se tiene $d(f, \Omega, p) = d(f - p, \Omega, 0)$. El conjunto $C^\infty_{reg}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ de las funciones de clase C^∞ para las que 0 es un valor regular, es denso en $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$.

Sean $f \in \mathcal{A}(0) \cap C^\infty_{reg}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $g \in C^\infty_{reg}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ funciones tales que $||g - f||_\infty < dist(0, f(\partial\Omega))$, entonces se tiene $d(g, \Omega, 0) = d(f, \Omega, 0)$. El grado en este caso *es localmente constante para funciones suficientemente próximas.* También si $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 tal que 0 es valor regular y $f \neq 0$sobre $\partial\Omega$. Entonces existe una vecindad V del 0 tal que si $y \in V$, y es valor regular de f, $f \neq y$ en $\partial\Omega$, y se tiene $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega, 0)$. El grado es *localmente constante para puntos suficientemente próximos.*

Si el $0 \in \mathbb{R}^n$ no es un valor regular de f, el lema de Sard afirma que $f(S_f)$ tiene medida de Lebesgue cero (ver Proposición 1.4 en [2, pag. 8]). Entonces podemos encontrar una sucesión de valores regulares $\{y_k\}$ convergentes a 0 y definimos

$$d(f, \Omega, 0) = \lim_{k\to\infty} d(f - y_k, \Omega, 0)$$

Observe que la función $f_k = f - y_k$ es C^1 y el cero es un valor regular de esta función para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ahora si $f \in C(\overline{\Omega})$, entonces existe una sucesión de funciones f_k de clase C^1 la cual converge uniformemente a f (por el teorema de aproximación de Weierstrass), tal que $f_k(x) \neq 0, \forall x \in \partial\Omega$. En este caso se define

$$d(f, \Omega, 0) = \lim_{k\to\infty} d(f_k, \Omega, 0).$$

4. Ejercicios

1. Sean $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Muestre que que $(1, 0)$ es un valor regular y determine $d(f, \Omega, (1, 0))$. Observe que la ecuación $f(x, y) = (1, 0)$ corresponde a la ecuación compleja $f(x + iy) = (x + iy)^2 = (1, 0)$ o $z^2 = 1$ en el plano complejo la cual tiene dos soluciones.

2. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que no se anula en la frontera del intervalo $[-1, 1]$. Demuestre que

$$d(f, (-1, 1), 0) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad f(-1) < 0 < f(1) \\ -1 & \text{si} \quad f(-1) > 0 > f(1) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{3}$$

   Esto muestra que el grado depende de los valores en la frontera. También que el grado no "cuenta" en general la cantidad de ceros; una función puede tener muchos ceros, pero la suma de sus signos se puede reducir finalmente a 0,1 o -1.

Referencias

[1] Amster P., *Métodos Topológicos en el Análisis no lineal*, Publicaciones Matemáticas IMPA (2009), 90–100.

[2] Deimling K., *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin (1985), 1–20.

[3] O'Regan D. & Cho Y. J. & Chen Y. Q., *Topological degree theory and applications*, Series in Mathematical Analysis and Applications 10 (2006), 1–23.

Un problema de control óptimo asociado al modelo Rayleigh-Bénard-Marangoni

Diego Armando Rueda Gómez

Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia. diego.rueda0@gmail.com

Resumen

El estudio de un problema de control óptimo asociado a ecuaciones de estado dadas por un modelo de ecuaciones en derivadas parciales que describen el movimiento de fluidos por gradientes de temperatura, sobre condiciones de frontera particulares, es conocido en la literatura como problema de Rayleigh-Bénard-Marangoni. En términos generales, el problema de control óptimo que deseamos tratar consiste en la minimización de un funcional $J(\cdot,\cdot)$ dependiendo de controles actuando sobre partes de la frontera del dominio, y de variables de estado que resuelven las ecuaciones diferenciales, denominadas ecuaciones de estado. El funcional a ser minimizado envuelve la velocidad y la temperatura del fluido, con respecto a una velocidad y una temperatura deseada.

Para el planteamiento del problema de control que deseamos abordar, consideramos el siguiente sistema de EDPs:

$$\vec{u}\cdot\nabla\vec{u} = Pr\left[(b+RT)\,\vec{e}_3 - \nabla p + \Delta\vec{u}\right] \qquad \text{en } \Omega, \tag{1}$$

$$\vec{u}\cdot\nabla T = \Delta T \qquad \text{en } \Omega, \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\vec{u} = 0 \qquad \text{en } \Omega, \tag{3}$$

$$u_i\,|_{\Gamma_0^1} = g_i, \;\; i=1,2,3, \tag{4}$$

$$u_i\,|_{\Gamma_0^2} = u_0^i, \;\; i=1,2,3, \;\; \Gamma_0 = \Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2, \tag{5}$$

$$u_3\,|_{\Gamma_1} = 0. \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial\vec{n}} + M\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)\Big|_{\Gamma_1} = 0, \;\; i=1,2, \tag{7}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\vec{n}}\Big|_{\Gamma_0\setminus\{x_3=0\}} = \phi_1, \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial\vec{n}} + BT\right)\Big|_{\Gamma_1} = 0, \qquad T\,|_{\{x_3=0\}} = \phi_2. \tag{8}$$

Considerando el sistema (1)-(8), planteamos el siguiente problema de control óptimo:

Minimizar el funcional objetivo

$$J((u,\theta,g_1,g_2,g_3,\phi_1,\phi_2) = \frac{\gamma_1}{2}\|\mathrm{rot}\, u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\gamma_2}{2}\|u-u_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\gamma_3}{6}\|\theta-\theta_d\|^6_{L^6(\Omega)} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\gamma_{3+i}}{2}\|g_i\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_0^1)} + \frac{\gamma_7}{2}\|\phi_1\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_0\setminus\{x_3=0\})} + \frac{\gamma_8}{2}\|\phi_2\|^2_{H^{1/2}(\{x_3=0\})}, \quad (9)$$

sujeto a que el par (u,θ) sea solución de (1)-(8). En (9) u_d, θ_d son dados y representan una velocidad y una temperatura deseada, respectivamente. Como es usual, *rot* u denota el rotacional del campo velocidad u. Las funciones $g_1, g_2, g_3, \phi_1, \phi_2$ y son controles sobre las respectivas partes de la frontera $\partial\Omega$. El funcional J a ser minimizado es bastante completo, una vez que contempla controles de tipo distributivo, controles sobre la frontera, y adicionalmente, se contempla la minimización del rotacional de la velocidad, en la norma $L^2(\Omega)$.

Se expondrá en primer lugar un resultado que garantiza la existencia de solución del sistema (1)-(8). En segundo lugar, se probará la existencia de solución óptima para el problema de control (9). Finalmente, se probará el teorema que garantiza la existencia de los multiplicadores de Lagrange para el problema planteado.

ÁLGEBRA, COMBINATORIA Y TEORÍA DE NÚMEROS

Plenarias y semiplenarias

El mínimo común múltiplo de los elementos de un conjunto de enteros

Javier Cilleruelo

Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT) y Departamento de Matemáticas de la UAM, Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, España, franciscojavier.cilleruelo@uam.es

Resumen

Chebyshev, en su estudio sobre la distribución de los números primos, introdujo la función

$$\psi(n) = \log \text{m.c.m.}\{1, \dots, n\}$$

que hoy lleva su nombre. Chebyshev observó que la estimación asintótica $\psi(n) \sim n$ es equivalente al Teorema de los números primos, felizmente demostrado por Jacques Hadamard y Charles-Jean de la Vallée Poussin en 1896:

$$\pi(x) = \#\{p \text{ primo} : \ p \leq x\} \sim \frac{x}{\log x}.$$

De hecho no es difícil demostrar que la Hipótesis de Rieman es equivalente a probar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\psi(n) - n|}{n^{1/2+\epsilon}} = 0$$

para todo $\epsilon > 0$.

Una vez justificado el interés de la función $\psi(n)$ y admitida nuestra incapacidad para demostrar la Hipótesis de Rieman, es natural considerar otras generalizaciones de esta función.

Dado un polinomio $q(x)$ con coeficientes enteros, definimos la función análoga que considera los primeros n valores del polinomio $q(x)$:

$$\psi_q(n) = \log \text{m.c.m.}\{q(1), \dots, q(n)\}.$$

Cuando $q(x) = ax+b$, un polinomio lineal, Paul Bateman [1], utilizando el Teorema de los números primos para progresiones aritméticas, demostró la estimación asintótica

$$\psi_q(n) \sim n\frac{r}{\phi(r)} \sum_{\substack{1\leq k\leq r\\(k,r)=1}} \frac{1}{k},$$

donde $r = a/(a, b)$. En el caso particular $q(x) = x$ se recupera la función de Chebyshev y su estimación asintótica.

Cuando $q(x)$ es de grado superior el problema se vuelve mñas difícil porque no tenemos un teorema equivalente para primos en sucesiones polinómicas de grado 2 o superior. Pero siguiendo una estrategia distinta obtenemos [2] una estimación asintótica para polinomios cuadráticos.

Teorema 1. *Si $q(x)$ es un polinomio cuadrático irreduble entonces*

$$\psi_q(n) = n\log n + B_q n + o(n)$$

donde B_q es una constante que puede ser calculada explícitamente.

Por ejemplo, cuando $q(x) = x^2 + 1$ la constante es

$$B_q = \gamma - 1 - \frac{\log 2}{2} - \sum_{p\neq 2} \frac{\left(\frac{-1}{p}\right)\log p}{p-1} = -0{,}06627563..$$

Cuando $q(x)$ es un polinomio reducible el comportamiento asintótico es distinto:

Teorema 2. *Si $q(x)$ es un polinomio cuadrático reducible entonces*

$$\psi_q(n) = C_q n + o(n)$$

donde C_q es una constante que puede ser calculada explícitamente.

En la segunda parte de la charla presentamos un trabajo conjunto con Juanjo Rué, Paulius Sarka y Ana Zmalacárregui [3] donde estudiamos el comportamiento típico del mínimo común múltiplo de un conjunto aleatorio $A \subset \{1,\dots,n\}$. Para ello definimos la función

$$\psi(A) = \log \text{m.c.m.}\{a :\ a \in A\}$$

y consideramos dos modelos aleatorios. En el primero de ellos, que denominamos $B(n,\delta)$, cada uno de los elementos $x \in \{1,\dots,n\}$ pertenecen a A con probabilidad δ y de manera independiente.

Teorema 3. *Si $\delta n \to \infty$ entonces*

$$\psi(A) \sim n\frac{\delta\log(\delta^{-1})}{1-\delta}$$

con probabilidad $1 - o(1)$ en $B(n,\delta)$ cuando $n \to \infty$.

El caso particular $\delta = 1/2$ da lugar al siguiente resultado sobre $\psi(A)$ cuando cada conjunto A es elegido con la misma probabilidad.

Corolario 4. *Para casi todos los conjuntos $A \subset \{1,\dots,n\}$ se tiene que*

$$m.c.m.\{a :\ a \in A\} = 2^{n(1+o(1))}.$$

En el segundo modelo, que denominamos $S(n,k)$, los conjuntos $A \subset \{1,\dots,n\}$ se eligen de manera uniforme entre todos los que tienen un tamaño dado $k = k(n)$.

Teorema 5. *Si $k \to \infty$ entonces*

$$\psi(A) \sim k\frac{\log(n/k)}{1-k/n}$$

con probabilidad $1 - o(1)$ en $S(n,k)$ cuando $n \to \infty$.

Es interesante, aunque no sorprendente, observar que el comportamiento asintótico obtenido en el Teorema 1 para polinomios irreducibles coincide con el comportamiento típico de un un conjunto aleatorio del correspondiente tamaño en el Teorema 4 (por ejemplo, $k = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ en el caso $q(x) = x^2 + 1$).

Referencias

[1] P. Bateman, J. Kalb and A. Stenger, A limit involving Least Common Multiples, *American Mathematical Monthly* 10797, **109** (2002), no. 4, 393-394.

[2] J. Cilleruelo, The least common multiple of a quadratic sequence, *Compositio Mathematica* **147** (2011) no. 4, 1129-1150.

[3] J. Cilleruelo, J. Rué, P. Šarka, A. Zumalacárregui. The least common multiple of random sets of positive integers. Preprint.

Involuciones & álgebras de grupo normales

Alexander Holguín Villa*, a

*Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, alexholguinvilla@gmail.com

[a]Soporte Financiero: **CAPES** - **C**oordenação de **A**perfeiçoamento de **P**essoal de **N**ível **S**uperior, BRASIL

Resumen

Denotemos por $\mathbb{F}G$ la álgebra de grupo de un grupo G sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ de $char(\mathbb{F}) \neq 2$, y consideremos $\circledast : \mathbb{F}G \to \mathbb{F}G$ la involución definida por $\alpha = \sum_{g\in G} \alpha_g g \mapsto \alpha^{\circledast} = \sum_{g\in G} \alpha_g \sigma(g) g^*$, donde $\sigma : G \to \{\pm 1\}$ es un homomorfismo de grupo (*morfismo orientación*) y $*$ es una involución del grupo G. La álgebra de grupo $\mathbb{F}G$ es normal si para todo $\alpha \in \mathbb{F}G$, se satisface la $\circledast$-identidad $\alpha\alpha^{\circledast} = \alpha^{\circledast}\alpha$. En esta mini-charla caracterizamos cuando $\mathbb{F}G$ es una álgebra normal en el caso que $\sigma(g) = 1$, para todo $g \in G$. Usando esta caracterización, obtenemos condiciones necesarias y suficientes de cuando $\mathbb{F}G$ es normal con respecto a la involución orientada $\circledast$.

1. Introducción

Sea $\mathbb{F}G$ la álgebra de grupo de un grupo G sobre el cuerpo $\mathbb{F}$. Es posible definir en $\mathbb{F}G$ una involución de forma natural dada por:

$$\sum_{g\in G} \alpha_g g \longmapsto \sum_{g\in G} \alpha_g g^{-1}.$$

Esta involución, conocida como la *involución clásica*, aparece como herramienta técnica para obtener resultados sobre unidades en un artículo de G. Higman **[6]**. En particular, ella es usada para demostrar que si G es un grupo abeliano finito, entonces $\mathbb{Z}G$ tiene unidades no-triviales excepto si los ordenes de los elementos de G dividen cuatro o seis, caso en que $\mathbb{Z}G$ tiene sólo unidades triviales.

Después del interés en anillos con involución desarrollado a partir de la década de 1970 por Herstein y colaboradores, es natural estudiar álgebras de grupo desde este punto de vista.

Sea $*$ una involución de G y $\sigma : G \to \{\pm 1\}$ un homomorfismo de grupos (en la literatura σ es llamada una *orientación* de G). Una *involução de grupo orientada* para $\mathbb{F}G$ es definida por ([1, 4]):

$$\left(\sum_{g\in G} \alpha_g g\right)^{\circledast} = \sum_{g\in G} \alpha_g \sigma(g) g^*. \tag{1}$$

Como $\alpha \mapsto \alpha^{\circledast}$ es una involución, entonces $g = g^{\circledast\circledast} = (\sigma(g)g^*)^{\circledast} = \sigma(g)\sigma(g^*)g$. De esto obtenemos $gg^* \in ker(\sigma)$, para todo $g \in G$ y recíprocamente, i.e., si para todo $g \in G$, $gg^* \in ker(\sigma)$, entonces $\circledast$

dada por la expresión (1) es una involución. Cuando $*$ es la involución tal que $g \mapsto g^{-1}$, para cada $g \in G$, y σ es trivial, la involución coincide con la **clásica** definida en el comienzo de la introducción. En este caso, si σ no es trivial la involución se denomina *involución clásica orientada*, involución introducida por S.P. Novikov (1970) en el contexto de la K-teoría, [8]. Cuando $*$ es una involución cualquiera de G y σ es trivial, la involución definida en $\mathbb{F}G$ se denomina una *involución de grupo*.

Consideremos ahora una K-álgebra R con involución $*$. Es posible definir una involución sobre la K-álgebra libre $K\{x_1, y_1, x_2, y_2, ...\}$, sobre un conjunto infinito enumerable de variables, definiendo $x_i^* = y_i$ y $y_i^* = x_i$. Escribimos $K\{x_1, x_1^*, x_2, x_2^*, ...\}$, para la álgebra libre con involución. Un elemento en esta álgebra es, naturalmente un polinomio en las variables x_i y x_i^*, que no conmutan. Diremos que R satisface una $*$-*identidade polinomial*, que abreviaremos diciendo que R es $*$-IP o que R es una IP-álgebra, si existe $0 \neq f(x_1, x_1^*, x_2, x_2^*, ..., x_n, x_n^*) \in K\{x_1, x_1^*, ...\}$ tal que $f(a_1, a_1^*, ..., a_n, a_n^*) = 0$, para todos los $a_i \in R$. Por ejemplo, toda K-álgebra conmutativa satisface $x_1x_2 - x_2x_1 = 0$.

La $\mathbb{F}$-álgebra $\mathbb{F}G$ es llamada normal con respecto a la involución dada por la ecuación (1), si y sólo si satisface la $\circledast$-IP $\alpha\alpha^{\circledast} = \alpha^{\circledast}\alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{F}G$. Así, álgebras de grupo normales $\mathbb{F}G$ son IP-álgebras satisfaciendo una identidad polinomial particular. Álgebras de grupo satisfaciendo una IP fueron clasificadas por Passman & Isaacs-Passman, [9, Corollaries 3.8, 3.10].

2. Resultados

Presentó aquí los resultados obtenidos en una de las preguntas de mi Tesis de Doctorado, realizada en la Universidade de São Paulo, Brasil, "Involuções de grupo orientadas em álgebras de grupo", en mayo de 2013.

Antes de presentar tales resultados, necesitamos un poco de notación. Recordemos que, como fue introducido por E. G. Goodaire, [3, pag. 94], un grupo G es LC si para cualquier par de elementos $g, h \in G$, es el caso que $gh = hg$ si y sólo si $g \in \zeta(G)$ o $h \in \zeta(G)$ o $gh \in \zeta(G)$ donde $\zeta(G)$ es el centro de G. Es posible mostrar ([3, pag. 98]) que los grupos LC con un único conmutador no-trivial son precisamente los grupos no conmutativos con $G/\zeta(G) \cong C_2 \times C_2$, donde C_2 denota el grupo cíclico de orden 2. Llamaremos a estos grupos SLC-grupos si ellos están equipados con la involución

$$g^* = \begin{cases} g, & \text{si } g \in \zeta(G) \\ sg, & \text{si } g \notin \zeta(G) \end{cases}, \tag{2}$$

llamada *involución canónica*, donde s es el único conmutador no-trivial.

El grupo $\mathcal{Q}_8 = \langle x, y : x^4 = 1, x^2 = y^2, x^y = x^{-1} \rangle$ de los cuaternios de orden 8, es un SLC-grupo con $\zeta(\mathcal{Q}_8) = \mathcal{Q}_8' = \langle 1, x^2 \rangle$ y único conmutador no-trivial x^2.

2.1. Involuciones de grupo

Sea $*$ una involución en el grupo G extendida $\mathbb{F}$-linealmente a $\mathbb{F}G$. Supongamos que para todo $g \in G$, $\sigma(g) = 1$ y que $\mathbb{F}G$ es normal con respecto a $*$.

Lema 1. *Si $\mathbb{F}G$ es normal con respecto a $*$, entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. *Si $g, h \in G$, entonces $gh = hg$ o $gh = g^*h^*$.*
2. *Para todo $g \in G$, $g^2 \in \zeta(G)$.*
3. *$G^+ = \{g \in G : g^* = g\} \subseteq \zeta(G)$.*

Es claro que si G es un grupo **abeliano**, entonces $\mathbb{F}G$ es conmutativa, así para todo $\alpha \in \mathbb{F}G$, $\alpha\alpha^* = \alpha^*\alpha$. Supongamos que G no es abeliano. Vamos a establecer las condiciones necesarias y suficientes para que $\mathbb{F}G$ sea normal. La condición suficiente es constructiva, i.e., es exhibido el único conmutador no-trivial s.

Teorema 2. *Sean $\mathbb{F}$ un cuerpo con $car(\mathbb{F}) \neq 2$ y G un grupo no-abeliano con una involución $*$ extendida $\mathbb{F}$-linealmente a $\mathbb{F}G$. Entonces, $\mathbb{F}G$ es normal si y sólo si G es un* SLC*-grupo.*

2.2. Involuciones de grupo orientadas

Sean $\mathbb{F}$ un corpo, G un grupo con un homomorfismo orientación no-trivial σ y una involución $*$. Notemos que, como σ es no-trivial, la $car(\mathbb{F})$ debe ser diferente de 2 y si $N = ker(\sigma)$, entonces $[G : N] = 2$. Vamos a considerar la involución dada por $\left(\sum_{g\in G} \alpha_g g\right)^{\circledast} = \sum_{g\in G} \alpha_g \sigma(g) g^*$.

Es claro que las involuciones $\circledast$ y $*$ coinciden sobre la subálgebra $\mathbb{F}N$. También los *elementos simétricos* en G, con respecto a $\circledast$, son los *elementos simétricos* en N con respecto a $*$.

Si $\mathbb{F}G$ es *normal* con respecto a $\circledast$, entonces $\mathbb{F}N$ también es *normal*, y así, por el Teorema 2, N es un grupo abeliano o N es un *SLC*-grupo y la involución $*$, en N, es dada por la expresión (1).

Es posible establecer un lema similar al Lema 1, con las respectivas variaciones. Además, para todo $g \in G$, $gg^* = g^*g \in \zeta(G)$.

Además del Teorema 2, es vital para obtener la caracterización de la *normalidad* de $\mathbb{F}G$ con respecto a $\circledast$, el siguiente lema técnico:

Lema 3. *Sean G un grupo con una involución $*$ y una orientación σ tal que $\mathbb{F}G$ es normal, N es un* SLC*-grupo y la restricción de $*$ a N, $*_{|_N} : N \to N$, es una involución canónica en N. Entonces, G tiene un único conmutador no-trivial s, que es central en G. Además, existe $g_0 \in G \setminus N$ tal que $g_0 \in C_G(N)$ y $g_0^* = sg_0$, donde $C_G(N)$ es el centralizador de N en G.*

Notemos que en las condiciones del Lema 3, y del hecho que $G = N \cup Ng_0$ ($[G : N] = 2$), $g_0 \in \zeta(G)$. Nuevamente como en el caso sin orientación, si G es un grupo abeliano, entonces es claro que para todo $\alpha \in \mathbb{F}G$, $\alpha\alpha^{\circledast} = \alpha^{\circledast}\alpha$ y así $\mathbb{F}G$ es normal. Finalmente tenemos:

Teorema 4. *Sean $g \mapsto g^*$ una involución sobre el grupo G, $\sigma : G \to \{\pm 1\}$ una orientación no-trivial con $N = ker(\sigma)$ y $\mathbb{F}G$ la álgebra de grupo asociada. Entonces $\mathbb{F}G$ es* normal *si y sólo si, G es un grupo abeliano o una de las siguientes condiciones es verdadera:*

1. *N es abeliano, $x^* = x$, para todo $x \in G \setminus N$ y $n^* = a^{-1}na = ana^{-1}$, para todo $n \in N$ y para todo $a \in G \setminus N$;*
2. *N y G son* SLC*-grupos y existe un elemento central $g_0 \in G$ tal que $G = N \cup Ng_0 = N \cup g_0N$, $g_0^* = sg_0$ y $*$ es la involución canónica en N.*

Referencias

[1] Broche Cristo O. & Polcino Milies C., *Symmetric elements under oriented involutions in group rings*, Comm. Algebra, 34 (2006), 3347–3356.

[2] Castillo Gómez J. H. & Polcino Milies C., *Lie properties of symmetric elements under oriented involutions*, Commun. Algebra, 40 (2012), 4404–4419.

[3] Goodaire E. G., Jespers E. & Polcino Milies C., *Alternative loop rings*, North-Holland, Amsterdam (1996).

[4] Goodaire E. G. & Polcino Milies C. *Oriented involutions, symmetric and skew-symmetric elements in group rings*, (2011), Preprint, arXiv:1108.4648v1 [math.GR].

[5] Herstein I. N., *Rings with involution*, University of Chicago Press, Chicago (1976).

[6] Higman G., *The units of group rings*, Proc. London Math. Soc. 46 (1940), 231–248.

[7] Holguín Villa A., *Involuções de grupo orientadas em álgebras de grupo*, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo (2013), São Paulo, Brasil.

[8] Novikov S. P., *Algebraic construction and properties of Hermitian analogs of K-theory over rings with involution from the viewpoint of Hamiltonian formalism*, Applications to differential topology and the theory of characteristic classes. I. II., Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 34 (1970), 253–288, ibid 34 (1970), 475–500.

[9] Passman D. S., *The algebraic structure of group rings*, Wiley, New York (1977).

[10] Polcino Milies C. & Sehgal S. K., *An Introduction to Group Rings*, Kluwer, Dordrecht (2002).

Una introducción a los espacios ultramétricos

Oscar F. Casas S.

Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, oscasas@uniandes.edu.co

Resumen

En esta charla se hará una introducción básica a los espacios ultramétricos, mostraremos algunas de sus propiedades topológicas. Para finalizar definiremos la noción de integración y mostraremos algunos ejemplos.

1. Introducción

En los últimos años el análisis ultramétrico ha recibido una gran atención debido a sus aplicaciones en problemas de Física Matemática, ver por ejemplo [1], [2], [3], [5], [6], [8].

El ejemplo más sencillo de un cuerpo ultramétrico es el cuerpo de los números $p-$ádicos, $\mathbb{Q}_p$, el cual se puede ver como la completación de $\mathbb{Q}$ con respecto a una norma no arquimediana $|\cdot|_p$, es decir una norma que satisface la siguiente propiedad:

$$|x+y|_p \leq \text{máx}\{|x|_p, |y|_p\}.$$

En esta charla mostraremos algunas consecuencias de esta propiedad.

2. Temas a desarrollar

1. Se presentará la definición de un cuerpo ultramétrico.
2. Se mostrarán algunas consecuencias de la propiedad ultramétrica, en particular mostraré los siguientes resultados.
   a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_n \in \mathbb{Q}_p$.
   b) Todos los triángulos son isósceles.
   c) Si $B_k(a) = \left\{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x-a|_p < p^k\right\}$ (Bola de radio p^k con centro a), entonces $B_k(a)$ es abierta y cerrada.
   d) Si $B_k(a) \bigcap B_l(b) \neq \emptyset$, entonces $B_k(a) \subset B_l(b)$ o $B_l(b) \subset B_k(a)$.
   e) Si $S_k(a) = \left\{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x-a|_p = p^k\right\}$ (Esfera de radio p^k con centro a), entonces $S_k(a)$ es abierta y cerrada, además $S_k(a)$ se puede escribir como una unión de bolas abiertas.
3. Integración, en esta parte mostraremos:

$a)$ $\displaystyle\int_{B_k} d_p x = p^k$, donde $B_k = B_k(0)$.

$b)$ $\displaystyle\int_{S_k} d_p x = p^k \left(1 - p^{-1}\right)$, donde $S_k = S_k(0)$.

$c)$ $\displaystyle\int_{B_0} |x_p|^{\alpha-1} d_p x = \frac{1 - p^{-1}}{1 - p^{-\alpha}}, \quad \mathrm{Re}(\alpha > 0)$.

Referencias

[1] S. Albeverio, A. Yu. Khrennikov, V. M. Shelkovich, Theory of p-adic distributions: linear and nonlinear models. Cambridge University Press, 2010.

[2] V. A. Avetisov, A. Kh. Bikulov,V. A. Osipov, p-adic description of characteristic relaxation in complex systems, J. Phys. A 36 (2003), no. 15, 4239–4246.

[3] V. A. Avetisov, A. H. Bikulov, S. V. Kozyrev, V. A. Osipov, p-adic models of ultrametric diffusion constrained by hierarchical energy landscapes, J. Phys. A 35 (2002), no. 2, 177–189.

[4] O.F. Casas-Sánchez, W.A. Zúñiga-Galindo, Riesz Kernels and Pseudodifferential Operators Attached to Quadratic Forms Over p-adic Fields, p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl. 5 (3) (2013) 177–193.

[5] A.N. Kochubei, Pseudo-Differential Equations and Stochastics over Non-Archimedian Fields, Pure Appl. Math., vol. 244, Marcel Dekker, New York, 2001.

[6] J.J. Rodríguez-Vega, W.A. Zúñiga-Galindo, Taibleson operators, p-adic parabolic equations and ultrametric diffusion, Pacific J. Math. 237 (2) (2008) 327–347.

[7] V.S. Vladimirov, I.V. Volovich, E.I. Zelenov, p-Adic Analysis and Mathematical Physics, Ser. Soviet and East European Math., vol. 1, World Scientific, River Edge, NJ, 1994.

[8] W.A. Zúñiga-Galindo, Parabolic equations and Markov processes over p-adic fields, Potential Anal. 28 (2008) 185–200.

Prime ideals of skew PBW extensions

Oswaldo Lezama

Seminario de Álgebra Constructiva - SAC^2, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá, jolezamas@unal.edu.co

Abstract

Many rings and algebras arising in quantum mechanics can be interpreted as skew PBW (Poincaré-Birkhoff-Witt) extensions. Indeed, Weyl algebras, enveloping algebras of finite-dimensional Lie algebras (and its quantization), Artamonov quantum polynomials, difussion algebras, Manin algebra of quantum matrices, among many others, are examples of skew PBW extensions. In this talk we describe the prime ideals of some especial classes of skew PBW extensions.

References

[1] **Bell, A. and Goodearl, K.**, *Uniform rank over differential operator rings and Poincaré-Birkhoff-Witt extensions*, Pacific Journal of Mathematics, 131(1), 1988, 13-37.

[2] **Bueso, J., Gómez-Torrecillas, J. and Verschoren, A.**, *Algorithmic Methods in noncommutative Algebra: Applications to Quantum Groups*, Kluwer, 2003.

[3] **Goodearl, K.**, *Prime ideals in skew polynomial rings and quantized Weyl algebras*, J. of Algebra, 150, 1992, 324-377.

[4] **Goodearl, K.**, *Semiclassical limits of quantized coordiante rings*, preprint, 2009.

[5] **Goodearl, K. and Warfield, R. Jr.**, *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*, London Mathematical Society, ST 61, 2004.

[6] **Joseph, A.**, *On the prime and primitive spectra of the algebra of functions on a quantum group*, J. Algebra, 169, 1994, 441-511.

[7] **Letzter, E.**, *Prime and primitive ideals in graded deformations of algebraic quantum groups at roots of unity*, Algebras and Representation Theory 6, 47-70, 2003.

[8] **McConnell, J. and Robson, J.**, *Noncommutative Noetherian Rings*, Graduate Studies in Mathematics, AMS, 2001.

[9] **Nordstrom, H.**, *Associated primes over Ore extensions and generalized Weyl algebras*, Ph.D. Thesis, University of Oregon, 2005.

[10] **Panov, A. N,**, *Stratification of prime spectrum of quantum solvable algebras*, arXiv:math/010513iv1[mathQA], 2001.

ÁLGEBRA, COMBINATORIA Y TEORÍA DE NÚMEROS

Cursillos

Conjuntos de Sidon

Javier Cilleruelo

Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT) y Departamento de Matemáticas de la UAM, Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, España, franciscojavier.cilleruelo@uam.es

Resumen

Uno de los temas favoritos de Erdős y que mejor ha descrito su gusto por la aritmética combinatoria ha sido el de los conjuntos de Sidon. Corría el año 1932 cuando Simon Sidon, el analista húngaro, le preguntó a Erdős sobre el crecimiento de sucesiones de enteros positivos con la propiedad de que todas las sumas de dos elementos de la sucesión son distintas.

Estos conjuntos, que Erdős bautizaría más tarde con el nombre de conjuntos de Sidon, son el objeto de este curso.

Aunque el interés de Sidon por estos conjuntos tenía que ver con cuestiones del análisis de Fourier, el problema cautivó a un joven Erdős por su vertiente aritmética y combinatoria y se convertiría en un tema recurrente en su investigación hasta que nos abandonara en 1998 en busca de "El Libro", ese libro virtual donde Erdős afirmaba que están escritas las demostraciones más ingeniosas y elegantes.

Son muchos los problemas que nos podemos plantear acerca de los conjuntos de Sidon, pero casi todos ellos tienen que ver con el tamaño máximo que pueden llegar a tener estos conjuntos en un intervalo o un grupo finito dado, y en el caso de las sucesiones infinitas de Sidon, con construir sucesiones infinitas A cuya función contadora $A(x) = |A \cap [1, x]|$ sea tan grande como sea posible.

Los conjuntos de Sidon admiten varias generalizaciones naturales, como los conjuntos B_h donde todas las sumas de h elementos de conjuntos son distintas o las sucesiones $B_2[g]$, que son aquellas con la propiedad de que todo elemento admite como mucho g representaciones como suma de dos elementos del conjunto.

El libro "Sequences"de Halberstam y Roth [10] es una referencia clásica sobre los conjuntos de Sidon hasta 1966. Erdős y R. Freud [6] escribieron un survey muy completo sobre conjuntos de Sidon, pero escrito en húngaro. "An anoted bibligrafy on Sidon sets", de Kevyn O'Bryant [12], es también una fuente de información valiosa sobre conjuntos de Sidon.

1. Conjuntos finitos de Sidon

Los conjuntos de Sidon, aunque fueron definidos inicialmente en los enteros, se pueden definir en cualquier grupo abeliano.

Definición 1. *Sea G un grupo abeliano. Se dice que un conjunto $A \subset G$ es un conjunto de Sidon si todas las diferencias $a - a',\ a, a' \in A,\ a \neq a'$ son distintas.*

¿Cuál es el mayor cardinal que un conjunto de Sidon puede tener en el intervalo $\{1, \ldots, n\}$? ¿Y en el grupo cíclico $\mathbb{Z}_n$?

Estas son dos preguntas básicas sobre los conjuntos de Sidon. El resultado principal de este capítulo, debido a Erdős y Turan [8], da una respuesta asintótica a la primera pregunta. Posteriormente se han conseguido demostraciones más simples [3, 11, 13].

Teorema 2. *Si $A \subset \{1, \ldots, n\}$ es un conjunto de Sidon de cardinal máximo entonces*

$$\sqrt{n} + O(n^{\alpha/2}) < |A| < \sqrt{n} + n^{1/4} + 1/2$$

donde α es un número real con la propiedad de que si m es suficientemente largo entonces elintervalo $[m, m + m^{\alpha}]$ contiene un primo.

La cota superior se consigue por un conteo refinado y la cota inferior es consecuencia de construciones algebraicas de conjuntos de Sidon en grupos cíclicos. Se verán varias construcciones óptimas en grupos abelianos. La primera de estas construcciones fue obtenida por J. Singer [10].

2. Conjuntos infinitos de Sidon

Es fácil construir sucesiones infinitas de Sidon. Por ejemplo la sucesión de las potencias de 2 es una sucesión de Sidon porque todas las sumas de dos potencias de 2 son distintas. Estamos de acuerdo en que esta sucesión no es muy interesante. Es muy poco densa, crece demasiado deprisa. La manera de medir el tamaño de una sucesión infinita A es a través de su función contadora

$$A(x) = |A \cap [1, x]|$$

que cuenta el número de términos de la sucesión menores o iguales que x.

La construcción más ingenua de un conjunto de Sidon con una función contadora decente es la generada por el agpritmo avaricioso: empieza con $a_1 = 1,\ a_2 = 2$, y una vez construidos $a_1, ..., a_{n-1}$, se añade el menor entero positivo a_n mayor que a_{n-1} y tal que $\{a_1, \ldots, a_n\}$ sea un conjunto de Sidon. Es fácil ver que la función contadora de esta sucesión satisface la desigualdad $A(x) \geq x^{1/3}$.

Las sucesiones de Sidon infinitas son más difíciles de construir. La razón principal es que no podemos echar mano de las construcciones algebraicas que se han utilizado en el capítulo anterior para construir conjuntos de Sidon finitos.

Es claro que si A es una sucesión de Sidon infinita entonces $A(x) \ll x^{1/2}$ y, en principio, podríamos pensar que pudiera existir una sucesión de Sidon infinita con $A(x) \gg x^{1/2}$, de manera análoga a lo que ocurre en el caso finito. Sin embargo Erdős demostró que tal sucesión no puede existir. En [16], aparece el siguiente resultado.

Teorema 3 (Erdős)**.** *Si A es una sucesión de Sidon entonces*

$$\liminf_{x\to\infty} A(x)\left(\frac{\log x}{x}\right)^{1/2} \ll 1.$$

La sucesión $A = (a_n)$ generada por el algoritmo avaricioso fue durante 50 años la mejor de la que se disponía. Hasta que en 1981 Ajtai, Komlos y Szemeredi [1] demostraron la existencia de una sucesión infinita de Sidon con $A(x) \gg (x \log x)^{1/3}$.

Este resultado fue dramáticamente mejorado por Ruzsa [14] al demostrar la existencia de una sucesión infinita de Sidon con $A(x) = x^{\sqrt{2}-1+o(1)}$. La demostración de Ruzsa es muy ingeniosa pero no es constructiva.

Erdős ofreció 1000 dólares por la resolución de la siguiente conjetura.

Conjetura 4. *Para todo $\epsilon > 0$ existe una sucesión de Sidon con $A(x) \gg x^{1/2-\epsilon}$.*

El Teorema 3 muestra que la conjetura no es cierta para $\epsilon = 0$.

Tanto las construcciones de Ajtai, Komlos and Szemerédi como la de Ruzsa son construcciones probabilísticas. No son explícitas. Recientemente se ha encontrado [5] una construcción explícita de una sucesión infinita de Sidon con una función contadora similar a la de Ruzsa.

Teorema 5. *Existe una sucesión de Sidon infinita A, que puede ser descrita explicitamente, con función contadora*

$$A(x) = x^{\sqrt{2}-1+o(1)}.$$

3. El método probabilístico en los conjuntos de Sidon

El método probabilístico fue introducido por Erdős hacia la mitad del siglo pasado para demostrar la existencia de objetos que no se sabían construir de manera explíta. Se ha convertido en una herramienta muy poderosa en muchas áreas y en particular en la teoría combinatoria de números. El libro [2] es una magnífica referencia del método probabilístico.

Supongamos que estamos interesados en demostrar la existencia de una sucesión de enteros con ciertas propiedades aritméticas. Por supuesto una manera de conseguirlo consiste en construir explícitamente dicha sucesión. Pero eso no siempre es fácil y un camino alternativo es el de construir un espacio probabilístico de sucesiones adecuado y demostrar que casi todas las sucesiones en dicho espacio satisfacen las propiedades requeridas.

Utilizando esta esta estrategia, Erdős y Renyi [7] demostraron el siguiente resultado que puede verse como una aproximación a la conjetura de Erdős.

Teorema 6. *Para todo $\epsilon > 0$ existe un g y una sucesión $B_2[g]$ con función contadora $A(x) \gg x^{1/2-\epsilon}$.*

Las sucesiones $B_2[g]$ a las que hace mención el teorema son aquellas tales que una misma suma de dos elementos aparece a lo más g veces. El caso $g = 1$ corresponde a las sucesiones de Sidon.

References

[1] M. Ajtai, J. Komlós, and E. Szemerédi, *A dense infinite Sidon sequence*, European J. Combin. 2 (1981), 1–11.

[2] N. Alon and Spencer, The probabilistic method,

[3] J. Cilleruelo, *Sidon sets in* $\mathbb{N}^d$. J. Combin. Theory Ser. A 117 (2010), no. 7, 857–871.

[4] J. Cilleruelo, *Probabilistic constructions of* $B_2[g]$ *sequences*, Acta Mathematica Sinica vol 26, n°7 (2010)

[5] J. Cilleruelo, *Infinite Sidon sequences*, preprint.

[6] P. Erdős and R. Freud, *On Sidon sequences and related problems*, Mat. Lapok 1 (1991), 1-44

[7] P. Erdős and A. Renyi, *Additive properties of random sequences of positive integers,* Acta Arith. 6 (1960), 83–110.

[8] Erdős, P and Turan, P. *On a problem of Sidon in additive number theory, and on some related problems*, J. London Math. Soc. 16 (1941), 212–215.

[9] C. A. Gómez Ruiz y C. A. Trujillo Solarte, *A new construction of modular Bh-sequences.* (Spanish) Mat. Enseñ. Univ. (N. S.) 19 (2011), no. 1, 53–62.

[10] Halberstam and Roth, *Sequences*

[11] B. Lindstrom, *An inequality for* B_2*-sequences*, J. Combinatorial Theory 6 (1969), 211–212.

[12] K. O'Bryant, *An anoted bibligrafy on Sidon sets*

[13] I. Ruzsa, *Solving a linear equation in a set of integers.* I. Acta Arith. 65 (1993), no. 3, 259–282.

[14] I. Ruzsa, *An infinite Sidon sequence.* J. Number Theory 68 (1998), no. 1, 63–71.

[15] J. Singer, *A theorem infinite projective geometry and some applications to number theory*, Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938), 377–385.

[16] A. Stohr, *Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe. I, II* , J. Reine Angew. Math. 194 (1955), 40–65, 111–140.

Teoría Espectral de Grafos

Sterling Castañeda Jaimes

Universidad Industrial de Santander, Universidad Autónoma de Bucaramanga.

Resumen

El siguiente cursillo es una invitación a los profesores de Álgebra Lineal I y II y a estudiantes que estén interesados en las aplicaciones del tema "Valores Característicos y Vectores Característicos".

El estudio de las propiedades estructurales de los grafos, usando la información codificada en su matriz de adyacencia, y en particular, en los valores propios de estas matrices, es la así llamada Teoría Espectral de Grafos. En este cursillo intentamos presentar algunos resultados y definiciones de la Teoría Espectral de Grafos tales como: Un grafo conexo con diámetro tiene al menos autovalores distintos. Los temas a abordar serán:

1. Definiciones básicas y notación.
   - *a*) Matriz de adyacencia de un grafo.
   - *b*) El espectro de un grafo.
2. Caminos de longitud l.
3. Álgebra de adyacencia de un grafo.
4. Grafos k-regulares.
5. Corolario.

Teoría de la información: decidibilidad y completes

J. Andrés Montoya

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, jamontoyaa@unal.edu.co

Resumen

La teoría de la información es la rama de las matemáticas y de la ingeniería encargada de estudiar los procesos relacionados con el manejo de la información: transmisión, almacenamiento, protección, compresión...

La teoría de la información parte del trabajo pionero de Shannon, [10], quien, en este trabajo, introdujo la noción de *entropía*, la cual ha jugado un rol decisivo y crucial en el desarrollo de la teoría.

Algunos autores, [2], afirman que las desigualdades lineales satisfechas por la entropía son las leyes fundamentales de la teoría de la información, las cuales codifican los límites universales que constriñen los procesos de transmisión y compresión de la información.

La entropía satisface un continuo de tales desigualdades, a este continuo lo llamaremos *La teoría efectiva de la información*. ¿Es completa esta teoría, o por el contrario, es esencialmente incompleta? ¿Es decidible? Queremos estudiar estas dos preguntas. En el cursillo se introducirán los conceptos necesarios para entender la manera como este par de problemas de investigación están siendo abordados en la actualidad.

El cursillo constara de tres sesiones, así:

Sesión 1. Entropía, definiciones fundamentales, desigualdades de la información, funciones entrópicas y funciones polimatroides.

Sesión 2. Conos de funciones submodulares, conos poliédricos y conos semialgebraicos.

Sesión 3. Conexiones con geometría algebraica-real, teoría de modelos y teoría de la computación.

Referencias

[1] **C. Shannon.** *A mathematical theory of communication.* Bell Systems Technical Journal. **27**: 379-423, 1948.

[2] **R. Yeung**. *A First Course in Information Theory.* Springer, Berlin, 2002.

Números $p-$ádicos, series de Poincaré y Funciones Zeta

Edwin León Cardenal

Centro de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, Morelia, México.

edwin@matmor.unam.mx

Resumen

La idea central del cursillo es ofrecer una introducción a la teoría de funciones zeta locales $p-$ádicas. Empezamos estudiando el número de soluciones a congruencias polinomiales módulo p^k, luego introducimos la serie de Poincaré $P_f(t)$ asociada a un polinomio f con coeficientes $p-$ádicos y enunciamos la conjetura de Borevich y Shafarevich sobre la racionalidad de $P_f(t)$. También mostramos la racionalidad de la serie de Poincaré para algunos ejemplos concretos y finalmente introducimos formalmente los números $p-$ádicos y la función zeta de Igusa para comentar la prueba de Igusa de la conjetura de Borevich y Shafarevich.

1. Introducción

Las funciones zeta locales fueron introducidas en los años 60, por Israel Gel'fand y André Weil. Gel'fand estudió estas funciones en el contexto arquimediano (sobre $\mathbb{R}$) con el objetivo de mostrar la existencia de soluciones fundamentales a ciertas ecuaciones diferenciales parciales con coeficientes constantes, ver [5]. Por su parte Weil estudia funciones zeta locales $p-$ádicas con el propósito de generalizar algunos resultados de Siegel sobre formas cuadráticas , e.g. la fórmula de Siegel-Poisson, ver [13].

Existen varios tipos relacionados de funciones zeta locales: funciones zeta locales arquimedianas, funciones zeta locales no arquimedianas, funciones zeta topológicas y las funciones zeta motívicas, entre otros, véase por ejemplo [12, 11] y las referencias allí contenidas.

La teoría de las funciones zeta locales es un buen ejemplo de interacción entre las diversas ramas de la matemática. Allí se mezclan de manera fascinante ideas de la geometría algebraica, la teoría de números, la teoría de singularidades y la teoría de modelos. Esta vívida interacción ha resultado en una riquísima teoría con multiples aplicaciones, su estudio sistematizado fue iniciado por Igusa y seguido por Denef, Loeser, Veys entre muchos otros, recomendamos al lector la lectura del reporte de Denef [4] y del libro de Igusa [8]. De hecho las funciones zeta locales en el caso $p-$ádico también se conocen como funciones zeta de Igusa. Sus aplicaciones son diversas, entre ellas vale la pena resaltar el hecho de que las funciones zeta locales $p-$ádicas juegan un rol preponderante en el estudio de ecuaciones pseudo-diferenciales sobre cuerpos $p-$ádicos, ver [14, 15] y las referencias allí mencionadas.

Una de las aplicaciones más importante de esta teoría consiste en el estudio del número de soluciones a congruencias polinomiales módulo p, este será nuestro punto de partida. Para empezar resumimos algunos resultados relevantes acerca de congruencias polinomiales módulo p, finalizando con la introducción de la serie de Poincaré. En la segunda parte del cursillo introducimos los números $p-$ádicos y la función zeta local $p-$ádica. Cerramos la presentación con un resumen de algunos resultados conocidos en el área y con el planteamiento de algunos problemas de investigación.

2. Algunos resultados

Problema 1. *Dado $f(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]$ estimar el número de soluciones a*

$$f(x_1,\ldots,x_n)\equiv 0 \mod m, \quad m\in\mathbb{N}.$$

El teorema chino de los restos permite reducir el problema anterior al problema de estimar el número de soluciones a

$$f(x_1,\ldots,x_n)\equiv 0 \mod p^k, \quad \forall k\geq 1. \tag{1}$$

Teorema 2. *$f(x_1,\ldots,x_n)\equiv 0 \mod p^k$, es soluble $\forall k\geq 1$ si y sólo si $f(x_1,\ldots,x_n)=0$, es soluble en $\mathbb{Z}_p$.*

$\mathbb{Z}_p$ es el anillo de los enteros $p-$ádicos que introduciremos más formalmente luego. Sin embargo un ejemplo ilustrado de este teorema nos permitirá definir tempranamente los enteros $p-$ádicos.

Ejemplo 3. *Sean $n=1, p=7$ y consideremos $f(x)=x^2-2\in\mathbb{Z}[x]$. Estudiemos las congruencias*

$$x^2\equiv 2 \mod 7^k \quad \forall k\geq 1.$$

k=1. Se puede verificar fácilmente que las soluciones son $x_0\equiv\pm 3 \mod 7$.

k=2. Notemos que toda solución a $x^2\equiv 2 \mod 7^2$ también satisface $x^2\equiv 2 \mod 7$. Luego una solución a $x^2\equiv 2 \mod 7^2$ debe ser de la forma x_0+7t_1 para $x_0\equiv\pm 3 \mod 7$ y algún $t_1\in\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Sea $x_1=3+7t_1$, entonces

$$x_1^2\equiv 2 \mod 7^2 \Rightarrow (3+7t_1)^2\equiv 2 \mod 7^2 \Rightarrow 9+42t_1+49t_1^2\equiv 2 \mod 7^2,$$

dividiendo por 7 y reduciendo obtenemos

$$1+6t_1\equiv 0 \mod 7 \Rightarrow t_1\equiv 1 \mod 7.$$

Así que $x_1=3+1\cdot 7 \mod 7^2$.

k=3. Si x_2 es solución a $x^2\equiv 2 \mod 7^3$ entonces $x_2=x_1+t_2 7^2$, con x_1 como antes y $t_2\in\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. En consecuencia

$$(x_1+t_2 7^2)^2\equiv 2 \mod 7^3 \Rightarrow t_2\equiv 2 \mod 7 \Rightarrow x_2=3+1\cdot 7+2\cdot 7^2 \mod 7^3.$$

$k \geq 4$ *Continuando este proceso podemos obtener* $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$, *en donde*

$$x_0 \equiv 3 \mod 7,\ x_1 \equiv x_0 \mod 7,\ x_2 \equiv x_1 \mod 7^2, \ldots, x_k \equiv x_{k-1} \mod 7^k,$$

y

$$x_k^2 \equiv 2 \mod 7^{k+1}.$$

Definición 4. *Una sucesión de enteros* $\{x_k\}$ *que satisface*

$$x_k \equiv x_{k-1} \mod p^k \quad \forall k \geq 1,$$

determina unívocamente un entero $p-$*ádico.*

De estas observaciones tenemos que la congruencia (1) es soluble siempre que la congruencia $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \mod p$ sea soluble y se puedan seguir "levantando"las soluciones. El siguiente lema nos muestra cuando es posible llevar a cabo este procedimiento de manera general.

Lema 5 (Lema de Hensel)**.** *Si* $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_n]$ *y* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_p^n$ *satisface* $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \equiv 0 \mod p$ *y para algún índice* $i = 1, \ldots, n$ *se tiene*

$$f'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv 0 \mod p,$$

entonces existen enteros $p-$*ádicos* $\beta_1, \ldots, \beta_n$ *tales que*

$$f(\beta_1, \ldots, \beta_n) = 0$$

y $\beta_1 \equiv \alpha_1 \mod p, \ldots, \beta_n \equiv \alpha_n \mod p$.

Así que una solución a la congruencia $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \mod p$ se puede extender a una solución de la ecuación $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ en $\mathbb{Z}_p^n$ (i.e. a la congruencia $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \mod p^k \quad \forall k \geq 1$) siempre que sea una solución no singular.

Observación 6. *Notemos que todo entero racional (i.e. los enteros usuales) está contenido en* $\mathbb{Z}_p$ *así que los resultados anteriores también son válidos al cambiar* $\mathbb{Z}_p$ *por* $\mathbb{Z}$.

Ahora podemos contar el número de soluciones a los sistemas de congruencias como (1).

Proposición 7. *Sea* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *un polinomio con coeficientes en* $\mathbb{Z}_p$ *y sea* $a = (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ *una solución no singular a* $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \mod p$. *Entonces existen* $p^{(k-1)(n-1)}$ *soluciones a*

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \mod p^k.$$

Hasta aquí tenemos que si $f(x) = 0$ tiene una solución $\mod p$, entonces es posible que tenga soluciones $\mod p^k$ y si la solución inicial es no singular podemos contar el número de "descendientes"de esta solución. Qué ocurre en el caso general con el número de soluciones módulo p^k? Qué comportamiento tiene este número de soluciones cuando k es muy grande? Para estudiar estos problemas introduciremos un nuevo objeto.

Sea $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_n]$. Denotemos con N_k el número de elementos del conjunto

$$\{x + p^k\mathbb{Z}_p^n \mid x \in \mathbb{Z}_p^n \text{ y } f(x) \equiv 0 \mod p^k\},$$

para $k \geq 1$ con $N_0 = 1$. Entonces la serie de Poincaré asociada a f es la serie formal

$$P_f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} N_k p^{-nk} t^k.$$

Notemos que esta serie converge absolutamente para $|t| < 1$. Esta serie fue introducida por Borevich y Shafarevich en [3] y allí conjeturaron que $P_f(t)$ es una función racional en t. Esto es equivalente a afirmar que la sucesión $\{N_k\}$ es una sucesión lineal recurrente, es decir que a partir de cierto índice, los coeficientes N_k se pueden calcular a partir de $N_0, \ldots, N_{k-1}$ mediante una función lineal. Esta conjetura fue probada de manera general hasta los 70's por Igusa empleando funciones zeta locales. Así que nuestra tarea ahora es definir la función zeta local $p-$ádica. Empezamos definiendo propiamente $\mathbb{Z}_p$.

2.1. Números $p-$ádicos

Dado un número primo p, tenemos que todo $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ se expresa de manera única en la forma

$$x = p^m \frac{a}{b}, \quad m \in \mathbb{Z}, p \nmid a, p \nmid b.$$

Definimos

$$|x|_p := \begin{cases} p^{-m} & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

$|\cdot|_p$ es llamada la norma $p-$ádica. Un teorema de Ostrowski afirma que toda norma sobre $\mathbb{Q}$ es equivalente bien a la norma euclídea o bien a una de las normas $p-$ádicas para algún primo p. De manera natural definimos la ditancia $p-$ádica sobre $\mathbb{Q}$ como $d_p(x, y) = |x - y|_p$.

Proposición 8. *$(\mathbb{Q}, d_p)$ es un espacio métrico. Es decir, $|\cdot|_p$ satisface las siguientes propiedades*

1. *$|x|_p = 0$ si y sólo si, $x = 0$,*
2. *para todo $x, y \in \mathbb{Q}$, $\quad |xy|_p = |x|_p |y|_p$,*
3. *para todo $x, y \in \mathbb{Q}$, $\quad |x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$.*

La propiedad 3 indica que $|\cdot|_p$ es un valor absoluto no arquimediano. Se tiene que $(\mathbb{Q}, d_p)$ es un espacio métrico que no es completo, por ejemplo la sucesión $\{x_k\}$ dada por $x_0 \equiv 3 \mod 7$, $x_k \equiv x_{k+1} \mod 7^k$ y $x_k^2 \equiv 2 \mod 7^k$ no converge en la norma $|\cdot|_7$ a un número racional.

Definición 9. *La completación del espacio métrico $(\mathbb{Q}, d_p)$ es el cuerpo de los números $p-$ádicos.*

Se puede mostrar que cada $x \in \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$, puede escribirse de manera única como

$$x = p^m \sum_{i=0}^{\infty} x_i p^i, \tag{2}$$

donde $m \in \mathbb{Z},\ x_i \in \{0, \ldots, p-1\}$ y $x_0 \neq 0$. Esta serie converge a x en la métrica d_p. Gracias a esta observación podemos definir la suma, resta producto y cociente de dos números $p-$ádicos como en el caso de las operaciones en series de potencias.

Definición 10. *La bola unitaria centrada en el origen recibe un nombre especial en este caso. Es llamada el conjunto de los enteros $p-$ádicos, sea*

$$\mathbb{Z}_p := \{x \in \mathbb{Q}_p \ ;\ |x|_p \leq 1\} = \{x \in \mathbb{Q}_p \ ;\ x = \sum_{i=i_0}^{\infty} x_i p^i,\ i_0 \geq 0\}.$$

$\mathbb{Z}_p$ es un anillo, más precisamente es un dominio de ideales principales y cada ideal en $\mathbb{Z}_p$ tiene la forma

$$p^m\mathbb{Z}_p := \{x \in \mathbb{Q}_p \ ;\ |x|_p \leq p^{-m}\} = \{x \in \mathbb{Q}_p \ ;\ x = \sum_{i \geq m} x_i p^i,\ i_0 \geq 0\}, \quad \text{para } m \in \mathbb{N}.$$

Además

$$\mathbb{Z}_p \supset p\mathbb{Z}_p \supset p^2\mathbb{Z}_p \supset \cdots \supset \{0\},$$

de donde $p\mathbb{Z}_p$ es el único ideal maximal de $\mathbb{Z}_p$ y así

$$\mathbb{Z}_p^{\times} = \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \ ;\ |x|_p = 1\}.$$

También tenemos que $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{F}_p$ el cuerpo finito de p elementos.

Ahora discutiremos brevemente la topología de $\mathbb{Q}_p$. Para cualquier $a \in \mathbb{Q}_p$, el conjunto de las bolas con centro en a y radio r (realmente p^r),

$$\{B_r(a) := a + p^{-r}\mathbb{Z}_p \mid r \in \mathbb{Z}\}$$

forma un sistema fundamental de vecindades alrededor de a. Las siguientes propiedades caracterizan la topología de $\mathbb{Q}_p$.

- $B_r(a)$ y $S_r(a) := a + p^{-r}\mathbb{Z}_p^{\times}$ son conjuntos abiertos y cerrados de $\mathbb{Q}_p$.
- Se puede mostrar que $\mathbb{Z}_p$ es secuencialmente compacto y por tanto compacto. En consecuencia $\{B_r(a) \mid r \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema fundamental de vecindades compactas de $\mathbb{Q}_p$ y así es un espacio topológico localmente compacto.

Debido a un teorema de A. Haar, todo grupo topológico $(G, \cdot)$ abeliano localmente compacto posee una medida regular de Borel dx, llamada la medida de Haar, que tiene las siguientes propiedades:

1. $\int_U dx > 0$ para todo boreliano abierto y no vacío,

2. si E es un conjunto de Borel $\int_{x\cdot E} dx = \int_E dx$, para todo $x \in G$.

De los resultados previos tenemos que $(\mathbb{Q}_p, +)$ posee una medida de Haar dx, que es invariante bajo traslaciones, i.e. $d(x+a) = dx$ para cada $a \in \mathbb{Q}_p$. Y como $\mathbb{Z}_p$ es abierto compacto, se puede normalizar la medida de tal forma que

$$\int_{\mathbb{Z}_p} dx = 1.$$

Los conjuntos borelianos de $\mathbb{Q}_p$ son justamente los conjuntos compactos abiertos $B_r(a)$. Veamos algunas propiedades de la integración sobre $\mathbb{Q}_p$.

1. Para cada $a \in \mathbb{Q}_p^\times$ tenemos

$$d(ax) = |a|_p dx \quad \text{i.e.} \quad \int_{aE} dx = |a|_p \int_E dx,$$

para todo conjunto de Borel E. En particular, para cada $r \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{B_r(0)} dx = \int_{p^{-r}\mathbb{Z}_p} dx = p^r \int_{\mathbb{Z}_p} dx = p^r.$$

2. Recordemos que $S_r(0) = \{x \in \mathbb{Q}_p \ ; \ |x|_p = p^r\} = p^{-r}\mathbb{Z}_p^\times = B_r(0) \setminus B_{r-1}(0)$. Luego

$$\int_{S_r(0)} dx = \int_{p^{-r}\mathbb{Z}_p^\times} dx = \int_{B_r(0)} dx - \int_{B_{r-1}(0)} dx = p^r - p^{r-1} = p^r(1-p^{-1}),$$

para cada $r \in \mathbb{Z}$.

3. **Integral de una función radial**. Si f es una función continua entonces

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(|x|_p)\ dx = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{S_r(0)} f(|x|_p)\ dx = \sum_{r=-\infty}^{\infty} f(p^r) \int_{S_r(0)} dx = (1-p^{-1}) \sum_{r=-\infty}^{\infty} f(p^r)p^r,$$

siempre que la última suma converga. En particular, si $s \in \mathbb{C}$ con $Re(s) > -1$, entonces

$$\int_{\mathbb{Z}_p} |x|_p^s \ dx = (1-p^{-1}) \sum_{r=-\infty}^{0} p^{rs}p^r = (1-p^{-1}) \sum_{r=0}^{\infty} p^{-r(s+1)} = \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-1-s}},$$

siempre que $|p^{-(s+1)}|_{\mathbb{C}} < 1$, es decir $Re(s) > -1$.

En el último ejemplo hemos mostrado que $Z(s) := \int_{\mathbb{Z}_p} |x|_p^s \ dx$ converge para $Re(s) > -1$. De hecho, de la igualdad

$$Z(s) = \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-1-s}}$$

se sigue que $Z(s)$ tiene una continuación meromorfa a todo el plano complejo (como función de p^{-s}). Este ejemplo es un caso particular de una función zeta local $p-$ádica. En el caso general

tenemos que dado $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_n] \setminus \mathbb{Z}_p$ podemos definir la función zeta local asociada a f como

$$Z(s, f) := \int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(x)|_p^s \, d^n x, \quad Re(s) > 0.$$

Se puede probar que $Z(s, f)$ converge para $Re(s) > 0$, de hecho $Z(s, f)$ es una función holomorfa en el semiplano $Re(s) > 0$, ver por ejemplo [8]. La conexión entre $Z(s, f)$ y la serie de Poincaré asociada a f está dada por la siguiente fórmula

Proposición 11.

$$P_f(t) = \frac{1 - tZ(s, f)}{1 - t}, \quad con \;\; t = p^{-s} \;\; y \;\; Re(s) > 0.$$

El teorema fundamental de las funciones zeta de Igusa es el siguiente

Teorema 12 (Igusa)**.** *Sea $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}_p[[x_1, \ldots, x_n]]$. Entonces existe un número finito de parejas $(N_E, v_E) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$, $E \in T$, tales que*

$$\prod_{E \in T} (1 - p^{v_E - sN_E}) Z(s, f)$$

es un polinomio en p^{-s} con coeficientes racionales.

Gracias a la Proposición 11 la racionalidad de $Z(s, f)$ implica la racionalidad de $P_f(t)$. La prueba de Igusa de este teorema emplea un profundo resultado de Hironaka sobre la resolución de singularidades en característica 0. Más tarde Denef da otra prueba de este teorema empleando técnicas de teoría de modelos. Sin embargo estar pruebas no son constructivas, así que en general es un problema difícil conocer la forma exacta de $P_f(t)$. Algunos casos particulares se han tratado en [1, 7, 6]. Quizás la situación descrita en la ecuación (2) le permita al lector contemplar la idea de trabajar sobre cuerpos de series formales meromorfas con coeficientes en un cuerpo finito, e.g. $\mathbb{F}_q((T))$; estos cuerpos son también cuerpos locales no arquimedianos y todos los desarrollos que hemos presentado se pueden extender más o menos sin dificultad a este contexto. Sin embargo debido a la ausencia de un teorema general de resolución de singularidades en característica positiva es un problema abierto demostrar la racionalidad de $P_f(t)$ para los cuerpos $\mathbb{F}_q((T))$. Una alternativa a la resolución de singularidades que es libre de consideraciones sobre la característica del cuerpo base es la Fórmula de la Fase Estacionaria, ver por ejemplo [2, 9, 10]. Cabe mencionar que el estudio de $Z(s, f)$ permite determinar el comportamiento asintótico de los coeficientes N_k que aparecen en la serie de Poincaré, ver [16] para más detalles.

Aún hay muchas conjeturas fascinantes sobre las funciones zeta de Igusa que no se han podido probar. Una de las más interesantes es si duda la conjetura de monodromía que relaciona los polos de $Z(s, f)$ con los valores propios de la monodromía de la complejificación de f. Las funciones zeta motívicas, basadas en la teoría de integración motívica de Kontsevich y Denef-Loeser, consiguen generalizar espectacularmente la teoría de funciones zeta de Igusa, ver [11] y [12]. Finalmente recomendamos al lector interesado consultar detalladamente la bibliografía.

Referencias

[1] Albis V. S. & Chaparro R., *On a conjecture of Borevich and Shafarevich*, Rev. Acad. Colomb. Cienc. 21 (1997), 313-319.

[2] Albis V. S. & Zúñiga-Galindo W.A., *Una introducción elemental a la teoría de las funciones zeta locales de Igusa*. Lecturas Matemáticas 20 (1999), 5-33.

[3] Borevich Z. I. & Shafarevich I. R., *Number Theory*. Academic Press, New York, 1966.

[4] Denef J. *Report on Igusa's local zeta functions*. Seminaire Bourbaki 741, Astérisque, 201/202/203 (1990-1991), 1-25.

[5] Gel'fand I. M. & Shilov G.E., *Generalized Functions, vol 1*. Academic Press, New York and London, 1977.

[6] Goldman J., *Numbers of solutions of congruences: Poincaré series for strongly nondegenerate forms*, Proc. Amer. Math. Soc. 87 (1983), 586-590.

[7] Goldman J., *Numbers of solutions of congruences: Poincaré series for algebraic curves*, Advances in Math. 62 (1986), 68-83.

[8] Igusa J.-I., *An Introduction to the Theory of Local Zeta Functions*. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics vol. 14, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[9] León-Cardenal E., *An algorithm to compute the local zeta function of an hyperelliptic curve*, Aportaciones Mat. Comun., 41 (2010), 23-43.

[10] León-Cardenal E., Ibadula D. & Segers D., *Poles of the Igusa local zeta function of some hybrid polynomials*, Finite Fields and App., 25 (2014), 37-48.

[11] Mustata M., *Zeta functions in algebraic geometry*. Notas disponibles en la página del autor. `http://www-personal.umich.edu/~mmustata/`.

[12] Nicaise J., *An introduction to p-adic and motivic zeta functions and the monodromy conjecture*. Algebraic and analytic aspects of zeta functions and L-functions, MSJ Memoirs 21, Mathematical Society of Japan, (2010) 115-140.

[13] Weil A., *Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques*. Acta Mathematica, 113 (1965), 1-87.

[14] Zúñiga-Galindo W.A., *Pseudo-differential equations connected with p-adic forms and local zeta functions*, Bull. Austral. Math. Soc. 70 (2004), no. 1, 73-86.

[15] Zúñiga-Galindo W.A., *Local zeta functions and fundamental solutions for pseudo-differential operators over p-adic fields*, $p-$adic Numbers Ultrametric Anal. Appl. 3 (2011), no. 4, 344-358.

[16] Zúñiga-Galindo W.A., *Local zeta functions and Newton polyhedra*, Nagoya Math. J. 172 (2003), 31-58.

ÁLGEBRA, COMBINATORIA Y TEORÍA DE NÚMEROS

Ponencias

Sobre la conjetura de Erdös-Hajnal y posibles conexiones con Teoría de Modelos

Darío Alejandro García

Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, da.garcia268@uniandes.edu.co

Resumen

El propósito de esta charla es presentar el estado del arte de la conjetura de Erdös-Hajnal y de los métodos modelo-teóricos usados, para luego proponer algunos ideas sobre cómo usar teoría de modelos para encontrar una prueba de la conjetura de Erdös-Hajnal.

1. Introducción

Dado un entero k, definimos el número de Ramsey $R(k)$ como el menor número natural n tal que toda coloración de las aristas del grafo completo K_n en dos colores (digamos rojo y azul) contiene un conjunto monocromático de tamaño k.

Una forma alternativa de entender esta definición, es decir que el número de Ramsey $R(k)$ es el menor número natural n tal que cualquier grafo en n vértices contiene, o bien un clique (un conjunto completo de aristas rojas) o un conjunto estable (un conjunto completo de aristas azules) de tamaño k.

Usando el método probabilístico, Erdös logró probar en los años 70's que el número de Ramsey de k satisface la desigualdad $R(k) > 2^{k/2}$, de manera que para un grafo arbitrario de n vértices no podemos esperar conjuntos homogéneos de tamaño $\mathcal{O}(log\, n)$. Para mostrar esto, Erdös usó los que se conocen como grafos aleatorios finitos $\mathcal{G}_n$, que son grafos con n vértices donde cada arista aparece con probabilidad p, $0 < p < 1$. El mismo Erdös probó una propiedad importante de esta familia de grafos: para todo grafo H, H aparece eventualmente como subgrafo de $\mathcal{G}_n$ a medida que n tiende a infinito.

De esta manera, aparece en 1989 una de las más famosas conjeturas en teoría extremal de grafos, que se conoce como la Conjetura de Erdös-Hajnal:

Conjetura: *Para todo grafo H existe una constante $\delta(H) > 0$ tal que, si G es un grafo H-libre, entonces G contiene cliques ó conjuntos estables de tamaño $\geq |V(G)|^{\delta(H)}$*

Esta problema entra en un área de la combinatoria que denominada *combinatoria asistólica*, que consiste en el estudio del comportamiento de ciertos invariantes en estructuras finitas cuando el tamaño de las estructuras se hace arbitrariamente grande. Para ver la relación de este problema con combinatoria asintótica, basta cómo se construiría un contraejemplo a la conjetura: la conjetura

será falsa si para algún grafo H existe una sucesión de grafos H-libres $\langle G_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ tal que G_n cada uno de los cuales no contiene cliques ni conjuntos estables de tamaño mayor o igual a $|V(G_n)|^{1/n}$; gracias al Teorema de Ramsey, estos grafos deben cumplir que $\lim_{n\to\infty} G_n = \infty$.

Existen ciertas familias de grafos H para los cuales ya se ha probado la conjetura, y es fácil ver que la conjetura de Erdös-Hajnal para grafos H con menos de 5 vértices, y aún para algunos grafos con 5 vértices (como el camino de 5 vértices, P_5, ó el ciclo con 5 vértices C_5) la conjetura sigue sin resolverse. El problema en general aún está lejos de ser resuelto.

Por otra parte, algunos teoremas en teoría de modelos (tales como el teorema de compacidad y el teorema de Łoś) exploran la conexión entre estructuras finitas (arbitrariamente grandes) y estructuras infinitas. Estos teoremas comienzan con una familia de estructuras finitas para producir estructuras infinitas con las mismas propiedades de primer orden. Usando estos teoremas se han encontrado métodos que resultan ser una herramienta eficaz para el tratamiento de algunos problemas de combinatoria asintótica: Hrushovski los usó para obtener nuevos avances en la conjetura de Freiman para grupos arbitrarios (ver [7]), mientras que Goldbring y Towsner los usaron para dar nuevas demostraciones del Teorema de correspondencia de Furtensberg, el Lema de Regularidad de Szemerédi, y el Teorema de Szemerédi en teoría de números (todo subconjunto de densidad positiva en los enteros admite progresiones aritméticas arbitrariamente grandes).

El método general puede ser descrito de la siguiente manera: se quiere probar que toda estructura (suficientemente grande) en una clase $\mathcal{C}$ tiene cierta propiedad $\mathbf{P}$ y suponemos - para obtener una contradicción - que esto es falso. Por compacidad ó Teorema de Łoś, existe una estructura infinita sin la propiedad $\mathbf{P}$. En ocasiones es más fácil trabajar con estas estructuras infinitas, y si logramos probar (por un argumento alternativo) que la estructura infinita debe tener la propiedad $\mathbf{P}$, obtenemos una contradicción.

Usando una variante de las construcciones de Hrushovski, se puede usar la predimensión logarítmica en estructuras pseudofinitas para obtener una forma de modelar el problema de Erdös-Hajnal (la predimensión logarítmica corresponderá al exponente $\delta(H)$). Asumiendo ciertas hipótesis usuales que hacen parte del espectro de clasificación de teorías de primer orden (estabilidad, supersimplicidad, dependencia) se puede probar la conjetura de Erdös-Hajnal para ciertas familias de grafos. La idea principal consiste en buscar propiedades que permitan encontrar sucesiones indiscernibles (que corresponden a conjuntos homogéneos) de dimensión positiva.

Referencias

[1] G. Cherlin. E. Hrushovski. *Finite strucutres with few types.* Princeton University Press. Princeton and Oxford. 2003

[2] M. Chudnovsky. *The Erdös-Hajnal Conjecture - A Survey.* Columbia University, New York. Preprint. 2012

[3] I. Goldbring. H. Towsner. *An approximate logic for measures.* Preprint. arXiv:1106.2854v1 [math.LO]. June 2011.

[4] E. Hrushovski. *Stable group theory and approximate subgroups*. Preprint. arXiv:0909.2190v4 [math.LO]. May 2011.

[5] Hrushovski, E. Wagner, F. *Counting and dimensions.* In Model Theory with applications to Algebra and Analysis, Volume 2. Cambridge University Press. 2008

[6] D. Macpherson, C. Steinhorn. *One-dimensional asymptotic classes of finite structures*. Transactions Of The American Mathematical Society. v.360 Number.1 p.411 - 448 ,2008

[7] T. Tao. V.H. Vu *Additive Combinatorics*. Cambridge studies in advances mathematics [105]. Cambridge University Press. 2006

[8] H. Towsner. *A model theoretic proof of Szemeredi's Theorem*. Preprint. arXiv:1002.4456v3 [math.LO]. January 2011.

Algunas construcciones de conjuntos con más sumas que diferencias

Carlos Arturo Rodriguez Palma*,
Ana Milena Santamaría Bueno ** y Laura Milena Romero Parada***

*Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, Grupo *Alcom*, crodriguez@matematicas.uis.edu.co

**Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, a.m.santamaria10@gmail.com

*** Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, romerolaura243@gmail.com

Resumen

Sea G un grupo abeliano, escrito aditivamente, y sea A un subconjunto de G. Se define el *conjunto suma* $A+A=\{a+a' : a, a' \in A\}$ y el *conjunto diferencia* $A-A=\{a-a' : a, a' \in A\}$. Un conjunto finito A para el cual $|A+A| > |A-A|$ se denomina un *conjunto con más sumas que diferencias (MSTD).*

En esta ponencia, presentaremos algunas construcciones de conjuntos MSTD con base en el artículo *"Sets With More Sums Than Differences"* de Melvyn B. Nathanson utilizando elementos como las progresiones aritméticas, las progresiones aritméticas generalizadas y los conjuntos simétricos.

1. Introducción

Sea G un grupo abeliano, escrito aditivamente, y sea A un subconjunto de G. Se define el *conjunto suma* $A+A=\{a+a' : a, a' \in A\}$ y el *conjunto diferencia* $A-A=\{a-a' : a, a' \in A\}$.

Definición 1. *Sea G un grupo abeliano y sea A un subconjunto finito de G si $|A+A| > |A-A|$. Entonces el conjunto A se denomina conjunto con más sumas que diferencias (MSTD).*

Ejemplo 2. *Consideremos el conjunto $A=\{0,1,2,4,7,8,12,14,15\}$. Calculando su conjunto suma y diferencia, respectivamente, tenemos que $A+A=[0,30]\setminus\{25\}$ y $A-A=[-15,15]\setminus\{\pm 9\}$. Luego $|A+A|=30$ y $|A-A|=29$, por lo tanto el conjunto A es un conjunto $MSTD$ ya que $|A+A|>|A-A|$.*

Definición 3. *Sea G un grupo abeliano y A un subconjunto de G. Si $a^* \in G$ y $A=a^*-A$, entonces decimos que A es simétrico con respecto a a^*.*

Además, si A es simétrico con respecto a a^*, entonces A tiene el mismo número de sumas que diferencias, y si A es un conjunto finito, entonces $a^* = \text{mín}(A) + \text{máx}(A)$.

Definición 4 (Progresión Aritmética)**.** *Dados $a, m \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ una progresión aritmética es*

$$P=\{a+xm : 0 \le x \le k-1\}$$

Definición 5 (Progresión Aritmética Generalizada de dimensión d)**.** *Dados* $a, m_1, m_2, m_3, \ldots, m_d \in \mathbb{Z}$ *y* $k_1, k_2, \ldots, k_d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *una progresión aritmética generalizada de dimensión d es:*

$$P = \{a + x_1 m_1 + \cdots + x_d m_d : \ell_i \leq x_i \leq \ell_i + k_i - 1 \text{para } i = 1, \ldots, d\}$$

2. Algunos resultados

En la charla se quiere socializar algunos teoremas que permiten construir infinitos conjuntos MSTD de enteros, añadiendo un único elemento a un conjunto simétrico que es una pequeña perturbación de una progresión aritmética generalizada.

Teorema 6. *Sean* m, d *y* k *enteros tales que* $m \geq 4$, $1 \leq d \leq m-1$, $d \neq \frac{m}{2}$ *y* $k \geq 3$ *si* $d < \frac{m}{2}$ *y* $k \geq 4$ *si* $d > \frac{m}{2}$. *Sean*

$$\begin{aligned} B &= [0, m-1] \setminus \{d\} \\ L &= \{m-d, 2m-d, \ldots, km-d\} \\ a^* &= (k+1)\, m - 2d \\ A^* &= B \cup L \cup (a^* - B) \\ A &= A^* \cup \{m\}. \end{aligned}$$

El conjunto A es un conjunto MSTD de enteros.

Teorema 7. *Sea* $m \geq 4$ *y sea* B *un subconjunto de* $[0, m-1]$ *tal que*

$$B + B = [0, 2m-2]$$

y

$$B - B = [-m+1, m-1].$$

Sea L^* *una progresión aritmética de dimensión* $(d-1)$ *contenida en* $[0, m-1] \setminus B$ *tal que* $\min(L^*) - 1 \in B$. *Sea* $k \geq 2$ *y sea* L *la progresión aritmética de dimensión* d

$$L = (m - L^*) + m * [1, k].$$

Sea

$$a^* = \min(L) + \max(L) = (k+3)m - \min(L^*) - \max(L^*)$$

y

$$A^* = B \cup L \cup (\{a^*\} - B).$$

Entonces $A = A^* \cup \{m\}$ *es un conjunto MSTD de enteros.*

Teorema 8 ([1]). *Sean $n, k > 1$. Si*

$$\begin{aligned} X &:= [0, n], \\ m &:= (2k+3)n, \\ Y &:= m - X, \\ Z &:= \bigcup_{j=1}^{k} [2jn+1, (2j+1)n-1], \\ B &:= X \cup Y \cup Z, \\ a &:= 2n, \\ A &:= B \cup \{a\}, \end{aligned}$$

entonces A es un conjunto $MSTD$ con $|A+A| - |A-A| = 1$. Además, si los conjuntos:

$$\begin{aligned} W &:= [(2k+4)n, (2k+5)n), \\ \mathcal{A} &:= A \cup W, \end{aligned}$$

entonces $\mathcal{A}$ también es un conjunto $MSTD$ con $|\mathcal{A}+\mathcal{A}| - |\mathcal{A}-\mathcal{A}| = 2$.

Referencias

[1] Hegarty P. V., *Some explicit constructions of sets with more sums than differences*, Acta Arithmetica 130 (2007), no. 1, 61-77.

[2] Marica J., *On a conjecture of Conway*, Canad. Math. Bull. 12 (1969), 233-234.

[3] Martin G. y O'Bryant K., *Many sets have more sums than differences*, Additive combinatorics, CRM Proc. Lecture Notes, 43, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2007), 287-305.

[4] Nathanson M. B., *Sets with more sums than differences*, Integers : Electronic Journal of Combinatorial Number Theory 7 (2007), Paper A05, 1-24

[5] Nathanson M. B., *Problems in additive number theory 1*, Additive combinatorics, CRM Proc. Lecture Notes, 43, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2007), 263-270.

Anillo de funciones multisimétricas

David Ortiz* y Eddy Pariguan**
*Departamento de Matemáticas, Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia. ortiz.david@javeriana.edu.co
**Departamento de Matemáticas, Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia. epariguan@javeriana.edu.co

Resumen

El propósito de esta charla es presentar una breve revisión del anillo de funciones multisimétricas introducido por Vaccarino en [2]. Inicialmente presentaremos las funciones simétricas clásicas y sus principales conjuntos de generadores [1], haciendo énfasis en las funciones simétricas elementales, funciones monomiales y funciones homogéneas. Finalmente presentamos las funciones multisimétricas elementales y la regla general de multiplicación para este tipo de funciones.

Referencias

[1] François Bergeron, *Algebraic combinatorics and coinvariant spaces*, AK Peters, 2009.

[2] F. Vaccarino, "The ring of multisymmetric functions", *Annales de l'institut Fourier* 55, Chartres: L'Institut, 1950-, 2005, 717-732.

Estudio de soluciones no singulares de un sistema de ecuaciones homogéneas con coeficientes en un cuerpo finito

Jonny Fernando Barreto Castañeda

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia, jfbarretoc@unal.edu.co

Resumen

Este trabajo realiza un estudio detallado de las soluciones no singulares en un par de ecuaciones homogéneas en un cuerpo finito, tomando como base el artículo "Pairs of homogeneous additive equations" escrito por Michael Knapp. Además, en este trabajo se muestran algunos resultados previos como: el teorema combinatorio de los ceros, la notación de variables coloreadas y el conjunto de potencias en un cuerpo finito, necesarios para la comprensión total del artículo. También se presenta en detalle las demostraciones de la gran mayoría de los teoremas y corolarios allí expuestos.

1. Introducción

En el 2008, M. Knapp en su artículo "Pairs of homogeneous additive equations" (véase [12]) demostró que el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} F_1(X) &= a_1x_1^k + \cdots + a_sx_s^k = 0 \\ F_2(X) &= b_1x_1^k + \cdots + b_sx_s^k = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

con coeficientes en un cuerpo finito $\mathbb{F}_q$, q una potencia de algún número primo, tiene una solución no singular si: $s \geq 2k+1$, p no divide a k y al menos $k+1$ variables tienen coeficientes distintos de cero para cada combinación lineal no trivial de las formas aditivas $F_1(X)$ y $F_2(X)$. Este resultado es el teorema 1.1 en [12] y es la generalización de los resultados obtenidos por Davenport y Lewis en su artículo "Notes on congruences III" (véase [6]). Para la demostración de su resultado principal, Knapp divide la demostración en dos casos. El primer caso, si el cuerpo $\mathbb{F}_q$ es generado por las potencias k-ésimas del cuerpo $\mathbb{F}_q$ bajo la adición, entonces las ideas de Davenport y Lewis son suficientes para demostrar el teorema sobre cualquier cuerpo finito, pero utiliza algunos resultados especiales como el teorema combinatorio de los ceros (véase [2, Teorema 1.2] ó [15, Teorema 1]), la notación de variables coloreadas (véase [3, Lema 4.1]) y el subcuerpo de potencias k-ésimas (véase [11, Teorema 4.2]). Para el caso número 2, el cuerpo $\mathbb{F}_q$ no es generado por el conjunto de potencias k-ésimas bajo la adición, entonces a partir de (1), él construyó un nuevo sistema pero con coeficientes en $\mathbb{S}$, el subcuerpo de

suma de potencias k-ésimas en $\mathbb{F}_q$ y demostró que este nuevo sistema tiene una solución no trivial si $s \geq k+1$. Entonces utilizando de nuevo la notación de variables coloreadas, Knapp concluyó que el sistema tiene una solución no singular. Con el teorema 1.1 demostrado, Knapp también muestra una cota superior para el número de variables requeridas para que el sistema (1) con coeficientes en una extensión finita, $\mathbb{L}$, del cuerpo p-ádico, $\mathbb{Q}_p$, tenga una solución no trivial.

El presente trabajo es presentar los argumentos utilizados por Knapp para comprender en su totalidad el artículo. Algunos de estos argumentos son: propiedades básicas del los cuerpos finitos (véase [1]), el teorema de Chevalley (véase [4, teorema 1]), el teorema combinatorio de los ceros, el conjunto de potencias k-ésimas en $\mathbb{F}_q$, la notación de variables coloreadas, propiedades algebraicas y topológicas de las extensiones finitas sobre $\mathbb{Q}_p$ (véase [9] o [13]) y el lema de Hensel (véase [10, lema 5.21]). Además, de dar las demostraciones detalladas de los lemas 2 y 11 en [6] y [7], respectivamente.

2. Algunos resultados

Se quiere socializar por parte del autor algunos resultados obtenidos relativos a soluciones no singulares del sistema (1) y que hacen parte de [12]. Más específicamente:

1. Se presentan nuevas condiciones para que el sistema (1) tenga soluciones no singulares sobre cualquier cuerpo finito.
2. Se presenta la generalización del proceso de π-normalización para el sistema (1) pero con coeficientes en una extensión finita del cuerpo p-ádico $\mathbb{Q}_p$.
3. Se muestra las condiciones necesarias para que el sistema (1) con coeficientes en una extensión finita del cuerpo p-ádico $\mathbb{Q}_p$, tenga soluciones no triviales.

Referencias

[1] Albis V., *Curso: Ecuaciones y variedades sobre cuerpos finitos*, Preprint.

[2] Alon N., *Combinatorial Nullstellensatz*, Combin. Probab. Comput. 8 (1999) 7-29.

[3] Brüdern J. y Godinho H., *On Artin conjeture, II: pairs of additive forms*, Proc. London Math. Soc. (3) 84 (2002) 513-538.

[4] Chevalley C., *Démonstration d'une hypothèse de M. Artin*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 11 (1935) 73-75.

[5] Davenport H. & Lewis D.J., *Cubic Equations of Additive Type*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser A 261 (1966) 97-136.

[6] Davenport H. & Lewis D.J., *Notes on Congruences (III)*, Quart. J. Math. Oxford Ser. 2 17(1966) 339-344.

[7] Davenport H. & Lewis D.J., *Simultaneous equations of additive type*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser A 264 (1969) 557-595.

[8] Frailegh J., *Álgebra abstracta*, (Adisson Wesley, Wilmington, 1988).

[9] Frolich A., *Local Fields, Algebraic Number Theory*, (Thompson book Company Inc, New York, 1967).

[10] Greenberg M. J., *Lectures on forms in many variables*, (W. A. Benjamin, New York, 1969).

[11] Joly J., *Équations et variétés algébriques sur un corps fini*, L'Enseignement Mathématique, 19(1973) 11-35.

[12] Knapp M., *Pairs of homogeneous additive equations*, Bull. London Math. Soc. 40 (2008) 447-456.

[13] Koblitz N., *p-adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta-Functions*, 2th edn (Springer-Verlag, New York, 1984).

[14] Lezama O., *Cuadernos de álgebra N° 4: Álgebra Lineal*, (Departamento de matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, 2012).

[15] Michalek M., *A short proof of Combinatorial Nullstellensatz*, American Mathematical Monthly, vol. 117, no 9 (2010), 821-823

Una caracterización de ordinales primitivamente recursivos usando la función de Ackerman

Franqui Cárdenas

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia, fscardenasp@unal.edu.co

Resumen

Damos un resultado conocido para caracterizar los ordinales cerrados bajo funciones primitivamente recursivas usando la función de Ackermann. Los ordinales cerrados bajo funciones primitivamente recursivas juegan un papel importante en el universo construible L. Consideramos una posible generalización a modelos internos del tipo $L[A]$.

1. Introducción

El universo construible, L, es una versión mucho más angosta de V, el universo de la teoría de conjuntos. Inicialmente L fue desarrollado por Gödel para demostrar la consistencia de $\mathsf{ZFC} + \mathsf{CH}$. Aquí la jerarquía se construye apartir de los definibles del nivel anterior. Jensen [1] introduce la teoría de estructura fina para obtener resultados más profundos de L y grandes cardinales como el lema de cubrimiento: si no hay grandes cardinales L y V son muy *similares*. En este ámbito es de notable importancia saber los niveles en que se pueden aplicar este tipo de resultados. Estos niveles son precisamente los de altura α cerrado bajo las funciones primitivamente recursivas.

Un ordinal α se dice primitivamente recursivo si $f''\alpha^n \subseteq \alpha$ para cada $f : On^n \to On$ primitiva recursiva. En lo que sigue se trata de caracterizar la clase de ordinales primitiviamente recursivos (que abreviaremos de aquí en adelante como *ordinales p.r.*) En esta caso la función de Ackermann se define mediante la sucesión $a_n : On \to On$ para $n < \omega$ recursivamente como $a_0(\alpha) = \alpha + 1$ y $a_{n+1}(\alpha) = a_n^{\alpha+2}(\alpha)$. $a = (a_n(m) \mid n, m < \omega)$ se conoce como la función de Ackermann. La función de Ackermann aunque es *efectiva* no es primitiva recursiva. Las funciones a_n son primitivas recursivas y se definen sin usar la función constante ω.

Sean $x_1, \ldots, x_m$ conjuntos y sea $rang(x)$ la función rango que asigna a cada conjunto el nivel donde aparece x en la jerarquía de von Neumann por primera vez. Definimos $|x_1, \ldots x_m| = \text{máx}(rang(x_1), \ldots, rang(x_m))$.

2. Algunos resultados

Los resultados que presentaremos son

1. Sea f es función primitiva recursiva que no usan la función constante ω. Entonces existe un n tal que
$$|f(x_1, \ldots, x_m)| < a_n(|x_1, \ldots, x_m|)$$
para todo $x_1, \ldots, x_m$.

2. α es cerrado primitivamente recursivo si y sólo si α es cerrado bajo las ramas de Ackermann a_n para $n < \omega$.

3. V_α es cerrado primitivamente recursivo si y sólo si α es cerrado p.r.

Referencias

[1] Ronald Jensen, *The fine structure of constructible hierarchy*, Annals of mathematical logic, 4, (1972), 229–308.

Sensado Compresivo

Henry Arguello Fuentes

Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, henarfu@uis.edu.co

Resumen

Recientemente ha sido desarrollada una nueva técnica de adquisición de señales llamada sensado compresivo (CS), la cual permite capturar una señal con un número de muestras menor al establecido por el criterio de Nyquist-Shannon [1]. La característica más importante de CS es que comprime la señal bajo análisis al mismo tiempo que realiza el proceso de adquisición de la señal. Este proceso de adquisición es modelado como un sistema indeterminado de ecuaciones dado por $\mathbf{y} = \mathbf{Hx}$ donde $\mathbf{x}$ es la señal sensada, $\mathbf{H}$ es la función de transferencia del sistema de sensado, y $\mathbf{y}$ son proyecciones comprimidas de $\mathbf{x}$. La estimación de $\mathbf{x}$ mediante $\mathbf{x} = (\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{y}$ conduce a resultados de baja calidad debido a que $\mathbf{H}$ es una matriz mal condicionada que representa un sistema de ecuaciones indeterminado. Por tanto un algoritmo de optimización númerica es usado para resolver el sistema indeterminado de ecuaciones. Este trabajo presenta la formulación matemática de CS y su aplicación a la solución de importantes problemas inversos en ingeniería.

1. Introducción

El teorema de Nyquist, utilizado tradicionalmente para el sensado de señales, establece que para evitar la perdida de información en el proceso de muestreo es necesario utilizar una frecuencia de sensado superior a dos veces el ancho de banda de la señal. Posteriormente, los datos adquiridos son sometidos a un proceso de compresión para facilitar su almacenamiento y transmisión. Por otra parte, el sensado compresivo (CS) es una teoría reciente que ha surgido como alternativa al método de Nyquist [2, 3, 4, 5, 6]. A diferencia del método tradicional, CS integra los procesos de muestreo y compresión en una sola tarea. Específicamente, CS establece que es posible reconstruir ciertas señales a partir de un número reducido de muestras utilizando una matriz de sensado y una base de representación. La técnica de sensado compresivo se basa en la asunción de que las señales bajo análisis tienen una representación dispersa en una base determinada [7, 3]. En particular, una señal $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tiene un nivel de dispersión S si puede ser representada como combinación lineal de S vectores de una base $\mathbf{\Psi}$, tal que $\mathbf{x} = \mathbf{\Psi\theta}$ con $S \ll n$.

El proceso de sensado en CS puede escribirse matricialmente como [8]

$$\mathbf{y} = \mathbf{Hx}, \tag{1}$$

donde $\mathbf{H}$ es la matriz de transferencia del sistema, de tamaño $m \times n$. . Debido a que $m \ll n$, el proceso inverso de calcular $\mathbf{x}$ dado $\mathbf{y}$ es un problema mal condicionado que conduce a un número infinito de soluciones. La estimación de $\mathbf{x}$ mediante mínimos cuadrados $\mathbf{x} = (\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{y}$ conduce

a resultados de baja calidad debido a que $\mathbf{H}$ es una matriz mal condicionada que representa un sistema de ecuaciones indeterminado. Por esta razón, la reconstrucción de la señal $\mathbf{x}$ es obtenida utilizando algoritmos de optimización que aprovechan la representación dispersa de $\mathbf{x}$ en una base de transformación. Específicamente, estos algoritmos obtienen una aproximación de $\boldsymbol{\theta}$ y utilizan la transformación $\mathbf{x} = \boldsymbol{\Psi\theta}$ para obtener la representación deseada. El problema de optimización para encontrar $\mathbf{x}$ está dado por la expresión $\mathbf{x} = \boldsymbol{\Psi}\{\text{argmin}_{\boldsymbol{\theta}}\|\mathbf{H\Psi\theta} - \mathbf{y}\|_2 + \tau\|\boldsymbol{\theta}\|_1\}$, donde τ es un parámetro de regularización del proceso de optimización. Diversos algoritmos computacionales de reconstrucción han sido desarrollados para resolver este problema [9], tal como los algoritmos de búsqueda codiciosa (algoritmos *greedy*), algoritmos de optimización convexa, y métodos de gradiente descendente como el algoritmo de reconstrucción disperso a través de aproximación separable (SpaRSA) [10], TwIST [11] y GPSR [12].

La matriz $\mathbf{H}$ en la Eq. (1) puede representar diversos sistemas reales tales como: sistemas ópticos de sensado de imágenes hiperespectrales [13, 14], sistemas de rayos x, sistemas de imágenes por resonancia magnética, entre otras. En la práctica, los valores de los elementos de la matrix $\mathbf{H}$ son realizaciones de variables aleatorias tales como Bernoulli o Normales. Parámetros como la media y la varianza de estas variables aleatorias pueden ser diseñadas de forma tal que la matriz $\mathbf{H}$ sea mejor condicionada y por tanto la estimación de $\mathbf{x}$ sea de mejor calidad [8, 15, 16]. La siguiente sección muestra un ejemplo de esta optimización.

2. Resultados

La figura 1 muestra dos tipos de distribuciones de los elementos de la matriz $\mathbf{H}$. En el primer caso (izquierda) los elementos son realizaciones de una variable aleatoria tipo Bernoulli con parámetro $p = 0{,}5$. En el segundo caso (derecha) los elementos de la matriz $\mathbf{H}$ son calculados usando un algoritmo de optimización que busca que la matriz $\mathbf{H}$ sea mejor condicionada [17]. Las matrices de la figura 1 representan un sistema óptico de sensado de imágenes hiperespectrales [8]. Por otro lado la figura 2(a) muestra el vector $\mathbf{x}$ que representa una imagen hiperespectral que será medida usando la técnica de sensado compresivo. La figura 2(b) ilustra las proyecciones $\mathbf{y}$ que son medidas usando la matriz $\mathbf{H}$. Es importante resaltar que el objetivo del sensado compresivo es reconstruir la imagen de la figura 2(a) usando las proyecciones de la figura 2(b). La figura 2(c) muestra los resultados del proceso de inversión cuando los elementos de la matriz $\mathbf{H}$ han sido optimizados. La figura 2(d) muestra el resultado del problema inverso cuando los elementos de la matriz $\mathbf{H}$ son realizaciones de la variable aleatoria tipo Bernoulli. Claramente puede observarse como la calidad de las reconstrucciones del problema inverso $\mathbf{y} = \mathbf{Hx}$ mejoran cuando la matriz $\mathbf{H}$ es optimizada.

3. Propuesta de la presentación

Esta presentación se enfoca en mostrar la descripción matemática del método de sensado compresivo y presentar la aplicación de esta técnica al procesado de imágenes hiperespectrales. Específicamente

Figura 1: Ejemplo de una matriz **H** la cual representa un sistema de sensado hiperespectral de imágenes. Dos tipos de generación de los elementos de la matriz **H** son presentados: (izquierda) Elementos generados apartír de una distribución Bernoulli, (derecha) los elementos han sido generados usando un algoritmo de optimización

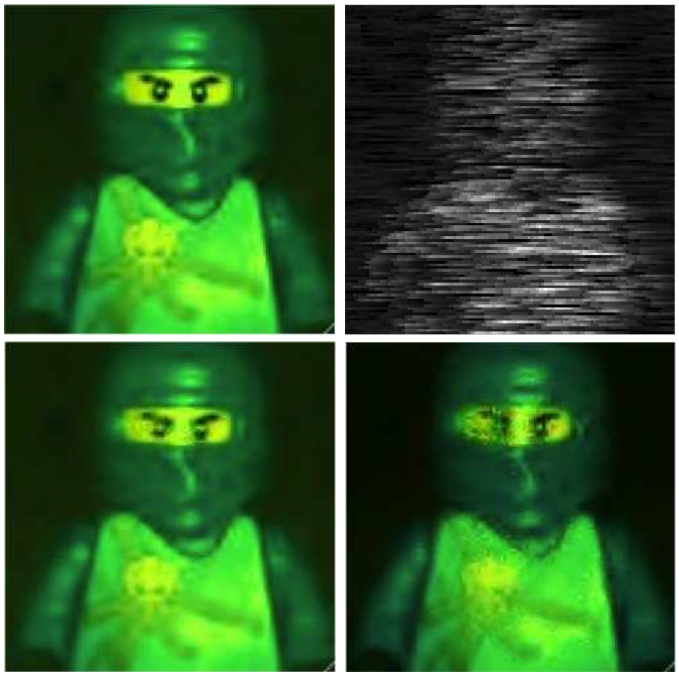


Figura 2: (arriba izquierda) Señal de entrada **x**. (arriba derecha) Señal medida **y**. (abajo izquierda) Solución del problema inverso cuando los elementos de la matriz **H** son optimizados. (abajo derecha) Solución del problema inverso cuando la matriz **H** tiene elementos distribuidos aleatoriamente.

se pretende abordar los siguientes temas:

- Introducción al sensado compresivo
- Representación matemática de señales dispersas

- Modelo matemático del senso compresivo
- Algoritmos de reconstrucción
- Aplicación de senado compresivo en imágenes hiperespectrales
- Resultados de algunas publicaciones científicas propias en esta área

Referencias

[1] Jerri A.J., "The shannon sampling theorem - its various extensions and applications: A tutorial review", *Proceedings of the IEEE* 65 (1977), no. 11, 1565-1596.

[2] Donoho D.L., "Compressed sensing", *IEEE Trans. Information Theory* 52 (2006), 1289-1306.

[3] Candès E. & Wakin M., "An introduction to compressive sampling", *IEEE Signal Processing Magazine* 25 (2008), 21-30.

[4] Candès E. & Tao T., "Near-optimal signal recovery from random projections and universal encoding strategies", *IEEE Trans. Information Theory* (2006), 5406-5245.

[5] Wang Z. & Arce G.R., "Variable density compressed image sampling", *IEEE Trans. Image Processing* 19 (2010), no. 1, 264-270.

[6] Romberg J., "Compressive sensing by random convolution", *SIAM J. Imaging Sciences* (2009), 1098-1128. `http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.154.5458&rep=rep1&type=pdf`

[7] Duarte M.F. & Baraniuk R.G., "Kronecker compressive sensing", *IEEE Trans. on Image Processing* 21 (2012), no. 2, 494-504.

[8] Arguello H. & Arce G.R., "Rank minimization code aperture design for spectrally selective compressive imaging", *IEEE Transactions on Image Processing* 22, (2013), no. 3, 941-954.

[9] Tropp J. & Wright S., "Computational methods for sparse solution of linear inverse problems", *Proceedings of the IEEE* 98 (2010), no. 6, 948-958.

[10] Wright S., Nowak R. & Figueiredo M., "Sparse reconstruction by separable approximation", *IEEE Transactions Signal Processing* 57 (2009), no. 8, 2479-2493.

[11] Bioucas-Dias J. & Figueiredo M., "A new twist: Two-step iterative shrinking/thresholding algorithms for image restoration", *IEEE Transactions Image Processing* 16 (2007), no. 12, 2992-3004.

[12] Figueiredo M.A.T., Nowak R.D. & Wright S.J., "Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems", *IEEE J. of Selected Topics in Signal Processing* 1 (2007), no. 4, 586-597.

[13] Arguello H. & Arce G.R., "Code aperture optimization for spectrally agile compressive imaging", *J. Opt. Soc. Am. A* 28 (2011), no. 11, 2400-2413.

[14] Arguello H., Rueda H., Wu Y., Prather D.W. & Arce G.R., "Higher-order computational model for coded aperture spectral imaging", *Applied Optics* 52 (2013), no. 13, D12-D21.

[15] Arguello H. & Arce G.R., "Restricted isometry property in coded aperture compressive spectral imaging", *IEEE Statistical Signal Processing Workshop*, Ann Arbor, MI, USA, 2012.

[16] Arguello H., Correa, C.V. & Arce G.R., "Fast lapped block reconstructions in compressive spectral imaging", *Applied Optics* 52 (2013), no. 10.

[17] Arce G.R., Brady D., Carin L., Arguello H. & Kittle D., "An introduction to compressive coded aperture spectral imaging", *Signal Processing Magazine, IEEE*, (2014). To appear.

Matroides transversales topológicas

Juan Carlos Rubriche Cárdenas* y Raúl Emilio Varela Perea**

*GIMA, Dpto. Ciencias Básicas, Universidad Los Libertadores, Bogotá, jcrubrichec@libertadores.edu.co

**GIMA, Dpto. Ciencias Básicas, Universidad Los Libertadores, Bogotá, revarelap@libertadores.edu.co

Resumen

Uno de los propósitos fundamentales de la matemática moderna es establecer conexiones entre diferentes teorías de la misma. En este sentido, este artículo fija un punto de partida para relacionar la teoría de matroides y la topología general mediante los operadores de clausura presentes en ambas teorías. Se muestra que cierta clase especial de matroides transversales tienen operadores de clausura que generan topologías.

1. Introducción

La noción de independencia presente en diferentes áreas de las matemáticas como en el álgebra lineal y la teoría de grafos es generalizada y axiomatizada mediante el concepto de matroide formulado en 1935 por Whitney. Una matroide es un par $(E, \mathcal{I})$, donde E es un conjunto finito, e $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ que satisface los siguientes axiomas:

M1. $\emptyset \in \mathcal{I}$.

M2. Si $A \in \mathcal{I}$ y $B \subseteq A$, entonces $B \in \mathcal{I}$.

M3. Si $A, B \in \mathcal{I}$ y $|B| < |A|$, entonces existe $a \in A \setminus B$ tal que $B \cup a \in \mathcal{I}$.

Sean A_1, A_2, $\cdots$, $A_n \subseteq E$. Entonces, $T \subseteq E$ es una transversal parcial de $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \cdots, A_n) \in (2^E)^n$ si existe una función uno a uno $\phi : T \to \{1, 2, \cdots, n\}$ tal que $t \in A_{\phi(t)}$ para todo $t \in T$. Así, la matroide $M(\mathcal{A}) = (E, \mathcal{I})$ donde la colección de independientes se define como $\mathcal{I} := \{T \subseteq E \,|\, T$ es una transversal parcial de $\mathcal{A}\}$ se denomina **matroide transversal**.

Asociada a cada matroide $M = (E, \mathcal{I})$ hay una función $r_M : 2^E \to \mathbb{N}$ tal que $r_M(X) = \text{máx}\{|I| \,|\, I \subseteq X, I \in \mathcal{I}\}$ para todo $X \subseteq E$, denominada función rango. Usando la función rango de M, se define la función $Cl_M : 2^E \to 2^E$ tal que $Cl_M(X) := \{x \in E | \, r(X \cup \{x\}) = r(X)\}$ que es un operador de clausura.[1] Por otra parte, una topología sobre un conjunto E es un par (E, τ) donde $\tau \subseteq 2^E$, que satisface:

[1] Una función $Cl : 2^X \to 2^X$ se dice que es un operador de clausura sobre el conjunto X si para todo $A, B \subseteq X$ se satisface que:

Cl1. $A \subseteq Cl(A)$.

Cl2. Si $B \subseteq A$ entonces $Cl(B) \subseteq Cl(A)$.

Cl3. $Cl(A) = Cl(Cl(A))$.

T1. $\emptyset, E \in \tau$.

T2. Una intersección finita de conjuntos en τ está en τ.

T3. Una unión arbitraria de conjuntos en τ está en τ.

Cualquier conjunto $O \in \tau$ se denomina abierto y su complemento O^C se conoce como conjunto cerrado. De manera dual, una topología se puede caracterizar a partir de sus cerrados. Así, τ es una topología sobre E, si y sólo si, el conjunto de sus cerrados $\mathcal{C} = \{C | \, C = O^C$ para algún $O \in \tau\}$ satisface:

C1. $\emptyset, E \in \mathcal{C}$.

C2. Una intersección arbitraria de conjuntos en $\mathcal{C}$ está en $\mathcal{C}$.

C3. Una unión finita de conjuntos en $\mathcal{C}$ está en $\mathcal{C}$.

Asociada a cada topología existe el operador $Cl_\tau : 2^E \to 2^E$ tal que $Cl_\tau(X) = \bar{X}$, donde $\bar{X}$ es la adherencia de X (el cerrado más pequeño que contiene a X), el cual es un operador de clausura que satisface que:

CT1. $Cl_\tau(\emptyset) = \emptyset$

CT2. Para toda colección finita $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ de subconjuntos de E,

$$Cl\left(\bigcup A_k\right) = \bigcup Cl_\tau(A_k).$$

Además, todo operador de clausura Cl que satisface $CT1$ y $CT2$ es la adherencia de una topología. Por lo tanto, la idea es caracterizar las matroides cuyos operadores de clausura satisfacen $CT1$ y $CT2$, y en consecuencia, se les puede asociar una topología. A esta clase especial de matroides se les denominara **matroides topológicas**.

2. Algunos resultados

Se presentarán los siguientes nuevos resultados:

1. El operador de clausura de una matroide $M = (E, \mathcal{I})$ satisface $CT1$, si y sólo si, $\{x\} \in \mathcal{I}$ para todo $x \in E$.
2. Sea $M(\mathcal{A}) = (E, \mathcal{I})$ una matroide transversal. $\{x\} \in \mathcal{I}$, si y sólo si, $\cup\mathcal{A} = E$.
3. Si $\mathcal{A}$ es una partición de E entonces la matroide transversal $M(\mathcal{A}) = (E, \mathcal{I})$ es topológica, es decir, su operador de clausura satisface $CT1$ y $CT2$.

Referencias

[1] Oxley, James, *Matroid Theory*, Oxford Graduate Text in Mathematics (1992).

[2] Neira, Clara, *Notas de Topología*, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia.

[3] Varela, Raúl, *FD Relaciones*, Tesís de Maestría, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia (2011).

Condiciones de regularidad de Auslander para extensiones de Ore

Nelcy Esperanza Arévalo Baquero

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia, nearevalo@unal.edu.co

Resumen

El propósito es describir las propiedades de anillos Noetherianos los cuales satisfacen una condición introducida por Auslander que involucra el grado homológico de un módulo, teniendo en cuenta los resultados de [2]. Se presentan los conceptos de condición de Auslander, anillo Auslander-Gorenstein (AG) y anillo Auslander regular. Se examinarán algunos ejemplos, entre los cuales se destacan las álgebras de Weyl.

1. Introducción

Definición 1. Sea R un anillo. El *grado* $j(M)$ de un R-módulo (izquierdo) M está definido por

$$j(M) = \text{mín}\left\{i | Ext^i_R(M, R) \neq 0\right\}$$

o ∞ si tal i no existe.

Definición 2. Decimos que un anillo R

- satisface la *condición de Auslander* si para todo R-módulo M noetheriano a izquierda o a derecha y para todo $i \geq 0$, $j(N) \geq i$ para todos los submódulos $N \subseteq E^i(M)$;
- es *Auslander-Gorenstein* (AG) si R en noetheriano a izquierda y a derecha, satisface la condición de Auslander, y $id({}_RR)$ e $id(R_R)$ son finitas;
- es *Auslander regular* si es Auslander-Gorenstein y tiene dimensión global finita.

2. Algunos resultados

Se quiere socializar algunos resultados relativos al comportamiento para las siguientes construcciones: Localización por sistemas multiplicativos, anillos cocientes, matrices sobre estos anillos, producto finito de anillos. Y finalmente el estudio relacionado con las extensiones de Ore.

Referencias

[1] Björk, J.E., *The Auslander condition on noetherian rings*, Séminaire Dubreil-Malliavin 1987-88, Lect. Notes Math, Springer Verlag, (1989), 137-173.

[2] Clark, J., *Auslander-Gorenstein Rings for Beginners*, International Symposium on Ring Theory, Trends Math., (2001), 95-115.

[3] Ekström, E.K., *The Auslander condition on graded and filtered noetherian rings*, Séminaire Dubreil-Malliavin 1987-88, Lect. Notes Math, Springer Verlag, (1989), 220-245.

[4] Jans, J.P., *Rings and Homology*, Holt, Rinehart and Winston, (1964).

[5] Levasseur, L., *Complexe bidualisant en algébre non commutative*, Séminaire Dubreil-Malliavin 1983-84, Lect. Notes Math, Springer Verlag, (1985), 270-287.

[6] Zaks, A., *Injective dimension of semiprimary rings*, J. Algebra, (1969), 73-89.

Retículos residuados y algunas conexiones con topología y lógica

Sandra Perilla Monroy

Magíster Universidad Nacional, Docente Universidad Santo Tomás de Aquino, Bogotá, Colombia,

smperillam@gmail.com

Resumen

Con esta ponencia se quiere mostrar un enlace entre álgebra, lógica y topología tomando como base la teoría de retículos. Se mostrará un estudio sobre los retículos residuados, estableciendo una adjunción entre los retículos residuados completos y las pretopologías, y además se mostrará que estos retículos resultan ser las semánticas asociadas a las lógicas subestructurales básicas.

1. Introducción

Una característica sobresaliente de la matemática contemporánea es buscar enlaces entre sus diferentes subramas. En particular unas estructuras propensas a revelar este tipo de enlaces son los retículos residuados. Así esta ponencia tiene por objetivo mostrar un enlace más entre álgebra, topología y lógica tomando como base los retículos residuados.

Los retículos residuados son retículos a los que se les agrega una operación de monoide residuada, es decir una operación $\cdot$ para la que existen operaciones binarias $\backslash$ y $/$ de tal forma que para todo x, y, z en el retículo:

$$x \cdot y \leq z \quad \Leftrightarrow \quad x \leq z/y \quad \Leftrightarrow \quad y \leq x\backslash z.$$

Lo anterior se traduce en términos de adjunción a que dado un retículo residuado P, las funciones

$$_xf : P \to P : y \to x \cdot y \quad y \quad f_x : P \to P : y \to y \cdot x$$

tienen adjunta a derecha y sus adjuntas son justamente:

$$_xg : P \to P : y \to_x g(y) = x\backslash y \quad y \quad g_x : P \to P : y \to g_x(y) = y/x$$

respectivamente; esto hace que se deduzcan múltiples propiedades para los retículos residuados a partir del concepto de adjunción.

Se muestra por otra parte una conexión de los retículos residuados completos (cuantales unitarios) con pretopologías. Los cuantales pueden ser representados a través de pretopologías, que tienen

sus raíces en la topología formal según Sambín y cuyo propósito es describir las propiedades de un espacio topológico a través de sus abiertos básicos sin hablar de los puntos del espacio. Para este estudio se introducen primero la categoría de sup-retículos **SL**, que resulta ser la misma categoría de los retículos completos con funciones adjuntas a izquierda, y la categoría de los operadores de clausura **OC**. Se definen dos funtores entre estas categorías: el funtor **Sat** que envía operadores de clausura a sup-retículos mediante la consideración de los puntos fijos del operador, y **Transl** que toma sup-retículos y le asigna el operador de clausura $C_{\vee}U =\downarrow \bigvee U$. Se demuestra que el funtor **Sat** resulta ser adjunto a izquierda del funtor **Transl** y se da un contraejemplo que muestra que estos dos funtores no son una equivalencia entre estas dos categorías, (no siempre que se tome un operador de clausura (X, C), $Transl(SatC)$ es isomorfo a (X, C)). Luego se restringen estos funtores a las categorías de cuantales y de pretopologías. Los cuantales se pueden caracterizar como sup-retículos con una operación de semigrupo que resulta ser distributiva con respecto a la operación de sup y las pretopologías se pueden ver como operadores de clausura estables. Similarmente se tiene una adjunción y no se tiene la equivalencia mediante estos funtores de estas dos categorías, así que una futura investigación será buscar condiciones sobre los operadores de clausura y después sobre las pretopologías, para que estos funtores restringidos a tales operadores de clausura o a tales pretopologías sí formen equivalencias con la categoría de sup-retículos y la categoría de cuantales respectivamente.

Se hará también una introducción a las lógicas subestructurales que se originan ante la necesaria expansión de la lógica a otras facultades del conocimiento como son la lingüística, la filosofía y la teoría de la computación, expansión que las lógicas clásica e intuicionista no alcanzan a abarcar completamente entre otras cosas por no tener control sobre el uso y la combinación de las premisas o los recursos. Lo fundamental para estas lógicas subestructurales es que ellas se formalizan en sistemas de secuentes de Gentzen y se definen mediante restricciones de reglas estructurales como debilitamiento, intercambio y contracción entre otras, que son las que gobiernan el comportamiento de las premisas. Tenemos entre estas lógicas por ejemplo la lógica lineal utilizada en teoría de la computación, la lógica relevante utilizada en filosofía y la lógica del cálculo completo de Lambek utilizada en lingüística. Se muestra además la correspondencia entre las lógicas subestructurales básicas, que son lógicas que extienden al cálculo de Lambek, y los retículos residuados, más aún los retículos residuados completos (cuantales unitarios). Los retículos residuados resultan ser las semánticas asociadas a estas lógicas.

2. Algunos resultados

1. Se obtienen múltiples propiedades para los retículos residuados a partir de la noción de adjunción entre conjuntos ordenados.

2. Se establece una adjunción entre la categoría de los sup-retículos o retículos completos y la categoría de los operadores de clausura.

3. Se establece una adjunción entre la categoría de los cuantales unitarios y la categoría de las pretopologías.

4. Se muestra que los retículos residuados completos son las semánticas asociadas a las lógicas subestructurales básicas.

Referencias

[1] BATTILOTTI, Giulia, SAMBIN,Giovanni, "Pretopologies and a uniform presentation of sup-lattices, quantales and frames", *Ann. Pure Appl.Logic* 137 (2006):30-61. (http://www.math.unipd.it/ sambin/txt/BS2003.pdf).

[2] DOSEN, Kosta, "A Historical Introduction to Substructural Logics", *In Substructural Logics* Oxford University Press, Oxford, 1993, pp. 1-30.

[3] GALATOS,N.,JIPSEN,P.,KOWALSKI,T.,ONO, H.,"Ressiduated Lattices: An Algebraic Glimpse at Subestructural Logics", *Studies in Logic and the foundations of mathematics* vol. 151.

[4] ONO, Hiroakira, "Semantics for Substructural Logics", *Studies in Logic and Computation* Oxford University Press 2 (1993): 259-291.

[5] ONO, Hiroakira, "Subestructural logics and residuated lattices - an introduction", *Trends in logic* 20 (2003):177-212. (http://www.jaist.ac.jp/is/labs/ono-ishihara-lab/ono-lab/Paper/50ysl.pdf).

[6] PERILLA, Sandra, "Retículos residuados y algunas conexiones con topología y lógica", *Universidad Nacional* (2012).

[7] RESENDE, Pedro, "Quantales and observational semantics", *Departamento de Matemáticas. Instituto Superior Técnico.* (http://sqig.math.ist.utl.pt/pub/ResendeP/00-R-qos.pdf).

[8] RESTALL, Greg, *Introduction to substructural logics*, London: Routledge, 2000.

[9] SAMBIN, Giovanni, "The semantics of Pretopologies", *In Substructural Logics* (1993):293-307.

La Categoría de los Matroides

Wilmer Pineda* y Christian Nolasco**

*Docente de Cátedra Fundación Universitaria Los Libertadores, Bogotá, Colombia, wdpinedar@libertadores.edu.co

**Docente de Cátedra Fundación Universitaria Los Libertadores, Bogotá, Colombia, cnolascos@libertadores.edu.co

Resumen

Tomando como base la definición de morfismo entre matroides presentada en [5,cap 8], se presentan diferentes conceptos categóricos relacionados con la categoría de los matroides. En primer lugar se demuestra la relación entre las de jerarquías monomorfismos-inyectividad y epimorfismos-sobreyectividad. Luego, se construyen los igualadores, coigualadores, y el objeto cero(objeto final-inicial) de la categoría de los matroides con el objetivo de demostrar que la categoría es abeliana.

1. Introducción

La Teoría de Matroides es una rama de las matemáticas, fundada en 1935 por Whitney [2], que generaliza el concepto de independencia presente en el Álgebra Lineal, la Teoría de Grafos y otras ramas de la Matemática. La Teoría de Matroides ha mostrado un amplio espectro de aplicaciones y recientemente se han mostrado conexiones con la Teoría de Codificación de Redes[4] y la Teoría de la Información [3].

En los primeros artículos sobre matroides [1] aparece una fuerte relación entre el lenguaje categórico y algunos conceptos como isomorfismo entre matroides y el retículo asociado a un matroide.

En la compilación realizada por White sobre Teoría de Matroides [5,cap 8], se manifiesta como la definición de los morfismos fuertes entre matroides permite establecer teoremas de factorización y relacionar funtorialmente matroides y retículos. Con la apirición de la conexión entre $F-D$ relaciones y las matroides, se espera encontrar conexiones a nivel categórico entre los dos conceptos.

Definición 1. *Sea X un conjunto y sea $j : 2^X \to 2^X$ una aplicación cualquiera. Se dice que j es una **pregeometría** sobre X si se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *Para todo $A \subseteq X$, $A \subseteq j(A)$.*
2. *Si $A \subseteq B \subseteq X$, $j(A) \subseteq j(B)$.*
3. *Para todo $A \subseteq X$, $j(j(A)) = j(A)$.*

4. *Si* $y \in j(A \cup \{x\}) \setminus j(A)$, *entonces* $x \in j(A \cup \{y\})$.

5. *Para todo* $A \subseteq X$,

$$j(A) = \bigcup \{j(A_0); A_0 \subset A, A_0 \text{ finito}\}.$$

Al par (X, j) *se le llama* ***matroide****.*

Definición 2. *Sea* (X, j) *un matroide y sea* $A \subseteq X$. *Se dice que* A *es cerrado si* $j(A) = A$.

Definición 3. *Sean* (X, j) *y* (Y, k) *dos matroides cualesquiera. Un morfismo fuerte entre matroides es una aplicación* $f : X \cup \{o\} \to Y \cup \{o\}$ *tal que* $f(o) = o$ *y si* B *es un subconjunto cerrado de* Y, *entonces* $f^{-1}(B)$ *es un subconjunto cerrado de* X.

Con estas nociones se define $\underline{Mat}$ la categoría cuyos objetos son los matroides y los morfismos son los morfismos fuertes entre matroides.

2. Algunos resultados

Proposición 4. *En* $\underline{Mat}$ *vale*

1. f *es mono si, y sólo si,* f *es inyectivo.*

2. f *es epi si, sólo si,* f *es sobreyectivo.*

Corolario 5. *En* $\underline{Mat}$ *existen factorizaciones epi-mono. Más aún, cada morfismo fuerte puede ser factorizado por un embebimiento, seguido de una contracción.*

Proposición 6. *En* $\underline{Mat}$ *hay igualadores, coigualadores y objeto cero.*

Corolario 7. *En* $\underline{Mat}$ *hay productos y coproductos finitos además de pullbacks y pushouts.*

Corolario 8. *La categoría* $\underline{Mat}$ *es una categoría abeliana.*

Referencias

[1] Kung, J.P.S, *A source Book in matroid theory*, Birkhauser, Boston, 1986.

[2] Oxley, J., *Matroid Theory*, New York: Oxford Univ. Press, 1992.

[3] Raymond W. Yeung *Information Theory and Network Coding*, New York: Springer Verlag, Mayo, 2011.

[4] R. Dougherty, C. Freiling y K. Zeger *Network Coding and Matroid Theory*, Proceedings on the IEEE vol.99, no. 3, pp 388-405, Marzo. 2011.

[5] White, N. *Theory of matroids*, Cambridge Univ. Press, 1986.

[6] MacLane, S., *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, 5, 1998.

Números de Fibonacci módulo m

Carlos Arturo Rodriguez Palma* y
Yzel Wlly Alay Gómez Espíndola**

*Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, Grupo *Alcom*, crodriguez@matematicas.uis.edu.co

**Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, ywage03@gmail.com

Resumen

Los números de la sucesión de Fibonacci se construyen de forma recursiva partiendo de dos elementos iniciales, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ con la recurrencia $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para todo $n > 1$. Una característica interesante de los números en esta sucesión es que al calcular sus residuos módulo un entero positivo r, estos aparecen de forma regular, además es posible calcular el periodo con el cual aparecen. El periodo se define como el menor entero k tal que $F_k \equiv 0 \pmod{r}$ y $F_{k+1} \equiv 1 \pmod{r}$. Algunos resultados sobre la sucesión de Fibonacci modular permiten probar que en ésta, el mayor número formado sólo con un dígito es el 55. En nuestra ponencia mostraremos como se obtiene este resultado.

1. Introducción

Mientras el municipio de Pisa, Italia se adentraba en el ultimo tercio del siglo XII, sólo tres años antes del inicio de la obra de una de las torres más populares de Europa, nació un personaje que traería a este municipio de la región de la Toscana aún más orgullo, me refiero a Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci quien ha tenido y tiene gran reconocimiento no sólo en la atmósfera matemática sino también en el arte, biología, etc. Se le conoce principalmente por la invención de la sucesión que lleva su nombre, surgida como consecuencia del estudio del crecimiento de las poblaciones de conejos.

Por años se ha venido relacionando la sucesión de Fibonacci con fenómenos de la naturaleza y su relación con la llamada sección de oro, presente en contextos artísticos y matemáticos, hacen de esta la sucesión numérica más emblemática. Estudiosos han dedicado parte de sus vidas a desentrañar propiedades y relaciones que involucran los números en esta sucesión. Uno de los estudios más modernos analiza el comportamiento de los residuos de los números en la sucesión módulo un entero r.

2. Algunos resultados

En la charla se pretende ilustrar el uso de los conceptos asociados a los números de Fibonacci modulo r para probar que en esta sucesión el número más grande formado con solo un dígito es

el 55. En otras palabras se quiere probar que los valores $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10$ son los únicos de $n \leq 20$ para que

$$F_n = a \cdot \frac{10^m - 1}{9}.$$

Se planteara la posibilidad de probar este resultado por reducción al absurdo y considerando casos, se mostrara uno de los casos. Para ello se mostraran algunos resultados relacionados con la periodicidad de la aparición de los residuos modulo r.

Definición 1. *La sucesión de Fibonacci sigue la ecuación de recurrencia lineal homogénea de orden 2*

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

donde n es un natural tal que $n \geq 2$, $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$.

La siguiente es una forma alternativa de ver la sucesión de Fibonacci se obtiene usando conceptos de funciones generadoras

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

En el desarrollo de la prueba se usaran algunas identidades que relacionan los números en la sucesión de Fibonacci con los de la sucesión de Lucas, veamos algunas de estas.

Identidades 2.

1. $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$.

2. $F_m \mid F_{mn}$ *para toda pareja de enteros* m, n.

3. $F_{2n} = F_nL_n$ *para* $n \geq 0$.

4. $L_{2n} = L_n^2 + 2(-1)^{n+1}$ *para* $n \geq 0$.

5. $L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n$ *para* $n \geq 0$.

Adentrándonos más en los estudios relacionados modulo n, tenemos:

Definición 3. *Para $n > 1$, $k(n)$ es el menor índice positivo m tal que $n \mid F_{k(n)}$, es decir el menor entero m tal que $F_m \equiv 0 \pmod{n}$.*

Ejemplo 4. *(a). $k(2) = 3$ pues $F_3 = 2$ es el menor número de Fibonacci tal que $2 \mid F_i$.*

(b). $k(13) = 7$ pues $F_7 = 13$ es el menor número de Fibonacci tal que $13 \mid F_i$.

Teorema 5. *La sucesión de Fibonacci módulo n es periódica.*

Definición 6. *El periodo de repetición de la sucesión de Fibonacci módulo un entero positivo n, es el menor entero positivo $l(n)$ tal que*

$$F_{l(n)} \equiv 0 \pmod{n} \qquad y \qquad F_{l(n)+1} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Directamente de esta definición se sigue que para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.

$$F_k \equiv 0 \pmod{n} \quad \text{y} \quad F_{k+1} \equiv 1 \pmod{n} \quad \Leftrightarrow \quad l(n) \mid k.$$

Corolario 7. *Cada entero positivo divide a un número infinito de numeros de Fibonacci.*

Proposición 8. *Sea n un entero, $n \mid F_m \Leftrightarrow k(n) \mid m$.*

Finalmente algunos resultados que nos permite encontrar algunos periodos, en [1] se pueden encontrar resultados adicionales que permiten encontrar periodos para enteros con formas distintas, sin embargo esta no serán de nuestro interés.

Teorema 9. $l(2^t) = 3 \times 2^{t-1}$.

Teorema 10. $l(5^t) = 4 \times 5^t$.

Referencias

[1] Luca, Florian. *Fibonacci and Lucas numbers with only one ditinct digit. Portugaliae Mathematica*, vol. 57 fasiculo 2, 2000.

[2] Renault, Marc. *The Fibonacci secuence under varius moduli.* 1996

[3] Riasat, Samin. $\mathbb{Z}[(\varphi)]$ *and the Fibonacci seceunce modulo n. Mathematical Reflections 1, 2011*

[4] Campbell II, Charles W. *The period of the Fibonacci secuence modulo j.* Math 399 Spring 2007.

TOPOLOGÍA Y GEOMETRÍA

Plenarias y semiplenarias

Geometrías afines reales en dimensión 2

Alberto Medina

Université de Montpellier 2 y Universidad de Antioquia.

Resumen

El objetivo de la conferencia es presentar una rápida visión de las geometrías planas reales. Comenzaremos recordando las nociones básicas de la geometría afín euclidiana del plano y su grupo de tranformaciones. Posteriormente haremos una introducción a la geometría afín de Minkowski utilizada en relatividad. Finalmente mostraremos que existe una infinidad de geometrías afines no conmutativas y concluiremos presentando algunos problemas abiertos.

Higher Auslander-Reiten theory

Erik Backelin

Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, erbackel@uniandes.edu.co

Abstract

We develop an Auslander Reiten theory on additive subcategories of mod(R) using the language of t-structures on triangulated categories. As an application we discuss extensions of Verma modules over a semi-simple Lie algebra.

1. Higher Auslander Reiten theory

In my talk I will discuss the following material:

1.1. Let R be a finite dimensional algebra over a field k and mod(R) the category of finitely generated left R-modules.

Auslander and Reiten introduced the notion of an an *almost split* (also called Auslander Reiten or shortly AR-) sequence in mod(R). This is a short exact sequence

$$0 \to M' \to M \xrightarrow{\pi} M'' \to 0$$

which is not split (i.e. there is no map $\epsilon : M'' \to M$ such that $\pi \circ \epsilon = Id_{M''}$). AR-sequences are popular tools in the study of finite dimensional algebras, for instance they can be used to describe a certain directed graph called the AR quiver that is a fundamental invariant of the algebra.

1.2. Let $\mathrm{K}^b(R)$ be the category of bounded complexes of R-modules modulo homotopy (see [KS]). $\mathrm{K}^b(R)$ is a triangulated category; it comes with the shift functor [1] that shifts a complex one step to the left: $X[1]^i \stackrel{\text{def}}{=} X^{i+1}$. A t-structure (see [BBD]) on $\mathrm{K}^b(R)$ is a pair of subcategories $D^{\leq 0}, D^{\geq 0}$ where $D^{\leq 0} = \{X \in \mathrm{K}^b(R); \mathrm{Hom}(D^{\leq 0}[1], X) = 0\}$, $D^{\leq 0}$ is closed under left shifts and each object in $\mathrm{K}^b(R)$ can be glued from an object in $D^{\leq 0}[1]$ and an object in $D^{\geq 0}$.

The important thing about t-structures is that the heart $\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} D^{\leq 0} \cap D^{\geq 0}$ of a t-structure is always an abelian category (this roughly speaking means that it behaves like the category of modules over a ring: there are kernels, cokernels etc and Noether's isomorphism theorems hold).

Omar Jaramillo and I ([BJ]) showed that $\mathrm{K}^b(R)$ carries a natural t-structure where $D^{\leq 0} = \{X \in \mathrm{K}^b(R); X^n = 0, n > 0\}$. The heart $\mathcal{A}$ of this t-structure consists of homotopy classes of complexes

$$X : 0 \to X^{-2} \to X^{-1} \to X^0$$

which are exact except perhaps in degree 0. We showed that simple objects of $\mathcal{A}$ essentially correspond to AR-sequences and showed the existence of a Serre Duality functor on $\mathrm{K}^b(R)$ from which we deduced the existence of AR-sequences with any prescribed indecomposable ending term.

1.3. In a joint with Juan Camilo Arias (in preparation), we more generally consider AR theory in an additive subcategory $\mathcal{C} \subset \mathrm{mod}(R)$. (This is called higher AR-theory, see [I, I2], because the "almost split" sequences are now longer.) Following the spirit of [BJ] we show that these can be interpreted as simple objects in the heart $D^{\leq 0} \cap \mathrm{K}^b(\mathcal{C})$ which is gives a t-structure on $\mathrm{K}^b(\mathcal{C})$ under an assumption which essentially says that $\mathrm{mod}(R)$ can be approximated by $\mathcal{C}$. We prove the existence of a Serre functor on $\mathrm{K}^b(\mathcal{C})$ and show an intimate interplay between $\mathcal{A}$ and the heart $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}$ of the t-structure on $\mathrm{K}^b(\mathcal{C})$.

As an application we rediscover Iyama's higher AR-theory ([I]) in maximal n-orthogonal subcategories of $\mathrm{mod}(R)$.

1.4. The main application that we are presently developing is to the theory of infinite dimensional representations of a complex semi-simple Lie algebra $\mathfrak{g}$. There is the category $\mathcal{O}$ of certain such representations introduced by Bernstein Gelfand and Gelfand. By a famous work of Soergel, [10], the derived category of $\mathcal{O}$ is equivalent to $\mathrm{K}^b(\mathcal{C})$ where $\mathcal{C}$ is a certain subcategory of $\mathrm{mod}(S)$ where S is the coinvariant algebra of the Weyl group of $\mathfrak{g}$.

We show that this picture fits into the framework of our generalized AR-theory and use this to produce new resolutions that (at least theoretically) can be used to construct (higher) ext-groups of Verma modules in the category $\mathcal{O}$. The main novelty here is the observation that $\mathrm{mod}(S)$ can be approximated bythe Soergel category $\mathcal{C}$ so that one (using the interplay between $\mathcal{A}$ and $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}$) can use certain resolution, intrinsic for $\mathrm{mod}(S)$, to calculate the desired cohomology.

References

[ARS] M. Auslander, I. Reiten and S. Smalö, "Representation theory of Artin Algebras", Cambridge Studies in Mathematics, (1997).

[BJ] E. Backelin and O. Jaramillo, "Auslander-Reiten sequences and t-structures on the homotopy category of an abelian categoryÓ, Journal of Algebra., vol 339, pages 80-96 (2011).

[BBD] A. Beilinson, J. Bernstein and P. Deligne, "Faisceaux pervers", Astrisque, 100, Soc. Math. France, Paris (1982).

[I] O. Iyama "Higher dimensional Auslander-Reiten theory on maximal orthogonal subcategories", Advances in math. 210, no 1 22-50, (2007)

[I2] O. Iyama, "Auslander-Reiten theory revisited". In Trends in representation theory of algebras and related topics, EMS Ser. Congr. Rep., pages 349Ð397. Eur. Math. Soc., Zürich, (2008).

[KS] M. Kashiwara and P. Shapira "Categories and sheaves", Springer-Verlag (2005)

[S] W. Soergel, "Kategorie O, perverse Garben, und Moduln uber den Koinvarianten zur Weylgruppe", *Journal of the AMS* 3, 421-445 (1990)

Cocientes en geometría algebraica real

Florent Schaffhauser

Departamento de Matemáticas, Universidad de Los Andes, Bogotá, Colombia. fm.schaffhauser416@uniandes.edu.co

Resumen

La teoría geométrica de invariantes permite definir cocientes bajo hipótesis razonablemente generales en geometría algebraica, por ejemplo cuando un grupo reductivo actúa de manera linealizable en una variedad casi-proyectiva. Más aún, si la variedad y la acción del grupo están definidas en los reales, el cociente correspondiente también. Sin embargo, los puntos reales de tal cociente en general no tienen una interpretación modular satisfactoria (a diferencia de los puntos complejos). En esta charla, nos proponemos explicar ese fenómeno mirando algunos ejemplos básicos y a continuación introducir una noción de cociente en geometría algebraica real que permite eliminar ese problema. Si el tiempo lo permite, diremos unas palabras sobre la topología de esos cocientes.

Affine Lie groups

Omar Saldarriaga

Universidad de Antioquia, Colombia, saldarriagao55@gmail.com

Abstract

An affine Lie group G is a group equipped with a torsion free and flat connection, and such connection is called an affine structure in G. The group of diffeomorphisms of G preserving the affine structure ∇ is known in the literature as the affine group of G, $Aff(G, \nabla)$, however it is not known if this group admits an affine structure. Recently Medina has conjectured that the affine group indeed admits an affine structure. In this talk we afford this question and show some special cases where the conjecture holds.

On the classification of abelian extensions of Lie algebras

Paul Bressler

Departamento de Matemáticas, Universidad de Los Andes, Bogotá, Colombia. paul.bressler@gmail.com

Abstract

For a flat Lie algebra $\mathfrak{g}$ and a $\mathfrak{g}$-module M in a symmetric monoidal abelian category linear over a field of characteristic zero we establish an equivalence of categories between the groupoid of Lie algebra extensions of $\mathfrak{g}$ by M and the groupoid of extensions in the category of $\mathfrak{g}$-modules of the augmentation ideal $U(\mathfrak{g})_+$ by M.

Los conjuntos también se mueven

Héctor Méndez

UNAM, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, México D.F., hml@ciencias.unam.mx

Resumen

Una función continua f definida de un espacio métrico y compacto X en sí mismo nos permite definir un sistema dinámico discreto. Dado $x \in X$, la sucesión $\{x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots\}$ es la órbita del punto x bajo f. Interpretamos esta situación así: Un objeto está en la posición x en el tiempo $t = 0$, en la posición $f(x)$ en $t = 1$, en $f(f(x))$ en $t = 2$, y así sucesivamente. Dado un conjunto compacto, no vacío, $A \subset X$ la sucesión $\{A, f(A), f(f(A)), f(f(f(A))), \dots\}$ representa ahora el movimiento del conjunto A, inducido por f, al paso del tiempo.

En esta plática presentamos algunos ejemplos de funciones f y de los dos tipos de dinámica que ella induce: el movimiento individual de puntos de X, y el movimiento colectivo de subconjuntos compactos de X.

En nuestros ejemplos el espacio X es el intervalo unitario, es una gráfica y, si todo va muy bien, es una dendrita.

La meta es presentar una introducción accesible a la dinámica en hiperespacios. Mostrar algunas de las relaciones entre propiedades básicas de la dinámica individual y de la dinámica colectiva.

TOPOLOGÍA Y GEOMETRÍA

Cursillos

Una introducción a los retractos absolutos y a los retractos de vecindad absolutos

Sergio Macías

Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito Exterior, Ciudad Universitaria, México D. F., México, sergiom@matem.unam.mx

Resumen

A principios de los años treinta, Karol Borsuk define el concepto de *retracto*, así como los conceptos de *retracto absoluto* y *retracto de vecindad absoluto*. La teoría de estos espacios, llamada *Teoría de los Retractos*, se ha desarrollado tanto que, para 1967 ya se habían escrito dos libros sobre ellos: uno escrito por Sze-Tsen Hu en 1965 y el otro por el mismo Karol Borsuk en 1967. La teoría de los retractos ha resultado ser muy útil en la topología de dimensión infinita. Se han estudiado los retractos absolutos en la teoría de los hiperespacios de espacios métricos, compactos y conexos. Junto con estos conceptos surgieron las nociones de *extensor absoluto* y de *extensor de vecindad absoluto*.

El objetivo de este curso es presentar algunas de las propiedades elementales que tienen los retractos absolutos y los retractos de vecindad absolutos. Así como presentar la equivalencia de estas nociones con los conceptos de extensor absoluto y extensor de vecindad absoluto, respectivamente, en el caso de espacios métricos separables. Además, caracterizará a los retractos absolutos como aquellos retractos de vecindad absolutos que son contráctiles.

Una introducción a los espacios topológicos bien-formados

Félix A. Páez Díaz

Universidad Pontificia Bolivariana, Seccional Bucaramanga, Colombia, felix.paez@upb.edu.co

Resumen

Se pretende hacer una introducción al estudio de los espacios Bien-formados. Se muestra la relación que guardan el orden y la topología al hacer ciertas operaciones sobre puntos e intervalos en general, al igual que algunas propiedades sobre axiomas de separación.

1. Introducción

Dado un Conjunto X, existen diversos mecanismos de construcción de topologías a partir de relaciones de preorden sobre X y viceversa. Uno de ellos se da al asociar a cada topología sobre un conjunto X la relación de *especialización* definida con base en la adherencia: $x \lhd y$ si $x \in \overline{\{y\}}$. Esta relación siempre es de preorden sobre X y es de orden si y sólo si la topología tiene la propiedad T_0.

Recíprocamente, dada una relación de preorden $\preceq$ sobre X siempre existe un conjunto de topologías sobre X cuya especialización es precisamente $\preceq$. Estas topologías son llamadas concordantes con $\preceq$ en [12] y equivalentes en [4]. Dichas construcciones han sido estudiados en numerosos trabajos, tanto desde el punto de vista conjuntista como desde el punto de vista categórico (ver por ejemplo [1], [2], [3], [8], [12] y [11]).

Otro mecanismo se da a partir de las relaciones $\leq$ de orden sobre X al tomar las topologías que tienen una subbase constituida por colas o rayos de $\leq$, siendo de mayor relevancia el caso en el que $\leq$ es una relación de orden total sobre X.

En este orden de ideas, podemos introducir la noción de espacio ordenado como una tripla $(X, \leq, \tau)$ donde X es un conjunto no vacío, $\leq$ es una relación de orden total sobre X y τ es una topología sobre X.

Entre los espacios ordenados se encuentran aquellos en los que τ tiene subbase $\mathcal{S}$ tal que $\mathcal{S} \subseteq \{A \subseteq X \mid A = \uparrow A \text{ o } A = \downarrow A\}$, donde $\uparrow A = \{x \in X \mid x \geq a \text{ para algún } a \in A\}$ y $\downarrow A = \{x \in X \mid x \leq a \text{ para algún } a \in A\}$. Un espacio ordenado de este tipo se conoce como ***espacio Bien-formado*** ([4]). Estos espacios han encontrado recientemente importantes aplicaciones

en áreas como tratamiento y procesamiento de imágenes ([9]).

Entre la clase de los espacios Bien-formados aparecen los espacios ordenados generalizados de Čech "GO-spaces"([1] y [2]), y los espacios topológicos linealmente ordenados "LOTS" ([4]). Los primeros se caracterizan por ser los subespacios de los segundos, y los LOTS, son los espacios Bien-formados en los cuales la subbase consiste de los rayos de la forma $(x, \rightarrow) := \{y \in X \mid x < y\}$ junto con los de la forma $(\leftarrow, x) := \{y \in X \mid y < x\}$ (llamados rayos abiertos-ordenados). La topología de un LOTS se conoce como la topología de los intervalos y se denota mediante $\tau^{intervalos}$ ([4]).

Los espacios ordenados generalizados de Čech y los LOTS, han sido estudiados ampliamente por sus importantes propiedades. Estos últimos se destacan por tener la propiedad de "generar" a los espacios Bien-formados a partir de subespacios cocientes y limites de sistemas inversos ([4] y [5]).

En este curso corto, basados en [3], [4] y [5], pretendemos hacer una introducción al estudio de los espacios Bien-formados. Pretendemos mostrar la relación que guardan el orden y la topología al hacer ciertas operaciones sobre puntos e intervalos en general, al igual que algunas propiedades sobre axiomas de separación y mostrar que todas estas propiedades fallan si la relación involucrada no es de orden total.

2. Desarrollo

A continuación relacionamos algunas de las principales propiedades que se pretenden presentar en este curso. En lo que sigue, asumimos que $(X, \leq, \tau)$ es un espacio Bien-formado.

Proposición 1. *Los intervalos de la forma $U \cap V$ donde U es un segmento inicial abierto y V es un segmento final abierto, forman una base para la topología de X.*

Proposición 2. *Si $x \in X$, entonces $\overline{[x, \rightarrow)} = \overline{\{x\}} \cup [x, \rightarrow)$, y $\overline{(\leftarrow, x]} = \overline{\{x\}} \cup (\leftarrow, x]$.*

Proposición 3. *Si A es un subconjunto abierto (resp. cerrado) de X, entonces los conjuntos $\uparrow A$ y $\downarrow A$ son abiertos (resp. cerrados).*

Proposición 4. *Un punto $x \in X$ es abierto (resp. cerrado) si, y sólo si, los rayos abiertamente delimitados por x, $(\leftarrow, x)$ y $(x, \rightarrow)$ son cerrados (resp. abiertos).*

Proposición 5. *La adherencia de un intervalo es un intervalo y la adherencia de un rayo es un rayo. De manera más precisa, la adherencia de un segmento final (resp. inicial) es un segmento final (resp. inicial).*

Proposición 6. *El interior de un intervalo es un intervalo y el interior de un rayo es un rayo. De manera más precisa, el interior de un segmento final (resp. inicial) es un segmento final (resp. inicial).*

Proposición 7. *El interior de un intervalo es un intervalo y el interior de un rayo es un rayo. De manera más precisa, el interior de un segmento final (resp. inicial) es un segmento final (resp. inicial).*

Proposición 8. *Cada intervalo maximal en un conjunto abierto (resp. cerrado) A de X, es abierto (resp. cerrado).*

Proposición 9. *Si τ es la topología de un espacio Bien-formado X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *X es un GO espacio,*
2. *X es T_1,*
3. *$\tau^{intervalos} \subseteq \tau$,*
4. *X es de Hausdorff.*

Referencias

[1] Acosta L., "Topologías consistentes", Bol Mat. (NS) 5 No-1 (1998), 15–26.

[2] Acosta L. & Lozano E., "Una Caracterización de las Topologías Compactas T_0", Bol Mat. (NS) VI No-2 (1999), 77–84.

[3] Andina S.J. & Thron W.J., "Order-induced Topological Properties", Pacific J. Math. 75 (1978) 297–304.

[4] Bennett H. & Lutzer D., *Recent Developments in the Topology of Ordered Spaces*, in Recent Progress in General Topology II ed. by M Husek and J. van Mill, Elsevier, Amsterdam, 2002 (MR 1969994).

[5] Čech E., *Topologické Prostory*, Nakl. ČSAV, Prague, 1959.

[6] Čech E., *Topological Spaces*, John Wiley & Sons, London, 1966.

[7] Herrlich H. & Kronheimer E.H., "Generating ordered topological spaces from LOTS", Topology appl, 105 (2000), 231–235.

[8] Keimel K., et al., *A Compendium of Continuous Lattices*, Springer-Verlag (1980).

[9] Khalimsky E., Kopperman R.D. & Meyer P.R, "Computer graphiscs and connected topologies on finite ordered sets", Topology appl, 36 (1990), 1–17.

[10] Kopperman R.D., Kronheimer E.H. & Wilson R.G., "Topologies on totally ordered sets", Topology appl, 90 (1998), 165–185.

[11] Lorrain F., "Notes on Topological Spaces with Minimum Neighborhoods", Amer. Math. Monthly. 76 (1969), 616-627.

[12] Lozano E., *Sobre Algunas Topologías concordantes*, Tesis de Magister, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2000.

[13] Páez F., *Acerca de la Categoría de los Espacios Topologicos Totalmente Ordenados y Algunas de sus Subcategorías*, Tesis de Magister, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2009.

TOPOLOGÍA Y GEOMETRÍA

Ponencias

Una visión algebraica de la conexidad topológica

Sonia M. Sabogal P.

Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, ssabogal@uis.edu.co

Resumen

Usando la dualidad entre una categoría que notaremos **ABRL** y cuyos objetos son los anillos de Boole con 1, dotados con una relación de ligazón, y la categoría que notaremos **RCHS**, cuyos objetos son las representaciones de cocientes Hausdorff de espacios de Stone, (esta dualidad fué establecida en [10]), se obtiene una versión algebraica de la conexidad topológica de dichos cocientes.

1. Introducción

La importancia, trascendencia, profundidad y belleza del teorema de representación de Stone (llamado también dualidad de Stone), son ampliamente reconocidas. Este teorema, presentado por M.H. Stone en la década de los años treinta [12] y [13], en su versión para anillos de Boole con 1, establece la equivalencia de las categorías: *Anillos de Boole con 1-homomorfismos de anillos de Boole que preservan el 1* y *Espacios de Stone-funciones continuas*. A partir de los artículos [12] y [13], numerosas generalizaciones de la dualidad de Stone han sido obtenidas por ejemplo en [14, 5, 11, 8, 9, 2, 3, 4, 6, 1, 7] entre muchas otras. En [10] se obtiene una extensión de la dualidad de Stone para anillos de Boole con 1, de una manera un poco diferente a las mencionadas anteriormente, ya que en lugar de omitir condiciones en la definición de anillo de Boole con 1, se consideran estos anillos enriquecidos con un cierto tipo de relación que llamamos relación de ligazón: dado un par (A, α), donde α es una relación de ligazón en A, se definen una topología y una relación de equivalencia cerrada sobre el conjunto de ultrafiltros de A (el espectro de A), para obtener un espacio dual al par dado (A, α). De esta manera todo par (A, α) es isomorfo al anillo Booleano de los subconjuntos abierto-cerrados del espectro de A, dotado con cierta relación; y todo espacio de Stone dotado con una relación de equivalencia cerrada (esto es, toda representación de un cociente Hausdorff de un espacio de Stone), constituye el dual de un anillo de Boole con 1 dotado con una relación de ligazón. Las parejas (A, α) son una generalización de las álgebras Booleanas, y las representaciones de cocientes Hausdorff de espacios de Stone son una generalización de los espacios de Stone.

Establecida la dualidad de las categorías **ABRL** y **RCHS** se tiene entonces que la teoría de los anillos de Boole con 1 y con una relación de ligazón, es matemáticamente equivalente a la teoría de los cocientes Hausdorff de los espacios de Stone. De esta manera conceptos algebraicos en el contexto de la primera categoría se pueden traducir a conceptos topológicos en el contexto de la segunda categoría, y recíprocamente.

En esta charla se mostrará una traducción del concepto de conexidad topológica en la categoría **RCHS**, al lenguaje algebraico de la categoría **ABRL**.

2. Algunos resultados

Una vez definidas las categorías **ABRL** y **RCHS**, se definirá también una noción de conexidad algebraica en **ABRL** y se mostrará:

1. **ABRL** y **RCHS** son categorías dualmente equivalentes y esta dualidad constituye una extensión de la dualidad de Stone.
2. Si (A, α) es un objeto de **ABRL**, entonces (A, α) es conexo si y solo si su objeto dual en la categoría **RCHS**, representa un cociente conexo topológicamente.
3. Si $(X, \sim)$ es un objeto de **RCHS**, entonces $X/\sim$ es conexo topológicamente si y solo si su objeto dual en la categoría **ABRL** es conexo algebraicamente.

Referencias

[1] Bauer A.& Cvetko-Vah K. , *Stone duality for skew Boolean algebras with intersections*, arXiv preprint arXiv:1106.0425 (2011).

[2] Cignoli R., *Quantifiers on distributive lattices*, Discrete Mathematics 96 (1991), 183–197.

[3] David E. & Erné M., *Ideal completion and Stone representation of ideal-distributive ordered sets*, Topol. and its Appl. 44 no. 1-3 (1992), 95–113.

[4] David E., *Topological representation of posets*, Algebra Universalis, 30 no. 2 (1993), 221–233.

[5] Gratzer G., *A generalization of Stone's representation theorem for Boolean algebras*, Duke Math. J. 30 (1963), 469–474.

[6] Hartonas C. & Dunn J.M., *Stone duality for lattices*, Algebra Universalis 37 no. 3 (1997), 391–401.

[7] Kudryavtseva G., *A refinement of Stone duality to skew Boolean algebras*, Algebra Univers., 67 (2012), 397–416.

[8] Priestley H.A., *Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces*, Bull. London Math. Soc. 2 (1970), 186–190.

[9] Priestley H.A., *Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices*, Proc. London Math. Soc. (3) 24 (1972), 507–530.

[10] Sabogal S.M., *An extension of the Stone duality*, Acta Math. Hungar. 88 (3) (2000), 205–211.

[11] Speed T.P., *Spaces of ideals of distributive lattices I. Prime Ideals*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liege 38 (1969), 610–628.

[12] Stone M.H., *The theory of representations for Boolean algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), 37–111.

[13] Stone M.H., *Applications of the theory of Booleans rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), 375–481.

[14] Stone M.H., *Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics*, Casopis pest. mat. fys. 67 (1937), 1–25.

A sharp height estimate for compact hypersurfaces with constant k-mean curvature in warped product spaces

Sandra C. García-Martínez*, Debora Impera** and Marco Rigoli***

*Universidade de São Paulo, São Paulo, Brazil, sancarol@ime.usp.br

**Università degli studi di Milano-Bicocca, Milan, Italy, debora.impera@unimib.it

***Università degli studi di Milano, Milan, Italy, marco.rigoli@unimi.it

Abstract

In this talk we will show a sharp height estimate concerning compact hypersurfaces immersed into warped product spaces with some constant higher order mean curvature, and whose boundary is contained into a slice. We will apply these results to draw topological conclusions.

1. Introduction

In recent years height estimates for constant mean curvature graphs have been studied by many authors, since they are intimately related to important properties of the geometry of submanifolds. The first result in this direction was obtained by Heinz [5] who proved that a compact graph of positive constant mean curvature H in Euclidean 3-space with boundary on a plane can reach at most height $1/H$ from the plane. More recently an optimal bound was also obtained for compact graphs and also for compact embedded surfaces with constant mean curvature and boundary on a plane in the 3-dimensional hyperbolic space by Korevaar, Kusner, Meeks and Solomon [7]. In the case of a product $\mathbb{R} \times \mathbb{P}^2$, with $\mathbb{P}^2$ any Riemannian surface, height estimates were exhibited by Hoffman, de Lira and Rosenberg in [6].

The natural generalization of the mean curvature for an n-dimensional hypersurface are the k-mean curvatures H_k, $k = 1, \ldots, n$, that are defined via the elementary symmetric functions of the principal curvatures of the immersion. Therefore it is natural to try to extend the previous results to the case of constant higher order mean curvature. This was done first by Rosenberg in [8], where he proved estimates for the height function of compact hypersurfaces with positive constant k-mean curvature H_k embedded either into the Euclidean or the Hyperbolic space. Later on, the same author, jointly with Cheng, [3], found height estimates for compact vertical graphs with positive constant k-mean curvature in the product manifold $\mathbb{R} \times \mathbb{P}$ and with boundary on a slice, that is, on a submanifold of the form $\mathbb{P}_\tau = \{\tau\} \times \mathbb{P}$ for some $\tau \in \mathbb{R}$. Finally, Alías and Dajczer in [1] gave height estimates

in the case of compact hypersurfaces of positive constant mean curvature immersed into general warped product spaces and with boundary on a slice, generalizing for $k = 1$, the previous results obtained by Cheng and Rosenberg. Our aim is to complete the picture described above extending the results of Alías and Dajczer to the case of compact hypersurfaces of constant positive k-mean curvature, $2 \leq k \leq n$, in warped product spaces.

We finally observe that, in [3], height estimates were used in order to obtain geometric properties of properly embedded hypersurfaces without boundary. More precisely, Cheng and Rosenberg proved that a hypersurface of constant k-mean curvature properly embedded in a product $\mathbb{R} \times \mathbb{P}$, where $\mathbb{P}$ is a compact manifold with non-negative sectional curvature, has at least two ends, or, equivalently, it can not lie in a half-space. Furthermore, some topological restrictions using height and horizontal estimates were obtained in [3].

In this circle of ideas, we apply our height estimates in order to prove non-existence results for properly immersed complete hypersurfaces without boundary in pseudo-hyperbolic spaces contained in a half-space.

2. Some results

In this section we exhibit some of our main results that are included in [4].

Proposition 1. *Let $f : \Sigma \hookrightarrow \mathbb{R} \times_\rho \mathbb{P}^n$ be a compact constant k-mean curvature hypersurface, $1 \leq k \leq n$, with boundary $f(\partial\Sigma) \subset \mathbb{P}_\tau$ for some $\tau \in \mathbb{R}$. Then*

- *(i) If $H_k \leq \inf_{[\tau,+\infty)} \mathcal{H}_k$ and $\mathcal{H}_1(\tau) > 0$, $\mathcal{H}_1' \geq 0$ on $[\tau, +\infty)$ for $k \geq 2$, then the height function satisfies $h \leq \tau$;*
- *(ii) If $H_k \geq \sup_{(-\infty,\tau]} \mathcal{H}_k$ and either $H_2 > 0$ or there exists an elliptic point of Σ when $k \geq 3$ then the height function satisfies $h \geq \tau$,*

where $\mathcal{H}_k = (\rho'/\rho)^k$ is the k-mean curvature of each leaf $\mathbb{P}_t$ of foliation $t \to \mathbb{P}_t$ on warped product space $\mathbb{R} \times_\rho \mathbb{P}^n$.

When the warped product space is a pseudo-hyperbolic space adding a hypothesis on the sectional curvature of the fiber $K_{\mathbb{P}}$ we are able to prove the following:

Theorem 2. *Let $f : \Sigma \hookrightarrow \mathbb{R} \times_{\mathrm{e}^t} \mathbb{P}^n$ be a compact constant k-mean curvature hypersurface, $2 \leq k \leq n$, with boundary $f(\partial\Sigma) \subset \mathbb{P}_\tau$ for some $\tau \in \mathbb{R}$ and whose angle function Θ does not change sign. Assume that $K_{\mathbb{P}} \geq 0$ and set $C = \log\left(H_k^{1/k}/(H_k^{1/k} - 1)\right)$. If $H_k > 1$ and there exists an elliptic point when $k \geq 3$, then $\tau \leq h \leq \tau + C$. Furthermore, $H_k = 1$ if and only if $h = \tau$.*

Theorem 3. *Let $f : \Sigma \hookrightarrow \mathbb{R} \times_{\cosh t} \mathbb{P}^n$ be a compact hypersurface of constant k-mean curvature $H_k \geq 1$, $2 \leq k \leq n$. Suppose that the boundary of Σ satisfies $f(\partial\Sigma) \subset \mathbb{P}_0$ and that the angle function Θ does not change sign. Assume that $K_{\mathbb{P}} \geq -1$ and set $\tanh C = 1/H_k^{1/k}$. Then $0 \leq h \leq C$.*

Using the height estimates that we have found above, we are able to prove topological results for non-compact hypersurfaces of constant higher order mean curvature in pseudo-hyperbolic spaces.

Theorem 4. *Let Σ be a non-compact hypersurface (without boundary) properly immersed in a pseudo-hyperbolic space $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{P}^n$ with compact fiber $\mathbb{P}^n$ satisfying $K_{\mathbb{P}} \geq 0$. Assume that Σ has constant k-mean curvature $H_k \geq 1$, for some $2 \leq k \leq n$, that there exists an elliptic point if $k \geq 3$ and that the angle function Θ does not change sign. Then the hypersurface can not lie in a half-space. In particular, Σ must have at least one top and one bottom end.*

Theorem 5. *Let Σ be a non-compact hypersurface (without boundary) of constant positive k-mean curvature, $k \geq 2$, properly immersed in a pseudo-hyperbolic space $\mathbb{R} \times_{\cosh t} \mathbb{P}^n$ with compact fiber $\mathbb{P}^n$. If $k > 2$ assume that there exists an elliptic point of Σ. Then if $H_k \geq 1$, Σ cannot lie in a upper half-space, that is, Σ must have at least a bottom end.*

References

[1] Alías L.J. & Dajczer M., *Constant mean curvature hypersurfaces in warped product spaces*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) 50 (2007), 511–526.

[2] Aledo, J.A. & Espinar, J.M. & Gálvez J.A., *Height estimates for surfaces with positive constant mean curvature in $M^2 \times \mathbb{R}$*, Illinois J. Math. 52 (2008), 203–211.

[3] Cheng X. & Rosenberg H., *Embedded positive constant r-mean curvature hypersurfaces in $M^m \times \mathbf{R}$*, An. Acad. Brasil. Ciênc. 77 (2005), 183–199.

[4] García-Martínez S.C. & Impera D. & Rigoli M., *A sharp height estimate for compact hypersurfaces with constant k-mean curvature in warped product spaces*, Available online arXiv 1205.5628v1. To appear in Proc. Edinb. Math. Soc.

[5] Heinz E., *On the nonexistence of a surface of constant mean curvature with finite area and prescribed rectifiable boundary*, Arch. Rational Mech. Anal. 35 (1969), 249–252.

[6] Hoffman D. & de Lira J.H.S. & Rosenberg H., *Constant mean curvature surfaces in $M^2 \times \mathbf{R}$*, Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006), 491–507.

[7] Korevaar N.J. & Kusner R. & Solomon B., *The structure of complete embedded surfaces with constant mean curvature*, J. Differential Geom., 30 (1989), 465–503.

[8] Rosenberg H., *Hypersurfaces of constant curvature in space forms*, Bull. Sci. Math. 117 (1993), 211–239.

Sobre la categoría de los espacios topológicos totalmente ordenados y algunas de sus subcategorías

Félix A. Páez Díaz

Universidad Pontificia Bolivariana, Seccional Bucaramanga, Colombia, felix.paez@upb.edu.co

Resumen

Se muestra que la categoría **OrdTop** de los espacios totalmente ordenados y las funciones continuas que preservan el orden admite una definición natural de subespacios, espacio cociente y en esta categoría cada sistema inverso tiene un límite. Además, se muestra que las subcategorías plenas **WFTS**, **GOTS** y **QLOTS** pueden ser obtenidas mediante estas tres construcciones, a partir de la subcategoría **LOTS** de los espacios linealmente ordenados.

1. Introducción

La noción de espacio ordenado se introduce como una tripla $(X, \leq, \tau)$ donde X es un conjunto no vacío, $\leq$ es una relación de orden sobre X y τ es una topología sobre X.

En principio no se exige ninguna relación entre la topología y el orden. Se construye así una categoría, tomando como morfismos las funciones continuas y monótonas. Al imponer algunas relaciones entre τ y $\leq$ surgen diferentes subcategorías plenas. En este contexto general, el estudio de ciertos límites y co-límites en las subcategorías tiene un alto grado de complejidad. En particular, la construcción de cocientes es inmanejable. En relación a esto, en [5] se muestra que es indispensable que la relación sea de orden total para poder construir cocientes ordenados, siendo esta la principal razón por la cual el estudio de los espacios ordenados se circumscribe al caso de las relaciones de orden total: la categoría de los espacios totalmente ordenados y las funciones continuas y monótonas permite construcciones adecuadas de subespacios, límites de sistemas inversos y cocientes ([3]). De otro lado, en [6] se presenta una manera natural de construir cocientes en **OrdTop** a partir de cocientes topológicos.

Al tomar los objetos $(X, \leq, \tau)$ tales que τ tiene una subbase constituída por colas o rayos se obtiene una primer subcategoría en la cual los objetos son llamados espacios Bien-formado. Haciendo una restricción más drástica se obtienen los espacios totalmente ordenados en los cuales la topología es precisamente la topología de los intervalos abiertos, llamados espacios linealmente ordenados (ver [4]). Otros dos tipos de espacios totalmente ordenados que aparecen en la literatura son los espacios ordenados generalizados de Čech ([1] y [2]), y los espacios de tipo cociente ([3]).

En esta charla divulgativa se muestra que la categoría **OrdTop** de los espacios totalmente ordenados y las funciones continuas que preservan el orden admite una definición natural de subespacios, espacio cociente y en esta categoría cada sistema inverso tiene un límite. Además, se muestra que las subcategorías plenas **WFTS** de los espacios Bien-formados, **GOTS** de los espacios ordenados generalizados de Čech y **QLOTS** de los espacios de tipo cociente, pueden ser obtenidas mediante estas tres construcciones, a partir de la subcategoría **LOTS** de los espacios linealmente ordenados.

Referencias

[1] Čech E., *Topologické Prostory*, Nakl. ČSAV, Prague 1959.

[2] Čech E., *Topological Spaces*, John Wiley & Sons, London 1966.

[3] Herrlich H. & Kronheimer E. H., "Generating ordered topological spaces from LOTS", Topology appl, 105 (2000), 231–235.

[4] Kopperman R.D., Kronheimer E.H. & Wilson R.G., "Topologies on totally ordered sets", Topology appl, 90 (1998), 165–185.

[5] Páez F.,*Acerca de la Categoría de los Espacios Topologicos Totalmente Ordenados y Algunas de sus Subcategorías*, Tesis de Magister, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2009.

[6] Páez F., "Algunas construcciones en la categoría **OrdTop**", Prepint.

Topología sobre conceptos formales

Johana Ramírez Gaviria, Sergio Ricardo Zapata Ceballos y
Juan Carlos Riaño Rojas

Universidad Nacional de Colombia, Manizales, jramirezg@unal.edu.co, srzapatac@unal.edu.co.

Resumen

En este trabajo se construye una topología inducida por los conceptos formales. Se muestra que la topología propuesta es incomparable con la topología de Scott generada sobre el retículo de los conceptos formales asociados.

1. Introducción

La idea del análisis de conceptos formales (ACF) surge como aplicación de la teoría reticular sobre tablas de datos, cuando en 1984 el matemático alemán Rudolf Wille introduce el término. Desde entonces, el ACF ha sido cada vez más desarrollado como un fuerte campo de la investigación estimulada por un amplio espectro de aplicaciones [3].

El método se utiliza principalmente para el análisis de datos, es decir, para investigar y procesar información dada explícitamente[2], los datos describen la relación entre un conjunto particular de objetos y un conjunto particular de atributos [7], permitiendo representar matemáticamente, analizar y construir estructuras conceptuales [1].

Más de 25 años de investigación han desarrollado una rica teoría matemática y muchos métodos y procedimientos que se presentan en más de 500 publicaciones científicas [1]. Durante los últimos 10 años, sin embargo, el ACF se ha convertido en una comunidad internacional de investigación con aplicaciones en muchas disciplinas, como la lingüística, ingeniería de software, la psicología, inteligencia artificial y en la recuperación de información [8].

Por otro lado, el ACF ha sido estudiado en la matemática pura en campos como la lógica formal, la teoría de dominios y la teoría de categorías, como se puede ver en [6] y en [5], también se ha explorado en el área de la topología mediante un espacio de aproximación sobre M, como lo hicieron en [9], sin embargo no se ha hecho un estudio sobre el ACF que relacione la topología y el álgebra retículos. En este trabajo se propone una base topológica y a partir de ella extender conceptos topológicos en el ACF y analizar que relación tiene con la topología de Scott sobre su retículo asociado. El aporte a la teoría del ACF se ve reflejada en los ejemplos utilizados, en los cuales se evidencia su posible aplicación en diferentes estudios, ya sean en matemática aplicada o matemática pura.

2. Algunos resultados

Los resultados obtenidos en este trabajo se mencionan a continuación.

1. A partir de los conceptos formales se generó una topología sobre el conjunto de objetos y el conjunto de atributos, y con la topología producto se construye la topología en $G \times M$ donde G son las filas y M son las columnas de una base de datos binaria.
2. Se construyó una función que envía la base topológica del producto a una base sobre el retículo de conceptos formales para comparar la topología de Scott con la topología generada.
3. Se analizaron propiedades algebraicas y topológicas del retículo de conceptos formales.

3. Agradecimientos

Este trabajo esta apoyado por "Jóvenes Investigadores e Innovadores", financiado por Colciencias y por la Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales.

Referencias

[1] B. Ganter, G. Stumme, R. Wille. *Formal Concept Analysis. Foundations and Applications*. Springer (2005).

[2] B. Ganter, R. Wille. *Applied Lattice Theory: Formal Concept Analysis*. GESTS International Transactions on Computer Science and Engineering (2006), Vol 30, 25–36.

[3] B. Ganter, G. Stumme, R. Wille. *Formal Concept Analysis: Theory and Applications*. Journal of Universal Computer Science (2004), Vol 10.

[4] G. Gierz, K. H. Hofmann, K. Keimel, J. D. Lawson, M. W. Mislove, D. S. Scott. *Continuous Lattices and Domains*. Cambridge University Press (2003).

[5] J. Poelmans, S. O. Kuznetsov, D. I. Ignatov, G. Dedene. *Formal Concept Analysis in knowledge processing: A survey on models and techniques*, ELSEVIER (2013).

[6] M. Krötzsch. *Morphisms in Logic, Topology, and Formal Concept Analysis*. Dresden University of Technology (2005).

[7] R. Belohlávek. *Introduction to Formal Concept Analysis*, Olomouc (2008).

[8] U. Priss. *Formal concept analysis in information science*, ARIST (2006), Vol 40, 521–543.

[9] Z. Pei, K. Qin. *Topological Space for Attributes Set of a Formal Context*. Rough Sets and Knowledge Technology (2007), Vol 4481, 460–467.

La armonía entre las estructuras topológicas y las estructuras algebraicas: la construcción de $\mathbb{R}$

Daniel Moran* y Diana Parra**

*Universidad del Valle, Cali, Colombia, daniel.moran@correounivalle.edu.co

**Universidad del Valle, Cali, Colombia, diana.parra.vargas@correounivalle.edu.co

Resumen

Se mostrará cómo por medio de la armonía existente en dos tipos de estructuras matemáticas como lo son las topológicas y las algebraicas sirven a los Bourbaki para la construcción de los números reales. Esta armonía se presenta en la resolución al problema de aquellas propiedades que no se preservan bajo homeomorfismos, las cuales encuentran un subterfugio en las Estructuras Uniformes. Es así, junto con la noción filtro de Cauchy (generalización de las sucesiones) que demuestran que $\mathbb{R}$ es completo.

1. Introducción

En 1948, Jean Dieudonné escribió un artículo [2] en donde se puede estudiar una síntesis del pensamiento Bourbakista: las matemáticas modernas y estructurales. Este arduo trabajo se publicó después de la escritura de los seis primeros volúmenes de *Eléments de Mathématique* [3], y se constituye como uno de los artículos más divulgados a nivel internacional.

En esta dirección se plantea las matemáticas estructuralistas, y con cierto pensamiento Hilbertiano se bosquejan las matemáticas respondiendo a tres estructuras denominadas *estructuras madre*: Estructuras Topológicas, Estructuras Algebraicas y Estructuras de Orden. De las estructuras topológicas se va a hablar en términos de vecindades. En este sentido se revisan dos conceptos topológicos fundamentales, no sólo para comprender la construcción de los números reales sino para comprender la necesidad de incorporar otras estructuras más finas, como lo son las estructuras uniformes. Estos dos conceptos son el de continuidad puntual (vista desde la topología) y la noción de filtro.

2. Esbozo de la construcción de $\mathbb{R}$ por Bourbaki

Los Bourbaki hacen esta construcción en el capítulo IV del libro III de topología general de los *Éléments de Mathématique* de Bourbaki.

1. Partir de un grupo totalmente ordenado de racionales, es decir, $\mathbb{Q}$ es un conjunto en el cual se han definido y son compatibles entre ellas, una estructura de grupo y una estructura de orden total.

2. $\mathbb{Q}$ es un grupo topológico y se garantiza sobre esta estructura, la estructura uniforme, considerando las uniformidades dadas por los entornos racionales simétricos sobre la diagonal.

3. Se formula la completez del espacio uniforme de partida a través de la extensión de dicha estructura a una estructura R , formada por todos los filtros de Cauchy minimales sobre $\mathbb{Q}$.

4. Se define sobre R una colección de entornos de la estructura uniforme de partida.

5. R tiene estructura uniforme, es Hausdorff, y es completo, es decir, todo filtro de Cauchy converge y sus límites son únicos.

6. Existe una inmersión natural del espacio inicial en el nuevo espacio, que es densa en el nuevo espacio.

7. Finalmente, haciendo una extensión de las estructuras de orden y las algebraicas de $\mathbb{Q}$ a R se obtiene en absoluto $\mathbb{R}$.

3. La construcción de $\mathbb{R}$ por Bourbaki

Existe una gran similitud y a la vez una gran diferencia con respecto a las construcciones clásicas de los números reales ya propuestas por Cantor y Dedekind. Similitud, ya que en estas construcciones se parte por lo general de $\mathbb{Q}$ como cuerpo aditivo totalmente ordenado, en donde la topología entra muy tenuemente al final. Bourbaki también parte de $\mathbb{Q}$, pero he aquí la diferencia, ya que no se parte de $\mathbb{Q}$ como un cuerpo, sino como un grupo aditivo totalmente ordenado en donde la topología entra muy rápidamente.

3.1. Ingreso de la topología:

Se parte de $\mathbb{Q}$ como grupo aditivo totalmente ordenado $\langle \mathbb{Q}, +, \rangle$ y se hace un ingreso rápido de la topología, la cual es la topología usual sobre $\mathbb{Q}$, que no son más que intervalos abiertos racionales $\tau : \{(-a, a) : a \in \mathbb{Q}^+\}$, que es generada por un sistema fundamental de vecindades alrededor del origen que son compatibles con la estructura de grupo aditivo:

Definición (vecindad): En un espacio topológico X, se llama *vecindad* de un subconjunto de A de X a todo conjunto que contiene un conjunto *abierto* que contiene a A.

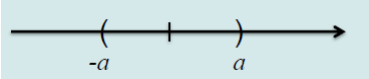


Figura 3: Sobre las vecindades racionales

3.2. $\mathbb{Q}$ como grupo topológico

Con lo anterior, $\mathbb{Q}$ es un grupo topológico totalmente ordenado y también se verifican los axiomas de Hausdorff:

Sea E un conjunto y sea x, y puntos en E entonces:

- Para todo $x \in E$, existe una vecindad U_x y $x \in U_x$.
- La intersección de dos vecindades de x contiene una vecindad de x.
- Si $y \in E$, existe una vecindad U_y tal que $U_y \subset U_x$.
- Si $y \in E$, existe una vecindad U_y tal que $U_y \subset U_x$. Si $x \neq y$, existen, existen U_x y U_y tales que $U_x \cap U_y = \emptyset$

por lo cual es un espacio separable o de Hausdorff.

Con el ingreso de la topología se tienen garantizados los conjuntos abiertos y por tanto *las vecindades* del espacio topológico $\mathbb{Q}$; y a través de la noción de vecindad, se tiene:

- Límite o convergencia de una sucesión; o más generalmente de un filtro.
- Continuidad puntual de una función.
- Propiedad arquimediana de los números reales.

Definición (continuidad puntual): Se dice que una aplicación f de un espacio topológico X en un espacio topológico X' *es continua en un punto* $(x_0) \in X$ si, cualquiera que sea la vecindad V' de $f(x_0)$ en X', existe una vecindad V de x_0 en X tal que la relación $x \in V$ implica que $f(x) \in V'$.

Definición (filtro): Un *filtro* sobre un conjunto X es un conjunto F de partes de X que posee las siguientes propiedades:
(F_I) Toda parte de X que contiene un conjunto de F pertenece a F.
(F_{II}) Toda intersección finita de conjuntos de F pertenece a F.
(F_{III}) La parte vacía de X no pertenece a F.

Los conceptos de abierto, cerrado, compacto, conexo y adherencia, son conceptos básicos de la topología que *no dependen de la distribución de los puntos en el espacio*, sino que *dependen* de una manera de caracterizar los puntos *cercanos* a un punto dado; que están definidos en términos de vecindades. Además, estas propiedades son invariantes bajo homeomorfismos.

Existe una gran problemática con aquellas propiedades del espacio que no son topológicas, que dependen de la métrica, de la estructura del dominio y de la *distribución de los puntos en el espacio*, propiedades que no se preservan bajo homeomorfismos (convergencia uniforme o de filtros de Cauchy, continuidad uniforme y completitud).

Por tanto, se debe incorporar una manera de asegurar una manera de caracterizar la cercanía de un modo más fuerte. Cuando se habla de espacios topológicos, solo se puede formalizar la idea de cercanía con respecto a un punto dado, como por ejemplo: "x_1 está tan lejos de x como x_2 está de x". Para ello, se introducen las estructuras uniformes en donde se garantiza este nivel más fuerte de cercanía, como es: "x_1 está tan lejos de x_2 como y_1 lo está de y_2", es decir, una cercanía dos a dos.

Definición (Estructura Uniforme): Se llama *Estructura Uniforme* sobre un conjunto X una estructura constituida por la dación de un conjunto U de subconjuntos de $X \times X$ que satisfacen los axiomas siguientes:

(F_I) Todo subconjunto de $X \times X$ que contiene un conjunto de U pertenece a U.
(F_{II}) Toda intersección finita de conjuntos de U pertenecen a U.
(U_I) Todo conjunto de U contiene la diagonal Δ.
(U_{II}) La relación $V \in U$ implica $V^{-1} \in U$.
(U_{III}) Cualquiera que sea $V \in U$, existe $W \in U$ tal que $W \circ W \subset V$.

Como se puede apreciar, las dos primeras definiciones son de *filtro*, con la que se garantiza la cercanía, y las otras tres nos recuerdan a la pseudo-métrica.

Sobre el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales, se define de la manera siguiente: para cada racional $a > 0$, se considera, en $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, el conjunto U_a de parejas (x, y) de números racionales tal que $|x - y| < a$, teniendo como referencia a la diagonal.

Definición (Diagonal): La diagonal Δ está formada por todos los puntos $(x, x) \in X \times X$.

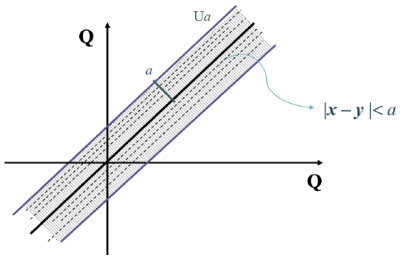


Figura 4: Cercania respecto a la diagonal.

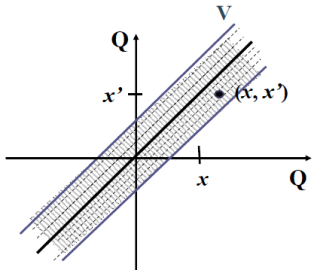


Figura 5: Cercania de orden V.

Si V es un entorno de una estructura sobre $\mathbb{Q}$, se expresará la relación $(x, x') \in V$ diciendo que "x y x' son vecinos de orden V"

Definición (sistema fundamental de entornos): Un conjunto B de subconjuntos de $X \times X$ es un *sistema fundamental de entornos* de una estructura uniforme sobre X si satisface los siguientes axiomas:

(B_I) La intersección de dos conjuntos de B contiene un conjunto de B.
(U_I) Todo conjunto de B contiene a la diagonal Δ.
(U_{II}) Para cada $V \in B$ existe $V' \in B$ tal que $V' \subseteq V^{-1}$.
(U_{III}) Para cada $V \in B$ existe $W \in B$ tal que $W \circ W \circ V$.

Definición (continuidad uniforme): Se dice que una aplicación f de un espacio uniforme X en un espacio uniforme X', es *uniformemente continua* si, para cada entorno V' de X', existe un entorno V de X tal que la relación $(x, y) \in V$ implica $(f(x), f(y)) \in V'$.

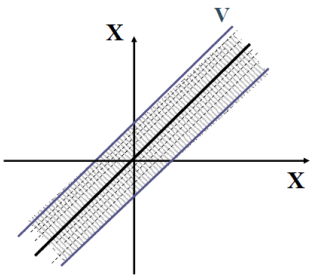


Figura 6: Vecindad de orden V.

3.3. Completación del espacio y filtros minimales de Cauchy:

Definición (subconjunto pequeño de orden V): Sea X un espacio uniforme y V un entorno de X, se dice que un subconjunto A de X es un *subconjunto pequeño de orden* V cuando dos puntos cualesquiera de A son vecinos de orden V $(A \times A \subset V)$. Es decir, un subconjunto A de X es "pequeño" si todos los puntos son "muy cercanos" dos a dos.

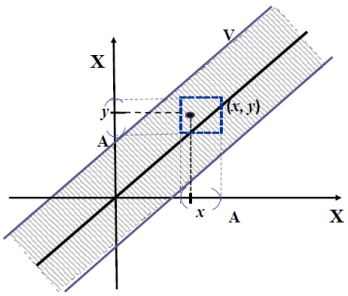


Figura 7: Cercanía dos a dos.

Definición (Filtro de Cauchy): Se dice que un filtro F sobre un espacio uniforme X es un *filtro de Cauchy*, si para todo entorno V de X, existe un conjunto pequeño de orden V que pertenece a F.

Es decir, un filtro de Cauchy es un filtro que contiene conjuntos arbitrariamente pequeños.

Sobre un espacio uniforme X, un filtro de Cauchy no necesariamente tiene punto límite. Un espacio uniforme se llama *espacio completo* si todo filtro de Cauchy converge en ese espacio.

Definición (Filtros minimales de Cauchy): Los elementos minimales (por la relación de inclusión) del conjunto de filtros de Cauchy sobre un espacio uniforme de X son llamados *Filtroa*

*minimales de Cauchy*sobre X.

Corolario 1: Para todo $x \in X$, el filtro $\mathfrak{B}(x)$ de las vecindades de x en X es un filtro de Cauchy minimal.

Corolario 2: Todo filtro de Cauchy menos fino que un filtro que converge hacia un punto de x converge también hacia x.

Por último, se presentan estas dos proposiciones que son muy importantes para la construcción de los reales.

1. Si X es un espacio uniforme y $A \subseteq X$ denso tal que toda base de filtro de Cauchy sobre A converge en X, entonces X es completo.
2. Sea $f : A \subseteq X \to X'$; A es subespacio denso en X (X es espacio uniforme) y $X^{'}$ espacio uniforme, Hausdorff y completo; y f uniformemente continua en A. Entonces f puede prolongarse por continuidad a todo X y la función prolongada f^{+} es uniformemente continua.

En donde la completación de $\mathbb{R}$ se obtiene por el siguiente teorema que es el que se tiene que estudiar con detalle:
Sea X un espacio uniforme. Entonces existe un espacio uniforme Hausdorff y completo X^{*}, y una aplicación uniformemente continua $i : X \to X^{*}$, que tiene la siguiente propiedad: (P) Para toda función uniformemente continua $f : X \to Y$ (espacio uniforme, completo y Hausdorff), existe una única función uniformemente continua $g : X^{*} \to Y$, tal que $f = g \circ i$.

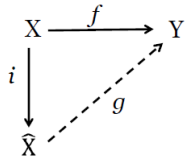


Figura 8: Función de Completación del espacio.

$\tilde{X} = \{F : F \text{ es filtro minimal de Cauchy sobre } X\}$.

3.4. Definición de una colección de entornos sobre la estructura uniforme:

Sea U el sistema fundamental de entornos para la estructura uniforme de $\tilde{X}$.

Dado $V \in \mathfrak{U}$, definimos:

$\tilde{V} = \Big\{(F, G) \in \tilde{X} \times \tilde{X} : \exists B \in F \cap G \text{ tal que } B \times B \subseteq V \text{ (pequeño de orden } V)\Big\}$.

$\mathfrak{U}^{*} = \Big\{\tilde{V} : V \in \mathfrak{U}\Big\}$.

$\mathfrak{U}^*$ forma un *Sistema Fundamental de Entornos* de $\tilde{X}$.

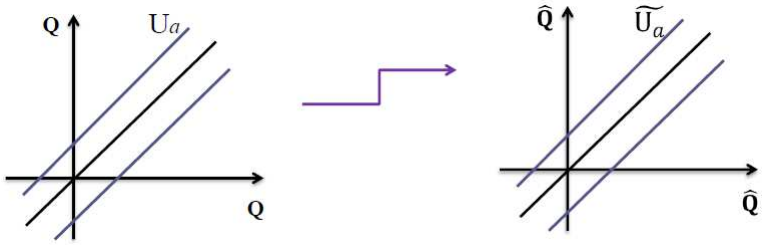


Figura 9: Desde Q hasta $\tilde{Q}$

$\mathfrak{U} = \{U_a : a \in \mathbb{Q}^+\}$.

$\tilde{\mathfrak{U}_a} = \Big\{(F,G) \in \tilde{Q} \times \tilde{Q} : \exists B \in F \cap G \text{ tal que } B \times B \subseteq U_a\Big\}$.

$\mathfrak{U}^* = \Big\{\tilde{\mathfrak{U}_a} : U_a \in \mathfrak{U}\Big\}$ es un sistema fundamental de entornos de $\tilde{Q}$ donde $\Big\langle \tilde{Q}, \mathfrak{U}^* \Big\rangle$ es un espacio uniforme.

3.5. Estructura uniforme sobre R:

El conjunto $R = \tilde{Q}$ tiene estructura uniforme y es Hausdorff. Para demostrar que $\tilde{Q}$ es completo, se hace uso de la siguiente proposición:

Teorema. Si X es un espacio uniforme y $A \subseteq X$ denso tal que toda base de filtro de Cauchy sobre A converge en X, entonces X es completo.

3.6. Existencia de una inmersión:

Existe una inmersión natural del espacio inicial en el nuevo espacio, que es densa en el nuevo espacio.

$i(\mathbb{Q}) \subseteq \tilde{Q}$ es denso en $\tilde{Q}$. Además, toda base de filtro de Cauchy sobre $i(\mathbb{Q})$ converge en $\tilde{Q}$. Por lo tanto, $\tilde{Q}$ es completo.

3.7. Extensiones de las estructuras de orden y algebraicas $\mathbb{Q}$ de a R:

Hasta este punto se ha llegado a un conjunto completo, en donde no se ha heredado completamente las propiedades de los reales como tal. La relación $y - x \in \tilde{Q}_+$ es una relación de orden en R. Esta relación hace de R un conjunto totalmente ordenado, y es compatible con la estructura de grupo aditivo de R. La topología de la recta racional $\mathbb{Q}$ no solo es compatible con la estructura de *grupo aditivo* de $\mathbb{Q}$ sino también de la estructura de *cuerpo*.

1. $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida por $f(x, y) = x \cdot y$ es continua en todo punto de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
2. $h : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ definida por $h(x) = 1/x$ es continua en $\mathbb{Q}^*$ donde $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$.

Teorema. La funciones definidas $x \cdot y$ y $1/x$ definidas respectivamente en $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ y en $\mathbb{Q}^*$, se prolongan por continuidad a $R \times R$ y R^* respectivamente y definen sobre R una estructura de cuerpo conmutativo.

Dotado de esta estructura, R es llamado el cuerpo de los números reales, y se simboliza finalmente como $\mathbb{R}$.

4. Algunas consideraciones finales

Es muy interesante ver la forma de construir los reales por Bourbaki, que aunque inicia al igual que las construcciones clásicas de los números reales (por Cantor y Dedekind), teniendo como punto de partida el conjunto de los números racionales; difiere en detalles técnicos obteniendo un grado de generalidad y abstracción completamente diferente. En esta construcción Bourbaki ingresa primero al ámbito de lo topológico para terminar en el algebraico, y armoniza de manera magistral estas dos estructuras madre, para dar lugar a las estructuras uniformes.

El grupo Bourbaki toma al conjunto $\mathbb{Q}$ y poco a poco va definiendo ciertas cosas arando el terreno para la entrada de la estructura algebraica y tener; del álgebra lo de grupo, y de la topología, lo topológico; dando lugar a los grupos topológicos, contemplando a $\mathbb{Q}$ como un grupo aditivo topológico, y posteriormente, mediante la incorporación de la noción de entorno y filtros de Cauchy, demuestra que efectivamente esta nueva estructura definida es uniforme, Hausdorff, y completo, ya que todo filtro de Cauchy converge y esta estructura es finalmente $\mathbb{R}$.

Referencias

[1] Anacona, M., *La completez de los números reales por Bourbaki. Documento Inédito.*, Tesis de doctorado en Matemáticas. Universidad de Cadiz (En elaboración)

[2] Bourbaki, N., *La Arquitectura de las Matemáticas*, Las grandes corrientes del pensamiento matemático. Argentina: Universitaria de Buenos Aires (1976), 36–49

[3] Bourbaki, N., *Topologie Général, Éléments de Mathématique*, Paris: Hermann (1965).

[4] Fang, J., *Bourbaki Towards a philosophy of modern mathematics I*, New York: Paideia Press (1970).

[5] Hernandez, J., *Las estructuras matemáticas y Nicolás Bourbaki*, Orotava de Historia de la Ciencia (1995), 55–78.

[6] Kirkwood, J. , *An Introduction to Analysis*, Boston: PWS Publishing Company (1995).

[7] Rubiano, G., *Topología General*, Bogotá: Universidad Nacional de Colombia (2002).

A result of classification in the spaces $\mathbb{S}_t^n$ and $\mathbb{H}_t^n$

Pascual Lucas* and H. Fabián Ramírez-Ospina**
*Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia, Murcia, Spain, plucas@um.es
**Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia, Murcia, Spain, hectorfabian.ramirez@um.es

This work was partially supported by MINECO (Ministerio de Economía y Competitividad) and FEDER (Fondo Europeo de Desarrollo Regional) project MTM2012-34037 and Fundación Séneca project 04540/GERM/06, Spain. This research is a result of the activity developed within the framework of the Programme in Support of Excellence Groups of the Región de Murcia, Spain, by Fundación Séneca, Regional Agency for Science and Technology (Regional Plan for Science and Technology 2007-2010).
Second author is supported by FPI Grant BES-2010-036829.

Abstract

We study hypersurfaces either in the pseudo-Riemannian De Sitter space $\mathbb{S}_t^{n+1} \subset \mathbb{R}_t^{n+2}$ or in the pseudo-Riemannian anti De Sitter space $\mathbb{H}_t^{n+1} \subset \mathbb{R}_{t+1}^{n+2}$ whose position vector ψ satisfies the condition $L_k\psi = A\psi + b$, where L_k is the linearized operator of the $(k+1)$-th mean curvature of the hypersurface, for a fixed $k = 0, \ldots, n-1$, A is an $(n+2) \times (n+2)$ constant matrix and b is a constant vector in the corresponding pseudo-Euclidean space. For every k, we prove that when H_k is constant, the only hypersurfaces satisfying that condition are hypersurfaces with zero $(k+1)$-th mean curvature and constant k-th mean curvature, or open pieces of a totally umbilical hypersurface in $\mathbb{S}_t^{n+1}$ or $\mathbb{H}_t^{n+1}$, or open pieces of a standard pseudo-Riemannian product in $\mathbb{S}_t^{n+1}$ or $\mathbb{H}_t^{n+1}$, or open pieces of a quadratic hypersurface $\{x \in \mathbb{M}_t^{n+1}(c) \mid \langle Rx, x\rangle = d\}$ where R is a self-adjoint constant matrix whose minimal polynomial is $\mu_R(z) = z^2 + az + b$, $a^2 - 4b \leq 0$, and $\mathbb{M}_t^{n+1}(c)$ stands for $\mathbb{S}_t^{n+1} \subset \mathbb{R}_t^{n+2}$ or $\mathbb{H}_t^{n+1} \subset \mathbb{R}_{t+1}^{n+2}$.

1. Introduction

The Laplacian operator Δ of a hypersurface M^n immersed into $\mathbb{R}^{n+1}$ can be seen as the first one of a sequence of operators $\{L_0 = \Delta, L_1, \ldots, L_{n-1}\}$, where L_k stands for the linearized operator of the first variation of the $(k+1)$-th mean curvature, arising from normal variations of the hypersurface (see, for instance, [12]). These operators are defined by $L_k(f) = \mathrm{tr}(P_k \circ \nabla^2 f)$, for a smooth function f on M, where P_k denotes the k-th Newton transformation associated to the second fundamental form of the hypersurface, and $\nabla^2 f$ denotes the self-adjoint linear operator metrically equivalent to the hessian of f.

From this point of view, and inspired by Garay's extension of Takahashi theorem and its subsequent generalizations and extensions ([13],[7], [1], [2], [3]), Alías and Gürbüz initiated in [4] the study

of hypersurfaces in Euclidean space satisfying the general condition $L_k\psi = A\psi + b$, where $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ is a constant matrix and $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ is a constant vector. Recently, we have completely extended to the Lorentz-Minkowski space the previous classification theorem obtained by Alías and Gürbüz. In particular, we proved in [8] that the only hypersurfaces immersed in the Lorentz-Minkowski space $\mathbb{L}^{n+1}$ satisfying the condition $L_k\psi = A\psi+b$, where $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ is a constant matrix and $b \in \mathbb{L}^{n+1}$ is a constant vector, are open pieces of hypersurfaces with zero $(k+1)$-th mean curvature, or open pieces of totally umbilical hypersurfaces $\mathbb{S}^n_1(r)$ or $\mathbb{H}^n(-r)$, or open pieces of generalized cylinders $\mathbb{S}^m_1(r)\times\mathbb{R}^{n-m}$, $\mathbb{H}^m(-r)\times\mathbb{R}^{n-m}$, with $k+1 \leq m \leq n-1$, or $\mathbb{L}^m\times\mathbb{S}^{n-m}(r)$, with $k+1 \leq n-m \leq n-1$.

In [5], and as a natural continuation of the study started in [4], Alías and Kashani consider the study of hypersurfaces M^n immersed either into the sphere $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ or into the hyperbolic space $\mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}_1$ whose position vector ψ satisfies the condition $L_k\psi = A\psi+b$, for some constant matrix $A \in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+2)}$ and some constant vector $b \in \mathbb{R}^{n+2}_q$, $q = 0, 1$. They obtain classification results in two cases: when A is self-adjoint and $b = 0$, and when the k-th mean curvature H_k is constant and b is a non-zero constant vector. When the ambient space is a Lorentzian space form $\mathbb{S}^{n+1}_1$ or $\mathbb{H}^{n+1}_1$, the shape operator of the hypersurface needs not be diagonalizable, condition which plays a chief role in the Riemannian case. In this case, the shape operator of the hypersurface can be expressed, in an appropriate frame, in one of four types. In [9] we have extended, to the Lorentzian case, the results obtained in [5].

However, when the ambient space is a general pseudo-Riemannian space form $\mathbb{S}^{n+1}_t \subset \mathbb{R}^{n+2}_t$ or $\mathbb{H}^{n+1}_t \subset \mathbb{R}^{n+2}_{t+1}$, the shape operator of the hypersurface can be much more complicated than in the Riemannian or Lorentzian cases, and then the reasoning followed in [5] and [9] is not applicable in the general case. In this paper, we extend to arbitrary pseudo-Riemannian space forms $\mathbb{S}^{n+1}_t$ or $\mathbb{H}^{n+1}_t$ the results obtained in [5] and [9].

Our approach in the paper [11] is completely different to that given in above papers. First, we do not assume that A is a self-adjoint matrix, but we only assume that the k-th mean curvature of the hypersurface is constant. Secondly, the techniques developed in [4, 5, 8, 9] are not applicable in the general case, so that we have needed to follow a different way. The new and more general proof is based on the complexification of the shape operator of the hypersurface.

2. Results

For the sake of simplifying the notation and unifying the statements of our main results presented in [11], let us denote by $\mathbb{M}^{n+1}_t(c)$ either the pseudo-Riemannian De Sitter space $\mathbb{S}^{n+1}_t \subset \mathbb{R}^{n+2}_t$ if $c = 1$, or the pseudo-Riemannian anti De Sitter space $\mathbb{H}^{n+1}_t \subset \mathbb{R}^{n+2}_{t+1}$ if $c = -1$. In this paper, we are able to give the following classification result.

Theorem 6. *Let $\psi : M^n_s \to \mathbb{M}^{n+1}_t(c) \subset \mathbb{R}^{n+2}_q$ be an orientable hypersurface immersed into the pseudo-Riemannian space form $\mathbb{M}^{n+1}_t(c)$, and let L_k be the linearized operator of the $(k+1)$-th mean curvature of M^n_s, for some fixed $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Assume that H_k is constant. Then the*

immersion satisfies the condition $L_k\psi = A\psi + b$, *for some constant matrix* $A \in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+2)}$ *and some constant vector* $b \in \mathbb{R}^{n+2}_q$, *if and only if it is one of the following hypersurfaces:*

(1) *a hypersurface having zero* $(k+1)$*-th mean curvature and constant* k*-th mean curvature.*

(2) *an open piece of one of the following totally umbilical hypersurfaces in* $\mathbb{S}^{n+1}_t$*:* $\mathbb{S}^n_{t-1}(r)$, $r > 1$*;* $\mathbb{S}^n_t(r)$, $0 < r < 1$*;* $\mathbb{H}^n_{t-1}(-r)$, $r > 0$*;* $\mathbb{R}^n_{t-1}$.

(3) *an open piece of one of the following totally umbilical hypersurfaces in* $\mathbb{H}^{n+1}_t$*:* $\mathbb{H}^n_t(-r)$, $r > 1$*;* $\mathbb{H}^n_{t-1}(-r)$, $0 < r < 1$*;* $\mathbb{S}^n_t(r)$, $r > 0$*;* $\mathbb{R}^n_t$.

(4) *an open piece of a standard pseudo-Riemannian product in* $\mathbb{S}^{n+1}_t$*:* $\mathbb{S}^m_u(r) \times \mathbb{S}^{n-m}_v(\sqrt{1-r^2})$, $\mathbb{H}^m_{u-1}(-r) \times \mathbb{S}^{n-m}_v(\sqrt{1+r^2})$, $\mathbb{S}^m_u(r) \times \mathbb{H}^{n-m}_{v-1}(-\sqrt{r^2-1})$.

(5) *an open piece of a standard pseudo-Riemannian product in* $\mathbb{H}^{n+1}_t$*:* $\mathbb{H}^m_u(-r) \times \mathbb{S}^{n-m}_v(\sqrt{r^2-1})$, $\mathbb{S}^m_u(r) \times \mathbb{H}^{n-m}_v(-\sqrt{1+r^2})$, $\mathbb{H}^m_u(-r) \times \mathbb{H}^{n-m}_{v-1}(-\sqrt{1-r^2})$.

(6) *an open piece of a quadratic hypersurface* $\{x \in \mathbb{M}^{n+1}_t(c) \subset \mathbb{R}^{n+2}_q \mid \langle Rx, x\rangle = d\}$, *where* R *is a self-adjoint constant matrix whose minimal polynomial is* $t^2 + at + b$, $a^2 - 4b \leq 0$.

In the case when $b = 0$, the condition that the matrix A is self-adjoint implies that the k-th mean curvature H_k is constant, and then we obtain the following consequence.

Theorem 7. *Let* $\psi : M^n_s \to \mathbb{M}^{n+1}_t(c) \subset \mathbb{R}^{n+2}_q$ *be an orientable hypersurface immersed into the pseudo-Riemannian space form* $\mathbb{M}^{n+1}_t(c)$*, and let* L_k *be the linearized operator of the* $(k+1)$*-th mean curvature of* M^n_s*, for some fixed* $k = 0, 1, \ldots, n-1$*. Then the immersion satisfies the condition* $L_k\psi = A\psi$*, for some self-adjoint constant matrix* $A \in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+2)}$*, if and only if it is one of the following hypersurfaces:*

(1) *a hypersurface having zero* $(k+1)$*-th mean curvature and constant* k*-th mean curvature;*

(2) *an open piece of a standard pseudo-Riemannian product in* $\mathbb{S}^{n+1}_t$*:* $\mathbb{S}^m_u(r) \times \mathbb{S}^{n-m}_v(\sqrt{1-r^2})$, $\mathbb{H}^m_{u-1}(-r) \times \mathbb{S}^{n-m}_v(\sqrt{1+r^2})$, $\mathbb{S}^m_u(r) \times \mathbb{H}^{n-m}_{v-1}(-\sqrt{r^2-1})$.

(3) *an open piece of a standard pseudo-Riemannian product in* $\mathbb{H}^{n+1}_t$*:* $\mathbb{H}^m_u(-r) \times \mathbb{S}^{n-m}_v(\sqrt{r^2-1})$, $\mathbb{S}^m_u(r) \times \mathbb{H}^{n-m}_v(-\sqrt{1+r^2})$, $\mathbb{H}^m_u(-r) \times \mathbb{H}^{n-m}_{v-1}(-\sqrt{1-r^2})$.

(4) *an open piece of a quadratic hypersurface* $\{x \in \mathbb{M}^{n+1}_t(c) \subset \mathbb{R}^{n+2}_q \mid \langle Rx, x\rangle = d\}$, *where* R *is a self-adjoint constant matrix whose minimal polynomial is* $t^2 + at + b$, $a^2 - 4b \leq 0$.

References

[1] L.J. Alías, A. Ferrández and P. Lucas. Surfaces in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space satisfying $\Delta x = Ax + B$, *Pacific J. Math.* **156** (2) (1992), 201–208.

[2] L.J. Alías, A. Ferrández and P. Lucas. Submanifolds in pseudo-Euclidean spaces satisfying the condition $\Delta x = Ax + B$, *Geom. Dedicata* **42** (1992), 345–354.

[3] L.J. Alías, A. Ferrández and P. Lucas. Hypersurfaces in space forms satisfying the condition $\Delta x = Ax + B$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), 1793–1801.

[4] L.J. Alías and N. Gürbüz. An extension of Takahashi theorem for the linearized operators of the higher order mean curvatures, *Geom. Dedicata* **121** (2006), 113–127.

[5] L.J. Alías and M.B. Kashani. Hypersurfaces in space forms satisfying the condition $L_k\psi = A\psi + b$, *Taiwanese Journal of Mathematics* **14** (2010), 1957–1978.

[6] O.J. Garay. An extension of Takahashi's theorem, *Geom. Dedicata* **34** (1990), 105–112.

[7] T. Hasanis and T. Vlachos. Hypersurfaces of E^{n+1} satisfying $\Delta x = Ax + B$, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **53** (1992), 377–384.

[8] P. Lucas and H.F. Ramírez-Ospina. Hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski space satisfying $L_k\psi = A\psi + b$, *Geom. Dedicata* **153** (2011), 151–175.

[9] P. Lucas and H.F. Ramírez-Ospina. Hypersurfaces in non-flat Lorentzian space forms satisfying $L_k\psi = A\psi + b$, *Taiwanese J. Math*, **16** N° 3 (2012), 1173–1203.

[10] P. Lucas and H.F. Ramírez-Ospina. Hypersurfaces in pseudo-Euclidean spaces satisfying a linear condition in the linearized operator of a higher order mean curvature. *Differential Geometry and its Applications*, **31** N° 3 (2013), 175–189.

[11] P. Lucas and H.F. Ramírez-Ospina. Hypersurfaces in non-flat pseudo-Riemannian space forms satisfying a linear condition in the linearized operator of a higher order mean curvature. *Taiwanese J. Math*, **17** (2013), 15–45.

[12] R. Reilly. Variational properties of functions of the mean curvatures for hypersurfaces in space forms, *J. Diff. Geom.* **8** (1973), 465–477.

[13] T. Takahashi. Minimal immersions of Riemannian manifolds, *J. Math. Soc. Japan* **18** (1966), 380–385.

Multifunciones faintly ω-continuas

Ennis Rosas

Universidad de Oriente. Departamento de Matemáticas. Cumaná. Venezuela (ennisrafael@gmail.com)

Universidad del Atlántico. Facultad de Ciencias Básicas. Barranquilla. Colombia

(ennisrosas@mail.uniatlantico.edu.co)

Resumen

En ésta conferencia se introducen y se estudian las multifunciones faintly ω-continuas como una generalización de las multifunciones ω-continuas superiormente e inferiormente estudiadas por Zorlutuna [11].

1. Introducción

En la actualidad un gran número de artículos han aparecido donde se estudian funciones continuas generalizadas [2]. Recientemente, Zurtuluna [11], introduce y estudia el concepto de multifunciones ω-continuas en espacios topológicos, así como también Carpintero et al. [5] y [6]. En ésta conferencia, se presentan y se estudian las multifunciones faintly ω-continua superiormente e inferiormente en espacios topológicos y se presenta nuevas caracterizaciones de éste tipo de funciones.

2. Preliminares

En todo éste articulo, (X, τ) y (Y, σ) (o simplemente X y Y) denotaran espacios topológicos en el cual ningún axioma de separación es asumido a menos que sea indicado. Sea $A \subseteq X$, $\mathrm{Cl}(A)$ e $\mathrm{Int}(A)$ denota la clausura e interior de A con respecto a la topología τ. Recientemente, como una generalización de los conjuntos cerrados, surge la noción de conjuntos ω-cerrados introducidos y estudiados por Hdeib [7]. Un punto $x \in X$ es llamado un punto de condensación de A si para cada $U \in \tau$ con $x \in U$, el conjunto $U \cap A$ es no contable. A se dice que es ω-cerrado [7] si éste contiene todos sus puntos de condensación. El complemento de un conjunto ω-cerrado es ω-abierto. Es fácil ver que $W \subseteq X$ es ω-abierto si y solo si para cada $x \in W$, existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $U \backslash W$ es un conjunto contable. $\omega O(X, \tau) = \tau_\omega$, denota la familia de todos los conjuntos ω-abiertas, es fácil ver que τ_ω, forma una topología sobre X mas fina que τ y además $(\tau_\omega)_\omega = \tau_\omega$. En este sentido, la ω-clausura y el ω-interior, son definidos de manera análoga como a la $\mathrm{Cl}(A)$ e $\mathrm{Int}(A)$ y se denotaran como $\omega\,\mathrm{Cl}(A)$ y $\omega\,\mathrm{Int}(A)$, respectivamente. Se denotará por $\omega O(X, x) = \{A : A \in \omega O(X, \tau) \text{ y } x \in A\}$. Un $N \subseteq X$ se dice que es un ω-vecindad abierta de un punto $x \in X$, si existe un conjunto ω-open V tal que $x \in V \subset N$. Un punto $x \in X$ es llamado un punto θ-clausura de A [10] si $\mathrm{Cl}(V) \cap A \neq \varnothing$ para todo conjunto abierto V de X conteniendo a x. El conjunto

de todos los puntos θ-clausura de A es llamado la θ-clausura de A and y se denota por $\mathrm{Cl}_\theta(A)$. Si $A = \mathrm{Cl}_\theta(A)$, entonces A es llamado θ-cerrado [10]. El complemento de un θ-cerrado es llamado θ-abierto [10]. La union de todos los conjuntos θ-abiertos contenidos en $A \subseteq X$ es llamado θ-interior de A y es denotado por $\mathrm{Int}_\theta(A)$. Sigue de [10] que la colección de todos los conjuntos θ-abiertos en X forma una topología denotada por τ_θ sobre X. Una multifunción $F : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$, es una correspondencia punto conjunto de X sobre Y, siempre asumiremos que $F(x) \neq \varnothing$ para todo $x \in X$. Dada una multifunción $F : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$, la imagen inversa superior e inferior de cualquier $A \subseteq Y$ denotada por $F^+(A)$ y $F^-(A)$, respectivamente, es decir, $F^+(A) = \{x \in X : F(x) \subseteq A\}$ y $F^-(A) = \{x \in X : F(x) \cap A \neq \varnothing\}$. En particular, $F^-(y) = \{x \in X : y \in F(x)\}$ para cada $y \in Y$. Una multifunción $F : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es sobrejectiva si $F(X) = Y$. Una multifunción $F : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es llamada ω-continua inferiormente [11] (resp. ω-continua superiormente) if $F^-(V) \in \omega O(X, \tau)$ (resp. $F^+(V) \in \omega O(X, \tau)$) para todo $V \in \sigma$.

3. Multifunciones Faintly ω-continuas

Definición 1. *A multifunción $F : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ se dice que es :*

1. *faintly ω-continua superiormente en el punto $x \in X$ si para cada θ-abierto $V \subseteq Y$ conteniendo a $F(x)$, existe $U \in \omega O(X)$ conteniendo x tal que $F(U) \subset V$;*
2. *faintly ω-continua inferiormente en el punto $x \in X$ si para cada θ-abierto $V \subseteq Y$ tal que $F(x) \cap V \neq \varnothing$, existe $U \in \omega O(X)$ conteniendo al punto x tal que $F(u) \cap V \neq \varnothing$ para todo $u \in U$;*
3. *faintly ω-continua superiormente (inferiormente) si esta tiene la propiedad en cada punto de X.*

Observación 2. *Es claro que toda multifunción ω-continua superiormente es una multifunción faintly ω-continua superiormente. Pero la recíproca no necesariamente es cierta, como se muestra en el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 3. *Sea $X = \Re$ con la topología $\tau = \{\emptyset, \Re, \Re - Q\}$. Defina la multifunción $F : (\Re, \tau) \to (\Re, \tau)$ como sigue:*

$$F(x) = \begin{cases} Q & \text{si } x \in \Re - Q \\ \Re - Q & \text{si } x \in Q. \end{cases}$$

Entonces F es faintly ω-continua superiormente pero no es ω-continua superiormente.

En forma similar, podemos encontrar ejemplos para una multifunción G que sea faintly ω-continua inferiormente pero no ω-continua inferiormente.

Definición 4 ([11])**.** *Una sucesión (x_α) se dice que ω-converge a un punto x si para todo ω-abierto V conteniendo al punto x, existe un índice α_0 tal que par todo $\alpha \geq \alpha_0$, $x_\alpha \in V$. Esto es denotado por $x_\alpha \underset{\omega}{\to} x$.*

Teorema 5. *Para una multifunción $F : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$, las siguientes son equivalentes :*

1. *F es faintly ω-continua superiormente;*
2. *Para cada $x \in X$ y cada θ-abierto V tal que $x \in F^+(V)$, existe un ω-open U conteniendo al punto x tal que $U \subset F^+(V)$;*
3. *para cada $x \in X$ y cada θ-cerrado V tal que $x \in F^+(Y\backslash V)$, existe un ω-cerrado H such that $x \in X\backslash H$ y $F^-(V) \subset H$;*
4. *$F^+(V)$ es un ω-abierto para cualquier θ-abierto $V \subseteq Y$;*
5. *$F^-(V)$ es un ω-cerrado para cualquier θ-cerrado $V \subseteq Y$;*
6. *$F^-(Y\backslash V)$ es un ω-cerrado para cualquier θ-abierto $V \subseteq Y$;*
7. *$F^+(Y\backslash V)$ es un ω-abierto para cualquier θ-cerrado $V \subseteq Y$;*
8. *Para cada $x \in X$ y cada sucesión (x_α) que ω-converges a un punto $x \in X$ y cada θ-abierto $V \subseteq Y$ tal que $x \in F^+(V)$, la sucesión (x_α) is eventualmente en $F^+(V)$.*

Demostración. (1)⇔(2): Es clara.

(2)⇔(3): Sea $x \in X$ y V un conjunto θ-abierto Y tal que $x \in F^+(Y\backslash V)$. By (2), existe un ω-open U conteniendo al punto x tal que $U \subset F^+(Y\backslash V)$. Entonces $F^-(V) \subset X\backslash U$. Tómese $H = X\backslash U$. Entonces obtenemos que $x \in X\backslash H$ y H es un ω-abierto. La recíproca es similar.

(1)⇔(4): Sea $x \in F^+(V)$ y V un conjunto θ-abierto de Y. Usando (1), existe un ω-abierto U_x conteniendo al punto x tal que $U_x \subset F^+(V)$. Sigue entonces que $F^+(V) = \underset{x \in F^+(V)}{\cup} U_x$. Como la union de conjuntos ω-abiertos es ω-abierta, $F^+(V)$ es ω-abierto. La recíproca se prueba de manera similar.

(4)⇔(5)⇔(6)⇔(7)⇔(8) : son claras.

(1)⇒(8): Sea (x_α) una sucesión que es ω-convergente al punto $x \in X$ y sea V cualquier conjunto θ-abierto de Y tal que $x \in F^+(V)$. como F es una multifunción faintly ω-continua superiormente, sigue entonces, que existe un conjunto ω-abierto $U \subseteq X$ conteniendo a x tal que $U \subset F^+(V)$. Como (x_α) ω-converge a x, sigue entonces que existe un índice $\alpha_0 \in J$ tal que $x_\alpha \in U$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$. De aquí se obtiene que $x_\alpha \in U \subset F^+(V)$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Así, la sucesión (x_α) es eventualmente es en $F^+(V)$.

(8) ⇒ (1): Supóngase que (1) es falso. Entonces existe un punto x y un conjunto θ-abierto $V \subseteq Y$ con $x \in F^+(V)$ tal que $U \subseteq F^+(V)$ para cada ω-abierto $U \subseteq X$ conteniendo al punto x. Sea $x_U \in U$ y $x_U \notin F^+(V)$ para cada conjunto ω-abierto $U \subseteq X$ conteniendo a x. Entonces para cada ω-vecindad, la sucesión (x_U), $x_U \underset{\to}{\omega} x$, pero (x_U) no es eventualmente en $F^+(V)$. Contradicción. Así, F es una multifunción faintly ω-continua superiormente. □

Teorema 6. *Para una multifunción $F : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$, las siguientes son equivalentes :*

1. *F es faintly ω-continua inferiormente;*
2. *Para cada $x \in X$ y cada θ-abierto $V \subseteq Y$ tal que $x \in F^-(V)$, existe un conjunto ω-abierto U conteniendo a x tal que $U \subset F^-(V)$;*
3. *Para cada $x \in X$ y cada conjunto θ-cerrado $V \subseteq Y$ tal que $x \in F^-(Y\backslash V)$, existe un conjunto ω-cerrado H tal que $x \in X\backslash H$ y $F^+(V) \subset H$;*
4. *$F^-(V)$ es un conjunto ω-abierto para cada θ-abierto $V \subseteq Y$;*
5. *$F^+(V)$ es un conjunto ω-cerrado para cada conjunto θ-cerrado $V \subseteq Y$;*
6. *$F^+(Y\backslash V)$ es un conjunto ω-cerrado para cada θ-abierto $VV \subseteq Y$;*
7. *$F^-(Y\backslash V)$ es un conjunto ω-abierto para cada θ-cerrado $VV \subseteq Y$;*
8. *Para cada $x \in X$ y cad sucesión (x_α) el cual ω-converge a $x \in X$ y cada conjunto θ-abierto $VV \subseteq Y$ tal que $x \in F^-(V)$ la sucesión (x_α) es eventualmente en $F^-(V)$.*

Demostración. La Prueba es similar a la prueba del Teorema 5. □

Lema 7 ([1])**.** *Sean A y B subconjuntos de (X, τ). Si $A \in \omega O(X)$ y $B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \omega O(B)$.*

Teorema 8. *Sea $F : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una multifuncion y $U \in \tau$. Si F es una multifunción faintly ω-continua inferiormente (superiormente), entonces $F_{|_U} : U \to Y$ es una multifunción faintly ω-continua inferiormenete (superiormente).*

Demostración. Sea $V \subseteq Y$ cualquier θ-abierto, $x \in U$ y $x \in F^-_{|_U}(V)$. Como F una multifunción faintly ω-continua inferiormente, existe un conjunto ω-abierto G conteniendo a x tal que $G \subset F^-(V)$. Por Lemma 7, se obtiene $x \in G \cap U \in \omega O(A)$ y $G \cap U \subset F^-_{|_U}(V)$. Esto prueba que la multifunción restricción $F_{|_U}$ es faintly ω-continua inferiormente.

La prueba para multifunciones faintly ω-continuas superiormente $F_{|_U}$ puede ser realizada de una manera similar. □

Lema 9 ([8])**.** *Las siguientes se satisfacen para una multifunción $F : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$:*

(i) $G^+_F(A \times B) = A \cap F^+(B)$ *and*

(i) $G^-_F(A \times B) = A \cap F^-(B)$

para cada $A \subset X$ y $B \subset Y$.

Teorema 10. *Sea $F : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una multifunción. Si el grafo de F, $G_F : (X, \tau) \to (X \times Y, \tau \times \sigma)$ es faintly ω-continua superiormente, Entonces F es faintly ω-continua superiormente.*

Demostración. Sea $x \in X$ y V cualquier subconjunto θ-abierto de Y tal que $x \in F^+(V)$. Obtenemos que $x \in G_F^+(X \times V)$ y que $X \times V$ es un conjunto θ-abierto. Como G_F es una multifunción faintly ω-continua superiormente, sigue que existe un ω-abierto $U \subseteq X$ conteniendo a x tal que $U \subset G_F^+(X \times V)$. Como $U \subset G_F^+(X \times V) = X \cap F^+(V) = F^+(V)$. Se obtiene que $U \subset F^+(V)$. Así, F es una multifunción faintly ω-continua superiormente. □

Teorema 11. *Una multifunción $F : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es faintly ω-continua inferiormente si $G_F : (X, \tau) \to (X \times Y, \tau \times \sigma)$ es faintly ω-continua inferiormente.*

Demostración. Supóngamos que G_F es una multifunción faintly ω-continua inferiormente. Sea $x \in X$ y V cualquier θ-abierto de Y tal que $x \in F^-(V)$. Entonces $X \times V$ es θ-abierto en $X \times Y$ y $G_F(x) \cap (X \times V) = (\{x\} \times F(x)) \cap (X \times V) = \{x\} \times (F(x) \cap V) \neq \varnothing$. Como G_F es faintly ω-continua inferiormente, existe un conjunto ω-abierto U conteniendo a x tal que $U \subset G_F^-(X \times V)$; por lo tanto $U \subset F^-(V)$. Esto prueba que F es faintly ω-continua inferiormente. □

Teorema 12. *Supóngase que (X, τ) y (X_α, τ_α) son espacios topológicos donde $\alpha \in J$. Sea $F : X \to \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ una multifunción de X al espacio producto $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ y sea $P_\alpha : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \to X_\alpha$ la multifunción projección para cada $\alpha \in J$ el cual es definida por $P_\alpha((x_\alpha)) = \{x_\alpha\}$. Si F es una multifunción faintly ω-continua superiormente (inferiormente), entonces $P_\alpha \circ F$ es una multifunción faintly ω-continua superiormente (inferiormente) para cada $\alpha \in J$.*

Demostración. Tómese cualquier $\alpha_0 \in J$. Sea V_{α_0} un conjunto θ-abierto en $(X_{\alpha 0}, \tau_{\alpha 0})$. Entonces

$$(P_{\alpha 0} \circ F)^+(V_{\alpha 0}) = F^+(P_{\alpha 0}^+(V_{\alpha 0})) = F^+(V_{\alpha 0} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_0} X_\alpha)$$

$$(\text{resp. } (P_{\alpha 0} \circ F)^-(V_{\alpha 0}) = F^-(P_{\alpha 0}^-(V_{\alpha 0})) = F^-(V_{\alpha 0} \times \prod_{\alpha \neq \alpha 0} X_\alpha)).$$

Como F es una multifunción faintly ω-continua superiormente (inferiormente) y como $V_{\alpha 0} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_0} X_\alpha$ es un conjunto θ-abierto, se obtiene que $F^+(V_{\alpha 0} \times \prod_{\alpha \neq 0} X_\alpha)$ (resp. $F^-(V_{\alpha 0} \times \prod_{\alpha \neq \alpha 0} X_\alpha)$) es un ω-abierto en (X, τ). Esto muestra que $P_\alpha \circ F$ es una multifunción faintly ω-continua superiormente (inferiormente). Así, obtenemos que, $P_{\alpha 0} \circ F$ es una multifunción faintly ω-continua superiormente (inferiormente) para cada $\alpha \in J$. □

Teorema 13. *Supongamos que para cada $\alpha \in J$, (X_α, τ_α), $(Y_\alpha, \sigma_\alpha)$ son espacios topológicos. Sea $F_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ una multifunción para cada $\alpha \in J$ y sea $F : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \to \prod_{\alpha \in J} Y_\alpha$ definida por $F((x_\alpha)) = \prod_{\alpha \in J} F_\alpha(x_\alpha)$ del espacio producto $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ al espacio producto $\prod_{\alpha \in J} Y_\alpha$. Si F es una multifunción faintly ω-continua superiormente (inferiormente), entonces cada F_α es una multifunción faintly ω-continua superiormente (inferiormente) para cada $\alpha \in J$.*

Demostración. Sea V_α un conjunto θ-abierto de Y_α. Entonces $V_\alpha \times \prod_{\alpha \neq \beta} Y_\beta$ es un conjunto θ-abierto. Como F es una multifunción faintly ω-continua superiormente (inferiormente), sigue que

$$F^+(V_\alpha \times \prod_{\alpha \neq \beta} Y_\beta) = F_\alpha^+(V_\alpha) \times \prod_{\alpha \neq \beta} X_\beta \text{ (resp. } F^-(V_\alpha \times \prod_{\alpha \neq \beta} Y_\beta) = F_\alpha^-(V_\alpha) \times \prod_{\alpha \neq \beta} X_\beta)$$

es un conjunto ω-abierto. En consecuencia, obtenemos que $F_\alpha^+(V_\alpha)$ (resp. $F_\alpha^-(V_\alpha)$) es un conjunto ω-abierto. Así, mostramos que F_α es una multifunción faintly ω-continua superiormente (inferiormente). □

Teorema 14. *Sean F y G multifunciones faintly ω-continua superiormente (inferiormente) y cerradas puntualmente de un espacio (X,τ) a un espacio θ-normal (Y,σ). Entonces el conjunto $K = \{x : F(x) \cap G(x) \neq \varnothing\}$ es ω-cerrado en X.*

Demostración. Sea $x \in X\backslash K$. Entonces $F(x)\cap G(x) = \varnothing$. Como F y G son multifunciones cerradas puntualmente y Y es un espacio θ-normal, sigue que existen conjuntos θ-abiertos y disjuntos U y V conteniendo a $F(x)$ y $G(x)$, respectivamente. Como F y G son multifunciones faintly ω-continua superiormente, entonces los conjuntos $F^+(U)$ y $G^+(V)$ son ω-abiertos conteniendo a x. Sea $H= F^+(U) \cup G^+(V)$. Entonces H es un ω-abierto conteniendo a x y $H \cap K = \varnothing$; por lo tanto K is ω-cerrado en X. □

Definición 15. *(X,τ) se dice que es un espacio ω-T_2 [2] (resp. θ-T_2 [9]) si para cada par de puntos distintos x, y en X, existen conjuntos ω-abiertos disjuntos (resp. θ-abiertos) U y V en X tal que $x \in U$ y $y \in V$.*

Teorema 16. *Sea $F : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ una multifunción faintly ω-continua superiormente y cerrada puntualmente de X sobre un espacio θ-normal Y y sea $F(x) \cap F(y) = \varnothing$ para cada par de puntos distintos x, y de X. Entonces X es un espacio ω-T_2.*

Demostración. Sean x, y cualesquiera dos puntos distintos en X. Entonces $F(x)\cap F(y) = \varnothing$. Como Y es θ-normal, sigue que existen conjuntos θ-abiertos y disjuntos U y V conteniendo a $F(x)$ y $F(y)$, respectivamente. Así $F^+(U)$ y $F^+(V)$ son conjuntos ω-abiertos y disjuntos conteniendo a x y a y, respectivamente y obtenemos que (X,τ) es ω-T_2. □

Definición 17. *(X,τ) se dice que es θ-compacto [9] (resp. ω-compacto [2]) si cada cubrimiento de X por conjuntos θ-abiertos (resp. ω-abiertos) tiene un subcubrimiento finito.*
Un subconjunto A de X se dice que es θ-compacto relativo a X si todo cubrimiento de A por conjuntos θ-abiertos de X tiene un subcubrimiento finito.

Teorema 18. *Sea $F : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ una multifunción faintly ω-continua superiormente y sobrejectiva tal que $F(x)$ es θ-compacto para cada $x \in X$. Si X es un espacio ω-compacto, entonces Y es θ-compacto.*

Demostración. Sea $\{V_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ un cubrimiento de Y por conjuntos θ-abiertos. Como $F(x)$ es θ-compacto para cada $x \in X$, existe un subconjunto finito $\Lambda(x)$ of Λ tal que $F(x) \subset \cup\{V_\alpha\colon \alpha \in \Lambda(x)\}$. Considere $V(x) = \cup\{V_\alpha\colon \alpha \in \Lambda(x)\}$. Como F es una multifunción faintly ω-continua superiormente, existe un conjunto ω-abierto $U(x)$ de X conteniendo a x tal que $F(U(x)) \subset V(x)$. Entonces la familia $\{U(x) : x \in X\}$ es un cubrimiento de X por conjuntos ω-abiertos y por lo tanto,

existe un número finito de puntos, sean éstos, x_1, x_2, x_3,... x_n in X tal que $X = \cup\{U(x_i)$: $i = 1$, 2,..., $n\}$. Así, obtenemos que

$$Y = F(X) = F\left(\bigcup_{i=1}^{n} U(x_i)\right) = \bigcup_{i=1}^{n} F(U(x_i)) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V(x_i) = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{\alpha\in\Lambda(x_i)} V_\alpha.$$

Esto muestra que Y es θ-compacto. □

Definición 19. *Sea $F : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una multifunción. El multigrafo $G(F)$ se dice que es ω-θ-cerrado si para cada $(x, y) \notin G(F)$, existen un conjunto ω-abierto U y un conjunto θ-abierto V conteniendo a x, y, respectivamente, tal que $(U \times V) \cap G(F) = \varnothing$.*

Teorema 20. *Si $F : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es una multifunción faintly ω-continua superiormente tal que $F(x)$ es θ-compacto relativo a Y para cada $x \in X$ y Y es un espacio θ-T_2, Entonces el multigrafo $G(F)$ de F es ω-θ-cerrado en $X \times Y$.*

Demostración. Sea $(x, y) \in (X \times Y)\backslash G(f)$. Est es $y \notin F(x)$. Como Y es θ-T_2 para cada $z \in F(x)$, existen conjuntos disjuntos θ-abiertos $V(z)$ y $U(z)$ de Y tal que $z \in U(z)$ y $y \in V(y)$. Entonces $\{U(z) : z \in F(x)\}$ es un cubrimiento de $F(X)$ por conjuntos θ-abiertos y como $F(x)$ es un subconjunto θ-compacto relativo a Y, existe un número finito de puntos, digamos, z_1, z_2, ... , z_n en $F(x)$ tal que $F(x) \subset \cup\{U(z_i) : i = 1, 2, ..., n\}$. Sea $U = \cup\{U(z_i)$: $i = 1, 2, ..., n\}$ y $V = \cap$ $\{V(y_i)$: $i = 1, 2, ..., n\}$. Entonces U y V son conjuntos θ-abiertos en Y tal que $F(x) \subset U$, $y \in V$ and $U \cap V = \varnothing$. Como F es una multifunción faintly ω-continua superiormente, existe un conjunto ω-abierto W de X conteniendo a x tal que $F(W) \subset U$. Obteniendo que $(x, y) \in W \times V \subset (X \times Y)$ $\setminus$ $G(f)$. Así $(W \times V) \cap G(F) = \varnothing$ y por lo tanto $G(F)$ es un conjunto ω-θ-cerrado en $X \times Y$. □

Teorema 21. *Sea $F : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una multifunción teniendo un ω-θ-cerrado multigrafo $G(F)$. Si B es un subconjunto θ-compacto relativo a Y, entonces $F^-(B)$ es ω-cerrado en X.*

Demostración. Sea $x \in X\backslash F^-(B)$. para cada $y \in B$, $(x, y) \notin G(F)$ y existe un conjunto ω-abierto $U(y) \subset X$ y un conjunto θ-abierto $V(y) \subset Y$, conteniendo a x, y, respectivamente, tal que $F(U(y))$ $\cap$ $V(y) = \varnothing$. Esto es, $U(y) \cap F^-(V(y)) = \varnothing$. Entonces $\{V(y)$: $y \in B\}$ es un cubrimiento de B por conjuntos θ-abiertos y como B es θ-compacto relativo a Y, existe un subconjunto finito B_0 de B tal que $B \subset \cup\{V(y) : y \in B_0\}$. Put $U = \cap\{U(y) : y \in B_0\}$. Entonces U es un conjunto ω-abierto en X, $x \in U$ y $U \cap F^-(B) = \varnothing$; ésto es, $x \in U \subset X\backslash F^-(B)$. Ésto prueba que $F^-(B)$ es ω-cerrado en X. □

Referencias

[1] K. Al-Zoubi and B. Al-Nashef, The topology of ω-open subsets, *Al-Manarah* **(9) (2003)**, 169-179.

[2] A. Al-Omari and M. S. M. Noorani, Contra-ω-continuous and almost ω-continuous functions, *Int. J. Math. Math. Sci.* **(9) (2007)**, 169-179.

[3] C. Berge, Espaces topologiques functions multivoques, Paris, Dunod (1959).

[4] T. Banzaru, Multifunctions and M-product spaces, *Bull. Stin. Tech. Inst. Politech. Timisoara, Ser. Mat. Fiz. Mer. Teor. Apl.*, **17(31)(1972)**, 17-23.

[5] C. Carpintero, N. Rajesh, E. Rosas and s. Saranyasri, On upper and lower almost ω-continuous multifunctions (submitted).

[6] C. Carpintero, N. Rajesh, E. Rosas and s. Saranyasri, On upper and lower faintly ω-continuous multifunctions (submitted)

[7] H. Z. Hdeib, ω-closed mappings, *Revista Colombiana Mat.*, **16(1982)**, 65-78.

[8] T. Noiri and V. Popa, Almost weakly continuous multifunctions, *Demonstraio Math.*, 26(1993), 363-380.

[9] S. Sinharoy and S. Bandyopadhyay, On θ-completely regular and locally θ-H-closed spaces, *Bull. Cal. Math. Soc.*, **87(1995)**, 19-26.

[10] N. V. Velicko, H-closed topological spaces, *Amer. Math. Soc. Transl.*, **78(1968)**, 103-118.

[11] I. Zorlutuna, ω-continuous multifunctions, *Filomat*, **27(1) (2013)**, 155-162.

La función logística y el caos

Cristian Camilo Espitia Morillo

Universidad Pontificia Bolivariana, Seccional Bucaramanga, Colombia, espitiacristian@gmail.com

Resumen

Se estudia las características del sistema dinámico $\{f, \mathbb{R}\}$ donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ para una constante positiva λ, modelo conocido como "función logística", adicionalmente se expondrán las características de una función caótica en general y en particular se mostrará que f_4 es una función caótica.

1. Introducción

Un fenómeno se llama Caótico cuando al transcurrir el tiempo, no se tiene un patrón que modele su comportamiento. Es interesante ver como modelos sencillos resultan ser caóticos a largo del tiempo, para esto se da una definición rigurosa de Caos tal como la muestra Devaney [5]. La exposición se organiza de la siguiente manera:

2. Sistemas Dinámicos Discretos
3. Iteración Gráfica, construcción de un diagrama web
4. Función Logística
5. Dinámica de la función Logística
6. Caos según Devaney

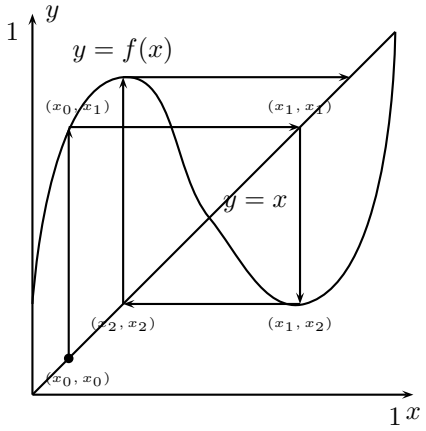
2. Sistemas Dinámicos Discretos

Definición 1. *Un **Sistema Dinámico Discreto** (denotado SD) es una estructura $\{X, f\}$ donde $f : X \to X$ es una función y X es un conjunto no vacío. La **órbita** de un punto $x \in X$ es la sucesión $\{f^{\circ n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$.*

En esta exposición el conjunto X representa un intervalo $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ y $f : [a, b] \to [c, d]$ es una función, también llamada "ley que gobierna el sistema".

3. Iteración Gráfica, construcción de un diagrama web

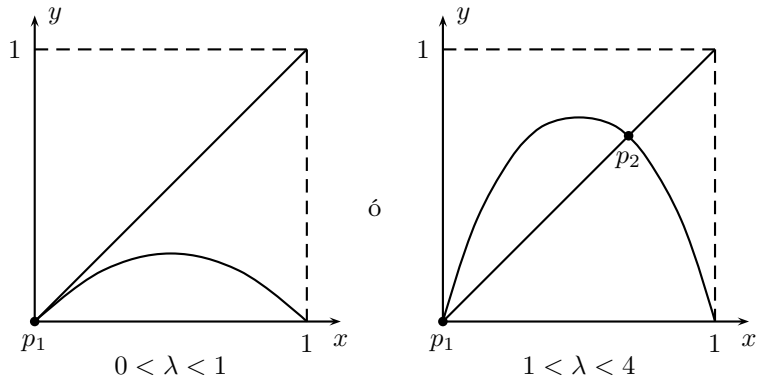
Para representar gráficamente la órbita de un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ en un sistema dinámico $\{\mathbb{R}, f\}$ se utiliza la gráfica de la función f y la recta $y = x$. Por simplificación considere $f : [0,1] \to [0,1]$, se empieza con el punto (x_0, x_0) y se lo conecta con el punto $(x_0, x_1 = f(x_0))$ mediante un segmento de línea recta, luego se conecta con (x_1, x_1), después con (x_1, x_2) y así sucesivamente, a esta construcción se la conoce como "diagrama web".



La órbita de (x_0, x_0) es la sucesión de puntos
$\{(x_0, x_0), (x_0, x_1), (x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_2), \cdots\}$

4. Función logística

Se define como la familia paramétrica $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ cuando $\lambda \in [0,4]$ y $f : [0,1] \to [0,1]$, para cada constante λ hay un sistema dinámico asociado y una dinámica particular. La gráfica de esta familia son parábolas que se abren hacia abajo con vértice $(\frac{1}{2}, \frac{\lambda}{4})$, la cual puede cortar a la recta $y = x$ en 1 o 2 puntos dependiendo de la constante λ, estos puntos de intersección son $p_1 = 0$ y $p_2 = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$, los cuales son efecto puntos fijos porque $f(p_1) = p_1$ y $f(p_2) = p_2$, su gráfica dependiendo del parámetro λ escogido es la siguiente:



5. Dinámica de la función Logística

Definición 2. *Para $f : [a, b] \to [c, d]$ con primera derivada continua y x_f un punto fijo de f:*

- *Si $|f'(x_f)| < 1$ decimos que x_f es* ***punto atractor***
- *Si $|f'(x_f)| > 1$ decimos que x_f es* ***punto repulsor***
- *Si $|f'(x_f)| = 1$ decimos que x_f es* ***punto indiferente***

Lema 3. *Para $f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$ cuando $\lambda \in [0, 4]$ y $f : [0, 1] \to [0, 1]$, se tiene:*

- *Si $0 < \lambda < 1$ se tiene que p_1 es un punto fijo atractivo*
- *Si $1 < \lambda < 3$ se tiene que p_1 es un punto fijo atractivo y p_2 es repulsor*
- *Si $3 < \lambda < 4$ se tiene que tanto p_1 como p_2 son puntos fijos repulsivos.*

A los valores del parámetro que hacen que la dinámica cambie repentinamente se les llama "bifurcaciones", en este caso $\lambda = 1$ y $\lambda = 3$ son bifurcaciones puesto que para valores del parámetro menores que 1 se tiene que el punto fijo p_1 pasa de ser atractivo a ser repulsivo para valores mayores que 1 y menores que 3. Análogamente para valores del parámetro menores que 3 el punto fijo p_2 pasa de ser atractivo a ser repulsivo para valores mayores que 3 y menores que 4, pero a diferencia del caso anterior cuando $\lambda = 3$ se añaden puntos periódicos diferente orden.

6. Caos según Devaney

Una característica importante en este tipo de sistemas es "dependencia sensible a las condiciones iniciales" una de las propiedades más destacadas de los sistemas dinámicos llamados "Caóticos". A continuación se da una definición matemática rigurosa de Caos expuesta por Devaney en 1989 en su libro [5].

Definición 4. *La función $f : D \to D$ es* ***caótica*** *en D si*

(a) Los puntos periódicos de f son densos en D

(b) f es topológicamente transitiva, y

(c) f exhibe dependencia sensitiva a las condiciones iniciales.

Definición 5. *Una función $f : D \to D$ es topológicamente transitiva en D si para cualquier par de conjuntos abiertos U y V que intersecan a D, existe $z \in U \cap D$ y un número natural n tal que $f^n(z) \in V$. Equivalentemente f es topológicamente transitiva en D si para cualquiera dos puntos x y y en D y cualquier $\epsilon > 0$, existe z en D tal que $|z - x| < \epsilon$ y $|f^n(z) - y| < \epsilon$ para algún n.*

Definición 6. *La función $f : D \to D$ exhibe dependencia sensitiva a las condiciones iniciales si existe $\delta > 0$ tal que para cualquier x en D y cualquier $\epsilon > 0$, existe y en D y un número natural n tal que $|x - y| < \epsilon$ y $|f^n(z) - f^n(y)| > \delta$.*

Referencias

[1] Banks J, *On Devaney's definition of Chaos*, The American Mathematical Montly, Vol. 99 No. 4 (April 1992) 332-334.

[2] Barnsley M, *Fractals Everywhere*, Academic Press (1993).

[3] Barnsley M, *Superfractals*, Cambridge University Press (2006).

[4] Beardon A, *Iteration of Rational Functions*, Springer-Verlag (1991).

[5] Devaney R.L, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experimet*, Addison Wesley (1992).

[6] Espitia C, *Relaciones entre Sistemas Iterados de Funciones y Sistemas Dinámicos Discretos*, Tesis de Maestría, Universidad Industrial de Santander (2012).

[7] Falconer K, *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, Wiley (2003).

[8] Holmgren R, *A first course in discrete dynamical systems*, second edition Springer (1996).

[9] Peitgen O. H, *Fractals and Chaos, new frontiers of science*, Springer (1990).

[10] Sabogal S, & Arenas G, *Una introducción a la geometría fractal*, Ediciones UIS, Bucaramanga, (2011).

Sobre las variedades con curvatura seccional constante y una reconstrucción de la demostración del teorema de Beltrami

Juan Carlos Salcedo Sora

Estudiante de Maestria Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia,

jcsalcedos@unal.edu.co

Resumen

Estudiamos la noción de métricas geodésicamente equivalentes (ver [4]), la relación que guardan los símbolos de Christoffel de dos métricas definidas sobre una misma variedad, la derivada covariante sobre las componentes de una métrica y sobre sus símbolos de Riemann de primer tipo, con lo cual se deducen las identidades de Bianchi y de Richi, para plantear los principales teoremas que caracterizan a una variedad Riemanniana de curvatura seccional constante mediante sus símbolos de Riemann de primer tipo. A partir de lo cual exponemos la relación existente entre los símbolos de Riemann de dos métricas Riemannianas geodésicamente equivalentes y la configuración que adquiere la identidad de Ricci para dichas métricas definidas sobre una misma variedad. Finalmente, se realiza una demostración del Teorema de Beltrami, distinta a la clásica que utiliza herramientas del análisis tensorial.

1. Introducción

Se presentará una demostración del teorema de Beltrami tomando como base teórica conceptos provenientes de la geometría diferencial distinta a la clásica que utiliza herramientas del análisis tensorial.

1.1. Conceptos Básicos

Sea (M^n, g) una variedad Riemanniana,

Para g_{ij} las expresiones de la métrica Riemanniana en el sistema de coordenadas $\left(U, \varphi\left(x^1, \ldots, x^n\right)\right)$, notaremos $g_{ij}^{'}$ a las componentes de la métrica Riemanniana relativa al sistema de coordenadas $\left(V, \psi\left(x'^1, \ldots, x'^n\right)\right)$, donde $\varphi(U) \cap \psi(V) = W \neq \emptyset$ y por propiedades de la transformación de coordenadas:

$$g_{\mu\nu}^{'} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^j}{\partial x'^{\nu}} \tag{1}$$

Si $\left(U, \varphi\left(x^1, \ldots, x^n\right)\right)$ es una parametrización de M^n en p, T_pM es el espacio tangente a M^n en p y $u, v \in T_pM$ son dos vectores L.I., a saber $u = \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ y $v = \beta^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, sea $\Pi = \text{Span}\{u, v\} \subseteq T_pM$ el espacio bidimensional generado por u y v, la **curvatura seccional** de Π se define como:

$$K(\Pi) = \frac{R_{hijk}\alpha^h\beta^i\alpha^j\beta^k}{\left(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij}\right)\alpha^h\beta^i\alpha^j\beta^k} \tag{2}$$

donde la sumatoria se realiza sobre los índices $h, i, j, k = 1, \ldots n.$ tales que $g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij} \neq 0$.

1.2. Métricas geodésicamente equivalentes

Se dice que g es **geodésicamente equivalente** a $\bar{g}$, si cada geodésica de g considerada como una curva integral, es una geodésica en $\bar{g}$. Cumpliendo

$$\left[\left(\overline{\Gamma}^i_{kl} - \Gamma^i_{kl}\right)\frac{dx^j}{dt} - \left(\overline{\Gamma}^j_{kl} - \Gamma^j_{kl}\right)\frac{dx^i}{dt}\right]\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt} = 0 \tag{3}$$

1.3. Expresiones de relación $g - g'$ y $\bar{g} - \bar{g}'$

Los símbolos de Christoffel y los símbolos de Riemann definidos por g' pueden ser expresados en términos de los definidos por g mediante

$$\Gamma'^{\sigma}_{\mu\nu}\frac{\partial x^l}{\partial x'^{\sigma}} = \Gamma^l_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^j}{\partial x'^{\nu}} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}. \tag{4}$$

$$R'_{\tau\mu\nu\lambda} = R_{hijk}\frac{\partial x^h}{\partial x'^{\tau}}\frac{\partial x^i}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^j}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^k}{\partial x'^{\lambda}} \tag{5}$$

Los símbolos de Christoffel de $\bar{g}$ son expresados en términos de los de g por medio de

$$\left(\overline{\Gamma}'^{\sigma}_{\mu\nu} - \Gamma'^{\sigma}_{\mu\nu}\right)\frac{\partial x^l}{\partial x'^{\sigma}}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^i}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^j} = \overline{\Gamma}^l_{ij} - \Gamma^l_{ij}. \tag{6}$$

1.4. Concepto de relación g y $\bar{g}$

Definimos la ***primera derivada covariante*** de $\bar{g}_{ij}$ con respecto a g_{ij} y x^k, como:

$$\bar{g}_{ij,k} = \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial x^k} - \bar{g}_{hj}\Gamma^h_{ik} - \bar{g}_{ih}\Gamma^h_{jk} \tag{7}$$

Como $g_{ij,k} = 0$, se puede pensar en $\bar{g}_{ij,k}$ como una medida de qué tanto $\bar{g}$ difiere de g. Así como en el análisis de campos vectoriales se establecen condiciones para la igualdad de las derivadas parciales mixtas, se hace lo propio con la derivada covariante. Estableciendo

$$\bar{g}_{ij,kl} - \bar{g}_{ij,lk} = \bar{g}_{mj}R^m_{ikl} + \bar{g}_{im}R^m_{jkl} \tag{8}$$

que es denominada la ***identidad de Ricci***.

2. Desarrollo y conclusiones

2.1. Caracterización de una variedad con curvatura seccional constante a través de sus símbolos de Riemann

Sean (M^n, g) una variedad Riemanniana, $\left(U, \varphi\left(x^1, \ldots, x^n\right)\right)$ una parametrización de M^n en p y T_pM el espacio tangente a M^n en p.

Teorema 1 (Ver [5], p. 39)**.** *$K(\Pi) = c_0 \ \forall \Pi \subset T_pM$ si y sólo si*

$$R_{hijk} = c_0 \left(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij}\right) \qquad \text{para cada } h, i, j, k = 1, \ldots n. \tag{9}$$

Teorema 2 (Ver [5], p. 42)**.** *Si $R_{hijk} = \upsilon \left(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij}\right)$ para cada $h, i, j, k = 1, \ldots n$. donde υ es una función real definida sobre U, entonces υ es una función constante.*

Corolario 3 (Ver [5], p. 43)**.** *Si $R_{hijk} = \upsilon \left(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij}\right)$ para cada $h, i, j, k = 1, \ldots n$. donde υ es una función real definida sobre U, entonces $K(\Pi) = c_0 \ \forall \Pi \subset T_pM$.*

2.2. Símbolos de Riemann de métricas geodésicamente equivalentes

Introduciendo la notación $T_l = \frac{1}{2(n+1)}\left(\bar{g}^{'m\nu}\frac{\partial \bar{g}^{'}_{m\nu}}{\partial x^l} - g^{'m\nu}\frac{\partial g^{'}_{m\nu}}{\partial x^l}\right)$ y $T_{lk} = \frac{\partial T_l}{\partial x^k}$. Se establece

$$\bar{R}_{kijl} = \bar{g}_{mk}R^m_{ijl} + \bar{g}_{lk}\Upsilon_{ij} - \bar{g}_{jk}\Upsilon_{il} \tag{10}$$

$$\bar{g}_{mk}R^m_{ijl} + \bar{g}_{mi}R^m_{kjl} = \bar{g}_{jk}\Upsilon_{il} - \bar{g}_{lk}\Upsilon_{ij} + \bar{g}_{ji}\Upsilon_{kl} - \bar{g}_{li}\Upsilon_{kj} \tag{11}$$

donde, $\Upsilon_{ij} = T_{ij} - T_iT_j - T_h\Gamma^h_{ij}$, 11 es la configuración que adquiere la identidad de Ricci para métricas geodésicamente equivalentes.

2.3. Resultado Central

2.3.1. Teorema de Beltrami

Teorema 4 (Teorema de Beltrami)**.** *Sean g y $\bar{g}$ dos métricas Riemannianas geodésicamente equivalentes definidas sobre una variedad diferenciable M^n. Si (M^n, g) tiene curvatura seccional constante entonces $(M^n, \bar{g})$ también tiene curvatura seccional constante.*

Bosquejo demostración
Sean g_{ij} y $\bar{g}_{ij}$ las expresiones de dichas métricas en el sistema de coordenadas $\left(U, \varphi\left(x^1, \ldots, x^n\right)\right)$ y $g^{'}_{ij}$ y $\bar{g}^{'}_{ij}$ los respectivos componentes de g y $\bar{g}$ relativos al sistema de coordenadas $\left(V, \psi\left(x'^1, \ldots, x'^n\right)\right)$, donde $\varphi(U) \cap \psi(V) = W \neq \emptyset$.

Si (M^n, g) tiene curvatura seccional constante c_0, utilizando 9 y 10 se logra establecer

$$\bar{R}_{hijl} \quad = \quad \rho\left(\bar{g}_{jh}\bar{g}_{il} - \bar{g}_{lh}\bar{g}_{ij}\right) \quad \text{para cada } h, i, j, l = 1, \ldots n.$$

Luego por corolario , se sigue que $(M^n, \bar{g})$ tiene curvatura seccional constante.

2.4. Conclusiones y comentarios

- Los conceptos de curvas geodésicas, símbolos de Riemann y curvatura seccional definidos sobre una variedad Riemanniana asi como las propiedades que éstos cumplen, pueden ser establecidos a partir de las propiedades que sobre las métricas posee la transformación de coordenadas en dicha variedad.
- El definir las geodésicas de una variedad Riemanniana como una curva extremal de la integral estacionaria dada por la longitud de curva ha conllevado un gran avance en el modelamiento de la visión humana y el rastreo satelital sobre superficies.
- Bajo el mismo enfoque se desea establecer el teorema de Beltrami para variedades de Finsler.

Referencias

[1] DUBROVIN, Boris; FOMENKO, Anatoly y NOVIKOV, Sergei., *Modern Geometry - Methods and Aplications,* Traducido del ruso por Robert G. Burns, Segunda edición, New York: Springer-Verlag, 1992. 461 p.(Graduate texts in Mathematics; Vol. 93).

[2] EISENHART, Luther., *Riemannian Geometry,* Segunda edición, Princeton, Nueva Jersey: Princeton University Press, 1949. 306 p.

[3] MATVEEV, Vladimir, *Metric on a sphere that is geodesically equivalent to a metric of constant curvature is a metric of constant curvature too.* Moscow University - Mathematics Bulletin. Vol. 53,(1998). No. 5, p. 31-33.

[4] MATVEEV, Vladimir., *Geometric explanation of the Beltrami Theorem,* International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, Vol. 03,(2006), No. 03, p. 623-629.

[5] SALCEDO, Juan Carlos, *Sobre las variedades con curvatura seccional constante y una reconstrucción de la demostración del teorema de Beltrami.* Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Matemático, Departamento de Matemáticas, Universidad Distrital Francisco José De Caldas, Bogotá, Colombia.(2012)

[6] VERPOORT, Steven, *Some modifications of the theorem of Beltrami,* Fondazione Annali di Matematica Pura ed Applicata and Springer-Verlag, Published online,(2011).

Funciones inducidas conexas

Sergio Andrés Pérez León

Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, sergio.2060@hotmail.com

Resumen

Una función $f\colon X \to Y$ definida entre espacios topológicos es conexa si la gráfica $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ es conexa. Dado un continuo X, se consideran los hiperespacios: 2^X, la colección de todos los subconjuntos cerrados no vacíos de X; $C(X)$, el conjunto de todos los subcontinuos de X; y $F_n(X)$, los subconjuntos no vacíos de a lo más n puntos de X. Además, dada una función $f\colon X \to Y$ entre continuos, consideramos las funciones inducidas $2^f\colon 2^X \to 2^Y$ definidas por $2^f(A) = \overline{f(A)}$ para cada $A \in 2^X$; $F_n(f)\colon F_n(X) \to F_n(Y)$, la función restricción $F_n(f) = 2^f|_{F_n(X)}$; y si f es una función Darboux débil, definimos $C(f)\colon C(X) \to C(Y)$ por $C(f) = 2^f|_{C(X)}$. En esta charla se estudiarán algunas relaciones acerca de la conexidad de las funciones anteriormente definidas.

1. Introducción

Uno de los teoremas más importantes en topología que involucra funciones continuas es el Teorema del punto fijo de Brouwer, demostrado por Luitzen E. J. Brouwer a principios del siglo XX. Años más tarde, en 1959, en el trabajo titulado "Fixed point theorems for connectivity maps", J. Stallings da ejemplos de funciones, no necesariamente continuas, que satisfacen el teorema de Brouwer [11]. Esta clase de funciones Stallings las llamó funciones de conectividad.

El trabajo de Stallings motivó a estudiar propiedades topológicas de funciones no necesariamente continuas, pero que involucraban en su definición, propiedades inherentes a las funciones continuas. Investigadores importantes como Brown, Garret, Kellum y el mismo Stallings, siguiendo la misma línea que las funciones de conectividad definidas por Stallings, dedicaron parte de su trabajo al estudio de "peculiaridades" de estas clases de funciones, que clasificaron en 4 grupos que son: funciones de Darboux, funciones conexas, funciones de conectividad local y funciones casicontinuas (ver [4], [7], [8], [9] y [11]).

En esta charla estudiamos algunos aspectos relacionados con las funciones conexas. Es importante resaltar que en este escrito las funciones no son necesariamente continuas y los espacios siempre serán continuos. Un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y diferente del vacío. Una función $f\colon X \to Y$ definida entre continuos se denomina *conexa* si la gráfica $\Gamma(f)$ es conexa. Dado un continuo X, se consideran los hiperespacios: 2^X, la colección de todos los subconjuntos cerrados no vacíos de X; $C(X)$, el conjunto de todos los subcontinuos de X; y $F_n(X)$, los subconjuntos no vacíos de a lo más n puntos de X. Además, dada una función $f\colon X \to Y$ entre continuos, consideramos las funciones inducidas: $2^f\colon 2^X \to 2^Y$, definida por $2^f(A) = \overline{f(A)}$ para cada $A \in 2^X$; $F_n(f)\colon F_n(X) \to F_n(Y)$, la función restricción $F_n(f) = 2^f|_{F_n(X)}$; y, si f es una función Darboux

débil, definimos $C(f)\colon C(X) \to C(Y)$ por $C(f) = 2^f|_{C(X)}$. En [5] se estudiaron algunas relaciones entre clases de funciones no continuas y sus respectivas funciones inducidas. Aquí estudiaremos las relaciones entre las siguientes afirmaciones:

1. f es conexa;
2. $C(f)$ es conexa;
3. $F_n(f)$ es conexa, para algún $n \geq 2$;
4. $F_n(f)$ es conexa, para todo $n \geq 2$;
5. 2^f es conexa.

2. Algunos resultados

Entre los resultados más destacados, probamos los siguientes teoremas:

1. *Sea $f\colon X \to Y$ una función definida entre continuos. Si f es una función conexa, entonces $F_n(f)$ es conexa, para todo $n \in \mathbb{N}$.*
2. *Sea $f\colon X \to Y$ una función definida entre continuos. Si $F_n(f)$ es una función conexa, entonces $F_k(f)$ es una función conexa, para todo $k \geq n$.*
3. *Sea $f\colon X \to Y$ una función definida entre continuos. Si f es conexa, entonces 2^f es conexa.*

Referencias

[1] Borsuk K. and Ulam S., "On symmetric products of topological spaces", *Bull. Amer. Math. Soc.* 37 (1931), no. 12, 875-882.

[2] Brown J. B., "Almost continuity of the Cesàro-Vietoris function", *Proc. Amer. Math. Soc.* 49 (1975), 185-188.

[3] Dugundji J., *Topology,* Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1966.

[4] Garrett B. D., "When almost continuity implies connectivity", *Topology Proc.* 13 (1988), no. 2, 203-210.

[5] Illanes A., "Induced almost continuous functions on Hyperspaces", *Colloq. Math.* 105 (2006), no. 1, 69-76.

[6] Illanes A. and Nadler S. B. Jr., *Hyperspaces. Fundamentals and Recent Advances,* Pure and Applied Mathematics, Vol. 216, Marcel Dekker, New York, 1999.

[7] Kellum K. R. and H. Rosen., "Compositions of continuous functions and connected functions", *Proc. Amer. Math. Soc.* 115 (1992), no. 1, 145-149.

[8] Nadler S. B. Jr., "Continua on which all real-valued connected functions are connectivity functions", *Topology Proc.* 28 (2004), no. 1, 229-239.

[9] Nadler S. B. Jr., "Local connectivity functions on arcwise connected spaces and certain continua", *Topology Appl.* 153 (2006), no. 8, 1279-1290.

[10] Nadler S. B. Jr., *Continuum Theory, An Introduction*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[11] Stallings J., "Fixed point theorems for connectivity maps", *Fund. Math.* 47 (1959), 249-263.

[12] Vietoris L., "Stetige Mengen", *Monatsh. Math. Phys.* 31 (1921), no. 1, 173-204.

La Conjetura de Poincaré

Sofía Pinzón Durán* y Jhoan Sebastián Báez Acevedo**

*Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, sofia@ciencias.uis.edu.co

**Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, sebastianbaezzz@gmail.com

Resumen

Este trabajo consiste en estudiar los conceptos básicos que acompañan el planteamiento de la conjetura de Poincaré en su version generalizada, su desarrollo histórico y analizar el caso en dimension 3. Para ello estudiaremos resultados clásicos de topología, topología algebraica y algebra moderna. Así mismo pretendemos estudiar las equivalencias geométricas, topológicas y algebraicas de la conjetura de Poincaré y presentar algunos de los resultados geométricos y topológicos que se obtuvieron al tratar de demostrar la conjetura.

1. Introducción

En la historia de la humanidad las matemáticas han jugado un papel fundamental, la aparición de problemas en esta área se convierte en el motivo de trabajo y del éxito de grandes hombres. Pero así como dichos problemas fueron satisfactorios para las personalidades que los resolvían, existen problemas que por su complejidad, o la falta de teorías que permitan abordarlos, se mantienen vigentes durante muchos años, permitiendo que a través de los intentos de solución se generen nuevos conocimientos, nuevos métodos y nuevos problemas.

Los problemas del milenio son una gran muestra de algunos de los misterios que el mundo matemático nos proporciona, de estos problemas el único que se ha resuelto satisfactoriamente ha sido la conjetura de Poincaré. En el siglo XIX la topología de las variedades de dimensión 2 o superficies era bien conocida, de hecho se tenía una lista completa de las posibles superficies compactas orientables, pero en dimensiones mayores la clasificación de variedades era un tema un poco mas complejo. Henri Poincaré, fue quizá el primero en intentar realizar una clasificación similar para las variedades de dimensión tres. El ejemplo más básico de estas variedades es la esfera unitaria tri-dimensional, esto es el lugar geométrico de los puntos $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ cuya distancia al origen es 1, esto es, $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$. Él notó que una característica fundamental de la esfera en dimensión dos es que cada curva cerrada puede ser deformada de manera continua a un punto sin salirse de la esfera, en 1904 Poincaré se preguntó si este hecho se cumplía también para la esfera en dimensión tres. En lenguaje moderno el problema consiste en demostrar si existe una 3-variedad cerrada, simplemente conexa tal que no sea homeomórfa a la 3-esfera. Una respuesta negativa a dicha pregunta es la que se ha etiquetado como la conjetura Poincaré, aunque el propio Poincaré no hizo ningún intento de responder a esta. Este problema desconcertó a muchos matemáticos durante más de 100 años y, finalmente, una respuesta positiva a la conjetura ha sido recientemente obtenido por Grigori Perelman.

Como muchos de los problemas que se mantuvo abierto durante mucho tiempo, la conjetura Poincaré o, mejor, el intento de una comprensión más profunda del problema ha producido una cantidad incalculable de resultados matemáticos. Por lo tanto presentaremos una vision generalizada de lo que la conjetura de Poincaré en su vision generalizada aludiendo a un principio básico de el trabajo matemático:

Si no puedes resolver un problema, ¡generalizalo!

Por lo tanto presentamos la forma generalizada de la conjetura que será estudiada en este trabajo, así como el contexto histórico que enriquece el problema.

Referencias

[1] Buoncristiano, Sandro y Mercuri, Francesco. *A brief history of the Poincaré conjecture. no se* **118**(no se) (no se pags).

[2] Macho, Martha. *Topología Algebraica - Curso 2007-2008.* Notas de clase, Universidad del Pais Vasco, 2008.

[3] Lima, Elon Lages. *Análise Real.* Volumen I, Séptima Edición. IMPA, Rio de Janeiro Brasil, 2004.

[4] Lima, Elon Lages. *Grupo fundamental e espacos de Recubrimento.* Séptima Edición*. IMPA, Rio de Janeiro Brasil, 2004*.

[5] Kosniowski, Czes. *Topología Algebraica.* Editorial Reverté, Barcelona España, 1986.

[6] Hirsch,M.W. *Differential Topology.* Graduated Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1976.

[7] Cerf, J. *Sur le difféorphismes de la sphère de dimension trois.*Springer lectures notes in Mathematics, **53**,1968.

[8] Kervaire, M. A. y Milhor, J.W. *Groups of Homotopy Spheres.* Ann. on Math. **77**, 504-537, 1963.

[9] Duran, C.E; Mendoza, A; Rigas, A.*Blakers-Massey Elements and exotic Diffeomorphisms of* S^6 *and* S^{14} *via Geodesics.* Transactions of the A.M.S., **356**, 12, 5025-5043,2004.

[10] Moise, E. *Geometric Topology in dimensions 2 and 3.* Graduate texts in Mathematics, Springer Verlag, 1977.

[11] Munkres, J.R. *Elementary Differential Topology.* Ann. of math. Studies, 54, 1963.

[12] Do Carmo, M.P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superficies.* Sociedad Brasileira de Matemática, 2005.

[13] Do Carmo, M.P. *Geometria Riemanniana.* Projeto Euclides, Segunda edición, 1988.

La propiedad de arcoaproximación entre continuos

Dúwamg Alexis Prada Marín

Universidad Pontificia Bolivariana, Seccional Bucaramanga, Colombia, duwamg.prada@upb.edu.co

Resumen

El estudio de las funciones continuas, en ciertas áreas de las matemáticas, es de gran importancia, pues estas son una herramienta que nos permiten comparar las propiedades entre espacios. La métrica, la conexidad y la compacidad en un espacio no vacío, son propiedades muy estudiadas en topología, en particular, en la teoría de continuos e hiperespacios de continuos. Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un hiperespacio de un continuo es una familia de subconjuntos del continuo que satisfacen una condición en particular. El profesor Hosokawa estudió una clase especial de funciones continuas entre hiperespacios. Dada una función f continua entre continuos, se definen las funciones 2^f, $C_n(f)$, $F_n(f)$ y $HS_n(f)$, para $n \in \mathbb{N}$, conocidas como las funciones inducidas entre hiperespacios.

El propósito de esta charla es mostrar los aportes a la teoría de continuos, mediante la propiedad de arco aproximación y resultados parciales a preguntas que se han formulado en el artículo "*induced mappings on hyperspaces*" [4], Hiroshi Hosokawa.

1. Introducción

Un espacio métrico compacto, conexo y no vacío, lo definimos como continuo X. La propiedad de arcoaproximación para un continuo X, fue definida por W.J. Charatonik en el artículo "*Arc approximation property and confluence of induced mappings*", dicha propiedad es una herramienta que permite brindar soluciones parciales a preguntas abiertas de la teoría de continuos y sus hiperespacios. Los hiperespacios de un continuo X, son familias de subconjuntos de X que satisfacen algunas propiedades particulares. A estas familias de subconjuntos de X se les dota de una topología mediante la métrica de Hausdorff. Los hiperespacios más estudiados son: 2^X (la familia de subconjuntos cerrados y no vacíos de X), $C(X)$ (la colección de todos los subcontinuos de X), $C_n(X)$ (la colección de todos los conjuntos cerrados y no vacíos de X con a lo más n componentes) y $F_n(X)$ (la familia de todos los conjuntos cerrados no vacíos de X que tienen a lo más n puntos).

Uno de los problemas generales de las funciones inducidas es el siguiente: dada una clase de funciones $\mathcal{A}$ entre continuos, analizamos las relaciones que hay entre las siguientes afirmaciones:

1. $f \in \mathcal{A}$;
2. $C_n(f) \in \mathcal{A}$, para cada $n \in \mathbb{N}$;
3. $2^f \in \mathcal{A}$;

Mediante la propiedad de arcoaproximación entre continuos, podemos dar respuestas parciales al problema anterior. Sin embargo, otro problema enunciado por W.J. Charatonik en el artículo "*Arc approximation property and confluence of induced mappings*",

Problema 1. Dado un continuo X, cuáles implicaciones se tienen entre los siguientes tres enunciados:

1. X tiene la propiedad de arcoaproximación;
2. 2^X tiene la propiedad de arcoaproximación;
3. $C_n(X)$ tiene la propiedad de arcoaproximación, para $n \in \mathbb{N}$.

2. Algunos resultados

Definición 2. *Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo diferente de vacío.*

Definición 3. *Sean X un espacio topológico, $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X y $A \subset X$. Diremos que $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a A, denotada por $\lim_{i\to\infty} A_i = A$, siempre que $\lim\inf_{i\to\infty} A_i = A = \lim\sup_{i\to\infty} A_i$.*

Definición 4. *Sean K un subcontinuo de un continuo X y un punto $p \in K$. Diremos que K es* arcoaproximado en el punto p *si existe una sucesión de subcontinuos arcoconexos K_n de X tales que $p \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $K = \lim_{n\to\infty} K_n$. Un subcontinuo K de un continuo X se dice* arcoaproximado *siempre que sea arcoaproximado en cada punto de K. Un continuo X se dice que tiene la* propiedad de arcoaproximación *siempre que cada subcontinuo de X es arcoaproximado.*

Ejemplo 5. *El arco y la curva cerrada simple, son ejemplos de continuos que tienen tienen la propiedad de arcoaproximación.*

Ejemplo 6. *El continuo conocido como la curva senoidal del topólogo y el círculo de varsovia son ejemplos de continuos que no tienen la propiedad de arcoaproximación.*

Definición 7. *Sean X y Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Diremos que f es una función débilmente confluente si para cualquier subcontinuo $Q \subset Y$, existe una componente C de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(C) = Q$.*

Teorema 8 (W. Charatonik)**.** Sean X y Y continuos. Si X es un continuo que tiene la propiedad de arcoaproximación y $f : X \to Y$ una función débilmente confluente entonces Y tiene la propiedad de arcoaproximación.

Definición 9. *Un espacio X se dice localmente conexo en x si para toda vecindad U de x, existe una vecindad V de x conexa en U. Si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos diremos que el espacio es locamente conexo.*

Teorema 10 (W. Charatonik)**.** Todo continuo localmente conexo tiene la propiedad de arcoaproximación.

Definición 11. *Sea X un continuo. Diremos que X es arco conexo si para cualesquiera dos puntos de $x, y \in X$, existe un arco $J \in X$, tal que $\{x, y\} \subset J$.*

Teorema 12. *Si un continuo X tiene la propiedad de arco aproximación, entonces X es un continuo arcoconexo.*

Definición 13. *Sean X y Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Diremos que f es una función confluente si para cualquier subcontinuo $Q \subset Y$ y cada componente K de $f^{-1}(Q)$, tenemos que $f(K) = Q$.*

Teorema 14. Sea X un continuo tal que $X = Z \cup (\bigcup_{j=1}^{n} R_j)$ donde:

1. Z es un continuo localmente conexo y R_j es un rayo, para cada $j \in \{1, 2, ..., n\}$.
2. $R_i \cap Z = \emptyset$ y $Cl_X(R_i) \setminus R_i \subset Z$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$.
3. $R_i \cap R_l = \emptyset$ siempre que $i \neq l$.

Sea Y un continuo. Si $f : X \to Y$ es una función confluente y Y tiene la propiedad de arcoaproximación, entonces Y es localmente conexo.

Definición 15. *Un continuo X es* unicoherente *si al escribir $X = H \bigcup K$, donde H y K son subcontinuos de X, se tiene que $H \bigcap K$ es conexo. Diremos que X es* hereditariamente unicoherente *si todo subcontinuo de X es unicoherente.*

Ejemplo 16. *El arco, el triodo, el continuo seno del topologo, son continuos unicoherentes. El continuo S^1 no es unicoherente.*

Definición 17. *Un* dendroide *es un continuo arcoconexo y hereditariamente unicoherente.*

Definición 18. *Un continuo X es una dendrita si X es un dendroide localmente conexo.*

Corolario 19. Sean X, Y continuos y $f : X \to Y$ una función confluente donde X es la compactación de un rayo R con residuo un arco A. Si Y tiene la propiedad de arcoaproximación, entonces Y es una dendrita.

Teorema 20. Sean $X_1 = A_1 \cup R_1$ y $X_2 = A_2 \cup R_2$ tales que $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, donde X_i es la compactación de un rayo R_i con residuo un continuo localmente conexo A_i para $i \in \{1, 2\}$. Además, sea x_i punto final del rayo R_i con $i \in \{1, 2\}$. Si $f : X \to Y$ es una función confluente donde $X = (X_1 \cup X_2)/\{x_1, x_2\}$ y Y es un continuo que tiene la propiedad de arcoaproximación, entonces Y es localmente conexo.

Teorema 21. *Dado un continuo X, se tienen las siguientes equivalencias:*

1. *X es localmente conexo;*
2. *2^X es localmente conexo;*
3. *$C(X)$ es localmente conexo.*

Problema 22. *Encontrar las condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales algunas implicaciones son verdaderas entre estas tres proposiciones:*

1. *El continuo X tienen la propiedad de arcoaproximación;*
2. *El hiperespacio 2^X tienen la propiedad de arcoaproximación;*
3. *El hiperespacio $C(X)$ tienen la propiedad de arcoaproximación.*

Teorema 23. *Si Y es un continuo que tiene la propiedad de arcoaproximación y además Y es imagen confluente del continuo $X = Z \cup (\bigcup_{j=1}^{n} R_j)$ donde:*

1. *Z es un continuo localmente conexo y R_j es un rayo, para cada $j \in \{1, 2, ..., n\}$.*
2. *$R_i \cap Z = \emptyset$ y $Cl_X(R_i) \setminus R_i \subset Z$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$.*
3. *$R_i \cap R_l = \emptyset$ siempre que $i \neq l$.*

Entonces 2^Y y $C(Y)$ tienen la propiedad de arcoaproximación.

Teorema 24. *Si Y es un continuo que tiene la propiedad de arcoaproximación y además Y es imagen confluente del continuo $X = (X_1 \cup X_2)/\{x_1, x_2\}$ con $X_1 = A_1 \cup R_1$ y $X_2 = A_2 \cup R_2$ tales que $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, donde X_i es la compactación de un rayo R_i con residuo un continuo localmente conexo A_i para $i \in \{1, 2\}$ y x_i punto final del rayo R_i con $i \in \{1, 2\}$, entonces 2^Y y $C(Y)$ tienen la propiedad de arcoaproximación.*

Referencias

[1] CAMARGO, J., *Funciones Inducidas entre Hiperespacios de Continuos*, Tesis de Doctorado, Universidad Nacional Autónoma de México, México D.F., México, 2009.

[2] CHARATONIK, W. J., *Arc approximation property and confluence of induced mappings*, Rocky Mountain J. of Math, Vol 28, N°1, (1998), 107-154.

[3] ESCOBEDO, R., MACÍAS, S. Y MÉNDEZ, H., *Invitación a la teoría de los continuos y sus hiperespacios*, Aportaciones Matemáticas, serie textos N°31, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2006

[4] HOSOKAWA, H., *Induced mappings on hyperspaces*, Tsukuba J. Math., Vol 21, (1997), 239-250.

[5] NADLER Jr, S., *Continuum Theory, An Introduction*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[6] PRADA D., *Funciones inducidas confluentes entre hiperespacios de continuos* Tesis de maestría, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia (2012)

Nudos virtuales

José Gregorio Rodríguez Nieto* y Margarita M. Toro Villegas**

* Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, jgrodrig@unal.edu.co

**Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, mmtoro@unal.edu.co

Resumen

Estudiaremos el concepto de nudo virtual a través de los nudos combinatorios. Daremos condiciones necesarias y suficientes para determinar cuándo un código nudal es el código de un nudo clásico.

1. Introducción

La teoría de los nudos virtuales fue propuesta por Kauffman [2] como una extensión no trivial del concepto de diagrama de un nudo clásico al permitir un tercer tipo de cruce, que denominó cruce virtual. Esta teoría también puede ser obtenida a partir de proyecciones en el plano de diagramas de nudos en supercies engrosadas [1].

Con la definición de nudo virtual surgieron inmediatamente varios interrogantes, uno de ellos, y sobre el cual nos vamos a concentrar, es: *¿Cuándo un diagrama de un nudo virtual es equivalente a un diagrama de un nudos clásico?*. Para ello mostraremos como construir, a partir de un código nudal K, una realización mínima (Σ_K, K), donde Σ_K es una superficie orientable, compacta, conexa y sin frontera, y K es un diagrama sobre Σ_K.

A partir esta realización daremos condiciones necesarias y suficientes para dererminar cuándo un código representa o no un diagrama de un nudo cásico. Estas condiciones se pueden computar usando el software mathematica. Estudiaremos su comportamiento con respecto a los movimientos de Reidemeister y motivaremos la definición de una relación de equivalencia que llevará a la definición de un invariante nuevo de nudos virtuales.

2. Algunos resultados

1. Se muestra la construcción, a partir de un código nudal K dado, de una superficie orientable, compacta, conexa y con frontera N_K.
2. Pegando discos a la frontera de N_K obtebemos la superficie Σ_K. Por tanto el género de Σ_K dependerá, exclusivamente, del cardinal de $\partial(N_K)$, por tanto, se proporciona un algoritmo para computar el número de componentes de la frontera de N_K.
3. K es el código de un nudo clásico si y sólo si el género de Σ_K es 0.

4. Con base en lo anterior, usando el primer grupo de homología de Σ_K, damos condiciones necesarias y suficientes para determinar cuándo un código nudal es el código de un nudo clásico.

Referencias

[1] Carter S., Kamada S., and Saito M., *Stable Equivalence of Knots on surfaces and Virtual Knots Cobordism*, J. Knot Theory Ramifications **11**, No. 6 (2002), 311-320.

[2] Kauffman L., *Virtual Knot theory*, Europ. J. Combinatorics **20** (1999), 663-691.

[3] Toro M. y Rodríguez J., *Tripletas asociadas a diagramas de nudos virtuales,* Revista Integración 29, 2 (2011), 97–108.

Cuantización de variedades de Poisson

Eddy Pariguan

Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia, epariguan@javeriana.edu.co

Resumen

El propósito de esta charla es presentar una breve revisión de la teoría de deformación introducida por Konstevich en [2]. Presentaremos resultados acerca de la deformación formal de álgebras de la forma $\mathrm{Func}(M^n,k)_G$ donde M es un conjunto, k un cuerpo de característica cero y G es un grupo de permutaciones, [1]. Bajo las condiciones de Kontsevich mostramos la existencia de una deformación formal $(C^\infty(\mathbb{R}^m)[[\hbar]],\star)$ del álgebra $(C^\infty(\mathbb{R}^m),\cdot)$ de funciones suaves sobre $\mathbb{R}^m$. Demostraremos que si el corchete de Poisson en $(\mathbb{R}^m,\{,\})$ es G-equivariante para todo $G\subset S_m$, entonces el producto $\star$ sobre $C^\infty(\mathbb{R}^m)[[\hbar]]$ induce un producto $\star$ sobre el álgebra de las funciones simétricas $C^\infty(\mathbb{R}^m)^G[[\hbar]]$, la cual llamaremos álgebra de funciones simétricas cuánticas.

1. Introducción

Sea k un cuerpo de característica cero, M un conjunto y G un subgrupo del grupo de permutaciones de n letras S_n. Una función $f:M^n\to k$ se dice G-simétrica si $f(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},...,x_{\sigma(n)})=f(x_1,x_2,...,x_n)$, para todo $\sigma\in G\subseteq S_n$ y para todo $x_1,...,x_n\in M$. El k-espacio de la funciones G-simétricas $\mathrm{Func}(M^n,k)^G$ es una subalgebra de la k-álgebra $\mathrm{Func}(M^n,k)$ de todas las funciones de M^n en k. Deseamos encontrar formulas explícitas para la regla del producto en el álgebra $\mathrm{Func}(M^n,k)^G$ en una variedad de contextos. Los resultados que se presentan en este trabajo están basados en las siguientes observaciones:

1. Con frecuencia es más fácil trabajar con el álgebra de las funciones coinvariantes $\mathrm{Func}(M^n,k)_G$ que trabajar con el álgebra de las funciones invariantes $\mathrm{Func}(M^n,k)^G$.
2. Las funciones simétricas aparecen de manera natural como resultado de una contrucción general que asigna a cada k-algebra A su n-ésima potencia simétrica $\mathrm{Sym}^n(A)$.

Definición 1. *Sea M una variedad de Poisson. Una deformación formal (deformación por cuantización) del álgebra de las funciones suaves en M, $C^\infty(M)$, es un producto $\star$ asociativo $\star: C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes_{\mathbb{R}[[\hbar]]}C^\infty(M)[[\hbar]]\longrightarrow C^\infty(M)[[\hbar]]$ tal que:*

1. $f\star g=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(f,g)\hbar^n$, *donde los $B_n(-,-)$ son operadores bi-diferenciales.*
2. $f\star g=fg+\frac{1}{2}\{f,g\}\hbar+O(\hbar^2)$, *donde $O(\hbar^2)$ representa términos del orden $\hbar^2$.*

En 1997 Kontsevich en [2] demuestra el teorema de formalidad que el mismo propuso en [3], entre 1993-1994. La existencia de productos $\star$ sobre una variedad de Poisson aparece como consecuencia del teorema de formalidad de Kontsevich.

Consideramos el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ como cuerpo base y tomamos la variedad de Poisson $(\mathbb{R}^m, \{,\})$. Kontsevich demuestra la existencia de una deformación formal canónica $(C^\infty(\mathbb{R}^m)[[\hbar]], \star)$ del álgebra $(C^\infty(\mathbb{R}^m), \cdot)$ de las funciones suaves sobre $\mathbb{R}^m$. La solución que presenta Kontsevich en [2] se basa en ideas provenientes de la teoría de cuerdas. En 1949, Moyal [4] demostró la existencia de una deformación formal canónica $(C^\infty(\mathbb{R}^m)[[\hbar]], \star)$ del álgebra $(C^\infty(\mathbb{R}^m), \cdot)$ donde la estructura de Poisson sobre $\mathbb{R}^m$ posee coeficientes constantes, es decir

$$\alpha = \sum_{i,j} \alpha^{ij} \partial_i \wedge \partial_j, \quad \alpha^{ij} = -\alpha^{ji} \in \mathbb{R},$$

donde $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ es la derivada parcial en la dirección de x^i, $i = 1, \ldots, m$. El producto $\star$ de funciones f y g esta dado por la formula

$$f \star g = fg + \hbar \sum_{i,j} \alpha^{ij} \partial_i(f) \partial_j(g) + \frac{\hbar^2}{2} \sum_{i,j,k} \alpha^{ij} \alpha^{kl} \partial_i \partial_k(f) \partial_j \partial_l(g) + \ldots$$

Dada $\{\ ,\ \}$ una estructura de Poisson sobre $\mathbb{R}^m$ y G un subgrupo del grupo de permutaciones S_m, demostramos que si el corchete de Poisson sobre $(\mathbb{R}^m, \{,\})$ es G-equivariante, entonces el producto $\star$ existente sobre $C^\infty(\mathbb{R}^m)[[\hbar]]$ induce un producto $\star$ sobre el álgebra de las funciones simétricas $C^\infty(\mathbb{R}^m)^G[[\hbar]]$, la cual hemos denominado el álgebra de las *funciones simétricas cuánticas*. Esta álgebra se considera como la cuantización por deformación de la orbivariedad de Poisson $\mathbb{R}^m/G$.

2. Algunos resultados

1. Toda variedad de Poisson admite un producto estrella canónico. Para la variedad $(\mathbb{R}^m, \alpha)$ con bivector de Poisson α, el producto $\star$ esta dado mediante la expresión

$$f \star g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{n!} \sum_{\Gamma \in G_n} \omega_\Gamma B_{\Gamma,\alpha}(f, g),$$

   donde G_n es una colección de grafos admisibles con n ejes y ω_Γ son constantes independientes de la estructura de Poisson.

2. Sea {-,-} la estructura de Poisson sobre $\mathbb{R}^m$, y sea $K \subset S_m$ un subgrupo tal que {-,-} es K-equivariante. Entonces K actúa sobre $(C^\infty(\mathbb{R}^m)[[\hbar]], \star)$ por automorfismos.

3. La regla del producto sobre $(C^\infty((\mathbb{R}^m)^n)[[\hbar]], \star)_K$ está dada por

$$\overline{f} \star \overline{g} = \sum_{\sigma \in K} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{n!} \left(\sum_{\Gamma} w_\Gamma \overline{B_{\Gamma,\alpha}(f, g \circ \sigma^{-1})} \right) \tag{1}$$

   para todo $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^m)^n[[\hbar]]$.

Referencias

[1] R. Díaz and E. Pariguan, *Quantum symmetric functions*, Communications in Algebra® **33** (2005), no. 6, 1947–1978.

[2] M. Kontsevich, *Deformation quantization of poisson manifolds*, Letters in Mathematical Physics **66** (2003), no. 3, 157–216.

[3] Maxim Kontsevich, *Formality conjecture*, Deformation theory and symplectic geometry (Ascona, 1996), Math. Phys. Stud., vol. 20, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997, pp. 139–156.

[4] J. E. Moyal, *Quantum mechanics as a statistical theory*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **45** (1949), 99–124.

ESTADÍSTICA

Plenarias y semiplenarias

El razonamiento bayesiano en estudiantes universitarios: un estudio longitudinal

Gabriel Yáñez Canal* y Cindy Nathalia Morgado Hernández**

*Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, gyanez@uis.edu.co

**Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, cinathalia@gmail.com

Resumen

Se presentan algunos resultados de una investigación realizada para conocer el cambio en el razonamiento bayesiano en estudiantes universitarios en un curso semestral de estadística. Para esto se diseñaron tres cuestionarios que fueron aplicados en momentos diferentes durante el semestre. Con los resultados de las pruebas se realizó un análisis estadístico y cualitativo que permitió observar que, si bien los estudiantes responden mejor los problemas bayesianos inmediatamente después de haber estudiado la regla de Bayes, después de un tiempo las técnicas aprendidas se olvidan y renacen las intuiciones erradas y los manejos elementales aritméticos basados en la regla de tres.

1. Introducción

El razonaiento bayesiano, matemáticamente hablando, hace referencia al cálculo de probabilidades condicionales inversas, o de probabilidades a posteriori, a partir de probabilidades a priori, de la probabilidad de obtener los datos y de su verosimilitud. Este cálculo está claramente explícito en el así llamado teorema de Bayes, cuya presentación estándar es de la forma:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}.$$

La idea es que la ocurrencia del evento B está condicionada a la realización de algunos de los eventos A_j que se constituyen en una partición del espacio muestral. La idea es que B ocurrió y se indaga por la probabilidad de que haya sido A_i el causante de la ocurrencia de B. Es así que $P(A_I|B)$ es la probabilidad a posteriori en tanto que A_i es la probabilidad a priori, y los valores $P(B|A_i)$ son las verosimilitudes o probabilidad de que la causa de ocurrencia de B haya sido A_i.

La probabilidad condicional y, en particular, el teorema de Bayes, han sido objeto de muchas investigaciones en didáctica de la probabilidad que dan cuenta de algunas de las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión de estos temas. Ciertas investigaciones mostraron que los alumnos en su mayor parte no tienen en cuenta las probabilidades a priori en el cálculo de la probabilidad inversa (Kahneman y Tversky, 1972). Los estudiantes confunden el evento condicionante con el condicionado dando lugar a la falacia de la condicional transpuesta, es decir confunden

$P(A|B)$ con la $P(B|A)$ (Falk, 1986). Adicionalmente se interpreta la probabilidad condicional como una relación temporal, donde el suceso condicionante B siempre precede al suceso A (Gras y Totohasina, 1995) y las mayores fuentes de error es la confusión entre las probabilidades condicionales y las probabilidades conjuntas (Pollatsek y cols., 1987). A la hora de resolver problemas de probabilidad condicional la mayor cantidad de errores se producen en la identificación correcta de los sucesos condicionante, condicionado y sus probabilidades, así como en la correcta partición del espacio muestral (Díaz y de la Fuente, 2006).

Por otra parte, las investigaciones sobre el razonamiento bayesiano, así como de gran parte de la investigación en matemática educativa, han sido principalmente de corte transversal. De hecho, en la literatura revisada no se encontró ningún estudio longitudinal acerca del razonamiento bayesiano. Motivados por esta situación diseñamos una investigación que permitiera responder la siguiente pregunta: ¿Cómo cambia el razonamiento bayesiano en estudiantes universitarios que toman un curso de probabilidad y estadística? Precisamente en este trabajo se presentan algunos resultados obtenidos producto de una investigación dirigida a conocer los cambios que se presentan en el razonamiento bayesiano de estudiantes universitarios que cursan un primer curso de probabilidad y estadística. A continuación se describe la metodología implementada para luego dar lugar a la presentación de resultados y a las conclusiones.

2. Metodología

Con el fin de dar respuesta a la pregunta de investigación, se desarrolló un estudio longitudinal con estudiantes universitarios de ingeniería y ciencias de la salud que estaban realizando su primer curso de probabilidad y estadística. Se diseñaron tres cuestionarios con el fin de evaluar el razonamiento bayesiano de los estudiantes, aproximadamente se aplicó un cuestionario cada 5 semanas. Como la regla de Bayes incluye probabilidad condicional, probabilidad marginal, teorema de probabilidad total y regla del producto, los cuestionarios se elaboraron de tal forma que incluyeran ítems dirigidos a evaluar cada uno de estos conceptos. Para el primer cuestionario se tomaron 14 ítems del cuestionario diseñado por Díaz (2007) y se aplicó en la primera semana de clase en todos los cursos de estudiantes. El segundo cuestionario consta de 13 ítems y el tercero de 14 ítems.

La muestra constaba de 102 estudiantes de universidades, de los cuales 51 eran estudiantes de ingeniería ambiental, quienes estaban cursando la asignatura estadística para ingenieros en el cuarto semestre de su carrera; los restantes 51 estudiantes pertenecían a la Facultad de Salud (terapia ocupacional, fonoaudiología y bacteriología), quienes cursaban la asignatura de bioestadística I en el cuarto semestre de su carrera. El teorema de Bayes era un tema en ambos cursos. 42 estudiantes de estadística para ingenieros y 51 de bioestadística I respondieron el primer cuestionario; 50 de estadística para ingenieros y 42 de bioestadística respondieron el segundo cuestionario; el tercer cuestionario lo respondieron 34 estudiantes de bioestadística I y 51 estudiantes de ingeniería.

3. Resultados y Discusión

Se realiza el análisis descriptivo con el número de respuestas correctas dadas por los estudiantes de estadística para ingenieros y de bioestadística I. A cada estudiante se le asigna una calificación entre 0 y 14 en el primer cuestionario, de 0 a 13 en el segundo y de 0 a 14 en el tercero. En la Figura 10 se muestra un diagrama de la media del número de respuestas correctas de los estudiantes de estadística para ingenieros (Grupo A) y de bioestadística I (Grupo B) en cada uno de los momentos en que se aplicaron los cuestionarios.

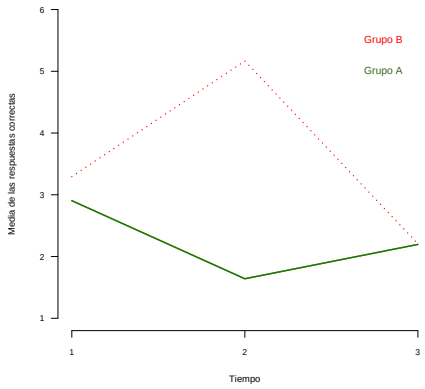


Figura 10: Diagrama de interacción de la media de las respuestas correctas y el tiempo para el curso E1

En la Figura 10 se observa que los estudiantes del bioestadística I (grupo B) mejoran ligeramente su rendimiento en el segundo cuestionario para luego decaer en el último, para el segundo momento los estudiantes acababan de recibir instrucción sobre los temas afines al teorema de Bayes. De otro lado, la media de las respuestas correctas de los estudiantes de estadística para ingenieros (grupo A) decae en el segundo momento y sube en el tercer momento que es precisamente cuando acaban de recibir instrucción sobre los temas afines al teorema de Bayes, la media en el tercer momento se encuentra ligeramente por debajo de la media del primer momento. Si bien esta comportamiento se puede considerar típico del rendimiento escolar, en el sentido de que los estudiantes hacen bien las cosas cuando las están estudiando pero que poco tiempo después empiezan a olvidarlas, ya no se explica tan bien que los resultados en el último momento sean peores que los obtenidos cuando no conocían los temas, como si la instrucción inhibiera las intuiciones primeras que permitieron obtener algunos éxitos en el primer cuestionario.

En el análisis de varianza para comparar las medias de los tres cuestionarios en los diferentes momentos, se realizó una prueba no paramétrica de Wilcoxon dado que el conjunto de datos no se ajusta a una distribución normal como arrojaron los resultados de la prueba de normalidad Shapiro-Wilk para cada uno de los momentos. Planteando la hipótesis nula que las medias de los tres cuestionarios en los diferentes momentos son iguales para los resultados del grupo de bioestadística I, con la prueba de Wilcoxon a un nivel de significancia del 0.05, se rechaza la hipótesis nula,

luego existen diferencias entre las medias de los momentos 1 y 2 ($p - valor = 0.008483$), 2 y 3 ($p - valor = 0.0003027$) y los momentos 1 y 3 ($p - valor = 0.0107$), esto reafirma estadísticamente lo observado en el diagrama de interacción, que las medias de los tres cuestionarios del grupo de bioestadística I son diferentes en cada momento. Igualmente se rechaza la hipótesis nula para las medias entre los momentos 1 y 2 ($p - valor = 0.009604$) del grupo de estadística para ingenieros, luego las diferencias entre las medias son estadísticamente significativas. Por el contrario, para los momentos 2 y 3 ($p - valor = 0.12$) y los momentos 1 y 3 ($p - valor = 0.1384$) no se rechaza la hipótesis nula, por lo tanto las medias de los cuestionario 2 y 3 son estadísticamente iguales, sucede lo mismo con las medias de los cuestionario 1 y 3. En otras palabras, las respuestas de los estudiantes del grupo de estadística para ingenieros no presentaron cambios notables entre el segundo y tercer momento, a pesar que para el tercer cuestionario ya habían recibido instrucción sobre los temas afines al teorema de Bayes y se esperaba que existiera una diferencia notable entre los resultados del primer cuestionario y el tercer cuestionario, lo cual no ocurrió.

De los 102 estudiantes, 58 de ellos presentaron los tres cuestionarios, 26 de estadística para ingenieros y 32 de bioestadística I. A continuación, en la Tabla 1 se muestra los resultados con los porcentajes de éxito según su contenido: probabilidad condicional, teorema de Bayes, probabilidad conjunta, teorema de probabilidad total y probabilidad marginal.

	Primer Cuestionario		Segundo Cuestionario		Tercer Cuestionario	
Cursos de Estadística	Bioestadística I	Estadística para Ingenieros	Bioestadística I	Estadística para Ingenieros	Bioestadística I	Estadística para Ingenieros
Probabilidad condicional	24 %	26 %	52 %	16 %	18 %	16 %
Teorema de Bayes	0 %	0 %	26 %	1 %	14 %	30 %
Teorema de Probabilidad Total	19 %	19 %	28 %	4 %	13 %	12 %
Probabilidad Conjunta	20 %	14 %	43 %	25 %		
Probabilidad Marginal	19 %	35 %	81 %	81 %		

Tabla 1: Porcentaje de respuestas correctas según el contenido de los ítems para los tres cuestionaros de los estudiantes de bioestadística I y estadística para ingenieros

Del cuadro 1 cabe destacar el considerable aumento en el porcentaje de respuestas correctas en todos los aspectos de los estudiantes de bioestadística I al pasar del cuestionario 1 al cuestionario 2, así como también el descenso, igualmente considerable, en el tercer cuestionario, en los aspectos evaluados en esta última prueba. El descenso también se dio respecto al primer cuestionario en los temas de probabilidad condicional y el teorema de probabilidad total. En el grupo de ingenieros el segundo cuestionario representó avances en los ítems relacionados con probabilidades marginales y conjuntas, temas que los estudiantes habían acabado de estudiar. Sin embargo, en los temas que requerían la coordinación e integración de estas probabilidades los porcentajes disminuyeron: en probabilidad condicional (de 26 % a 16 %), en el teorema de probabilidad total (19 % a 4 %), conservándose el mismo porcentaje, casi nulo, en los ítems relacionados con el teorema de Bayes. Respecto a este último, se presentó un significativo avance en el tercer cuestionario que fue realizado después de que los estudiantes lo habían estudiado en el salón de clase. Igual sucedió con el teorema de probabilidad total. Comparando el primer y último momento, los avances claros de este grupo se dieron en los ítems relacionados con el teorema de Bayes, en tanto que respecto a la probabilidad condicional y al teorema de probabilidad total las respuestas de carácter aritmético de la primera

prueba fueron más exitosas que los razonamientos basados en los modelos probabilísticos de la tercera prueba.

4. Conclusión

Los resultados permitieron observar, entre otras cosas, que si bien los estudiantes responden mejor los problemas bayesianos inmediatamente después de haber estudiado la regla de Bayes y los temas afines, después de un tiempo esta capacidad se reduce a niveles iguales o inferiores a los mostrados en el primer cuestionario cuando no habían estudiado esos temas. Una posible explicación a este fenómeno de olvido de las estrategias formales o gráficas para resolver problemas de probabilidad condicional se relaciona con la falta de ajuste de ellas con los esquemas que poseen los estudiantes y que se relacionan fundamentalmente con el manejo de los porcentajes y la utilización de proporciones utilizando la regla de tres. Con base a lo observado en esta investigación, nos atrevemos a conjeturar que una enseñanza que retome y asuma los porcentajes como herramienta fundamental en la resolución de problemas de probabilidad condicional podría rendir resultados exitosos.

Referencias

Díaz, C. (2007). Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Díaz, C. De la Fuente, I. (2006). Dificultades en la resolución de problemas que involucran el teorema de Bayes, un estudio exploratorio en estudiantes españoles de psicología. Educación matemática, 18, 75-94.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics. University of Victoria. 292-297.

Gras, R. y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. Recherches en Didactique des Mathématiques. 15 (1), 49-95.

Kahneman y Tversky (1972) Subjective probability: A judgment of representativeness. Cognitive Psychology 3, 430-454.

Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C. y Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. Organization, Behavior and Human Decision Processes, 40, 255-269.

¿Cómo modelamos estadísticamente respuestas entre cero y uno?

Guillermo Martínez Flórez

Universidad de Córdoba, Montería, Colombia. gmartinez@correo.unicordoba.edu.co

Resumen

Cuando los datos provienen de distribuciones con colas más o menos pesadas que la distribución normal o con alta asimetría, los procesos inferenciales suponiendo normalidad son inadecuados. Las distribuciones elípticas (t-student, Cauchy, logística, Pearson VII, etc.) son una alternativa para modelar el alejamiento del comportamiento de la distribución normal, pero son inadecuadas cuando la distribución es muy asimétrica. En este contexto, se han publicado diferentes trabajos con nuevas distribuciones asimétricas: Birnbaum (1950), Lehmann (1953), Roberts (1966), O'Hagan y Leonard (1976), Azzalini (1985), Fernández y Steel (1998), Mudholkar y Hutson (2000), Gupta et al. (2002), Arellano-Valle et al. (2004-2005) y Gómez et al. (2007).

Por otra parte, para modelar la tasa de desempleo, la proporción de votos a favor del presidente candidato a la reelección, proporción de hogares suscritos a un servicio de televisión por cable, proporción de pobres, proporción de madres solteras con hijos o la tasa de prevalencia de determinada enfermedad, entre otros ejemplos, se usan distribuciones de probabilidad con soporte en el intervalo $(0, 1)$. La distribución Beta por su dominio de definición cumple un buen papel en este tipo de situaciones prácticas, pero es inadecuada cuando la distribución de las observaciones es asimétrica. Ferrari y Cribari-Neto (2004) proponen el modelo de regresión Beta, útil cuando la variable de interés es continua y restringida al intervalo $(0, 1)$ y está relacionada con otras variables explicativas a través de una estructura de regresión. Extensiones de este modelo de regresión al caso de datos con soporte en los intervalos $[0, 1)$, $(0, 1]$ y $[0, 1]$ han sido estudiados por Ospina (2009).

En este trabajo implementamos otro tipo de distribuciones asimétricas para modelar datos con censura intervalar en $[0, 1]$. Extendemos los modelos Skew-Normal de Azzalini (1985) y Alpha-Potencia de Durrans (1992) a modelos doblemente censurados; estos nuevos modelos muestran buen desempeño cuando las observaciones muestrales presentan asimetría o curtosis por fuera del rango permitido por el modelo Tobit doblemente censurado.

Referencias

[1] Azzalini A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones. Scandinavian Journal of Statistics, 12, 171-178.

[2] Birnbaum Z.W. (1950). Effect of linear truncation on a multinormal population. Ann. Math. Statist., 21, 272-279.

[3] Durrans S.R. (1992). Distributions of fractional order statistics in hydrology. Water Resources Research, 28, 1649-1655.

[4] Ferrari S. and Cribari-Neto F. (2004). Beta regression for modelling rates and proportions. Journal of Applied Statistics, 31(7), 799-815.

[5] Lehmann E.L. (1953). The power of rank tests. Annals of Mathematical Statistics, 24, 23-43.

[6] O'Hagan A. and Leonard T. (1976). Bayes estimation subjectto uncertainty about parameter constraints. Biometrika, 63, 201-203.

[7] Ospina R. (2008). Modelo de regressão beta inflacionados. (Tese de doutorado em estatística)-Universidade de São Paulo.

[8] Roberts C.D. (1966). A correlation model useful in the study of twins. Journal of the American Statistical Association, 61, 1184-1190.

[9] Tobin J. (1958). Estimation of relationships for limited dependent variables. Econometrica, 26, 24-36.

Sobre la elasticidad de la distribución de Pareto y los salarios en Colombia

Edwin Javier Castillo Carreño

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia, edjcastilloca@unal.edu.co, ESTADÍSTICA

Resumen

En la estadística, la elasticidad es un término introducido hace poco tiempo y se propone como una herramienta para analizar modelos de riesgo e incertidumbre, además como herramienta para caracterizar distribuciones de probabilidad. La distribución de Pareto es una distribución propuesta para modelar los ingresos de una sociedad a partir de un valor, el mínimo recibido. En este documento partiendo del supuesto que los salarios en Colombia están modelados por una distribución de Pareto se encuentran las regiones de elasticidad e inelasticidad de dichos salarios y se muestra que la zona de elasticidad en este supuesto está debajo de la media.

1. Introducción

La distribución de la renta o de los ingresos fue propuesta por el economista Vilfredo Pareto en el año de 1897 [3], dicha distribución está definida a partir de dos parámetros, k y α, donde k es el valor mínimo que puede tomar las variables de la distribución y además es el valor que mayor probabilidad concentra, mientras que α es un parámetro de forma. Esta distribución ha sido estudiada y aplicada en diferentes ciencias, en el caso de la economía se pueden encontrar textos que exponen el índice de Gini y la curva de Lorenz para dicha distribución [2]; en 1971 Cramer [1] muestra que el parámetro de forma de dicha distribución para aplicaciones a los ingresos a nivel mundial se encuentra entre 1.6 y 2.1, este último valor para los países con menos inequidad en cuanto a la distribución de salarios.

En la economía la elasticidad de una variable ha sido utilizada como medio para cuantificar las variaciones que experimenta una variable ante cambios en otra, Veres y Pavía (2012) [5] han mostrado que la elasticidad de una función respecto a una variable, entendida como medida de la sensibilidad de la función frente a variaciones en el valor de la variable, puede también ser construida en el caso de que la función sea la de distribución de una variable aleatoria.

Ferrer y Pavia (2012) [4] muestran que la elasticidad también funciona para caracterizar distribuciones tanto continuas como discretas.

En este trabajo se usa la elasticidad como herramienta para el análisis de la sensibilidad de los valores de una función que modela los ingresos de los colombianos, partiendo del supuesto que dichos ingresos se modelan por una distribución de Pareto.

2. Definiciones

Definición 1. *Se dice que una distribución es de Pareto si tiene por función de densidad y función de distribución respectivamente.*

- $$f(x) = \frac{\alpha k^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}; x \geq k$$
- $$F(x) = 1 - \frac{k^{\alpha}}{x^{\alpha}}$$

La elasticidad de una distribución de probabilidad expresa la variación que experimenta la función de distribución ante variaciones de la variable aleatoria; esto es, cómo se comporta la acumulación de la probabilidad en el dominio de definición de la variable. La elasticidad de la distribución de una variable aleatoria (al contrario de lo que puede ocurrir en economía) nunca puede ser negativa, siendo esencialmente positiva. En efecto, al ser la probabilidad no negativa su acumulación es siempre no decreciente.

Definición 2. *Sea X una variable aleatoria continua . Denotando por F(x) a su función de distribución y mediante f(x) a su función de densidad, definimos la elasticidad de X como*

$$elas(x) = \frac{dLnF(x)}{dLnx} = \frac{|x|f(x)}{F(x)}$$

1. Si $elas(x) = 0$ hay inelasticidad absoluta
2. Si $elas(x) = 1$ hay elasticidad unitaria (un incremento de la variable da lugar a un incremento igual en la acumulación de probabilidad)
3. Si $0 < elas(x) < 1$ hay inelasticidad (un incremento de la variable NO implica un incremento considerable en la acumulación de probabilidad)
4. Si $elas(x) > 1$ hay elasticidad. (un incremento de la variable implica un incremento considerable en la acumulación de probabilidad)

3. Algunos resultados

De las anteriores definiciones se puede deducir que si X es una variable aleatoria que sigue una distribución de Pareto con parámetro de posición inuicial k y parámetro de forma α entonces su elasticidad viene dada por.

$$elas(X) = \frac{\alpha k^{\alpha}}{x^{\alpha} - k^{\alpha}}$$

Tipo de Elasticidad	Zona de Elasticidad
Inelasticidad Perfecta	$k \vee \alpha = 0$
Inelasticidad	$x > (\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}}k$
Elasticidad Unitaria	$x = (\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}}k$
Elasticidad	$x < (\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}}k$

Tabla 1: Zonas de Elasticidad de la Distribución de Pareto

Y por lo tanto las zonas de inelasticidad y elasticidad vienen dadas en la siguiente tabla.

Ahora, si se supone que la distribución de los salarios en Colombia sigue una distribución de Pareto, su parámetro de posición será dado por el salario mínimo legal vigente para el año 2013 (en escala de cientos de miles), es decir $k = 5.9$ y si se toma su parámetro de forma según Cramer 1973 [1] se puede definir este parámetro para $\alpha = (1.6), (1.8), (2.1)$, además si se tiene en cuenta que la media de la distribución de Pareto con parámetros k y α está dada por.

$$E(X) = \frac{k\alpha}{\alpha - 1}$$

se tiene para los parámetros propuestos está información:

Parámetro de forma	Region de Elasticidad	Region de Inelasticidad	Media
$\alpha = 1.6$	$5.9 < x < 10.72$	$x > 10.72$	15.73
$\alpha = 1.8$	$5.9 < x < 10.45$	$x > 10.45$	13.28
$\alpha = 2.1$	$5.9 < x < 10.11$	$x > 10.11$	15.73

Tabla 2: Elasticidad de la Distribución de los Salarios en Colombia

4. Conclusiones

Se muestra que mientras más pequeño sea el parámetro de forma más poca será la desigualdad en cuanto a la distribución de los salarios y de esta misma manera la zona de elasticidad estará más alejada de la media. La zona de elasticidad al estar por debajo de la media muestra que la acumulación de probabilidad para personas con salarios iguales o mayores a la media no cambiará así sus salarios aumenten o disminuyan en este intervalo, en cambio si los salarios aumentan o disminuyen en el intervalo $k < x < elas(x)$ la acumulación de probabilidad de dicha población va a tener un cambio drástico, esto puede pensarse como que una fluctuación en una sociedad es más representativa si se hace en una porción amplia de la población, (En este caso la cola pesada de la distribución). Además se deja como motivación el análisis de la elasticidad de una función de densidad para analizar y concluir de manera práctica y sencilla sobre problemas que se puedan presentar en cualquier sector.

Referencias

[1] Cramer J.S., *Empirical Econometrics*, North Holland (1971), .

[2] Jhonson N., & Kovs S., *Continuous Univarite Distribution*, John Wiley & Sons (1983), 573–614.

[3] Pareto V., *Course d' Economie Politique* , Paris (1897),.

[4] Veres F., & Pavia J., *La Elasticidad: Una Nueva Herramienta para Caracterizar Distribuciones de Probabilidad*, Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA. 13 (2012), 145–158.

[5] Veres F., & Pavia J., *On the Relationship Between The Reversed Hazard Rate and Elasticity*, Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA. 14 (2012), 110–123.

Un acercamiento histórico-didáctico al teorema de Bayes

Gabriel Yáñez Canal

Universidad Industrial de Santander
gyanez@uis.edu.co

Resumen

En este trabajo se realiza una presentación del razonamiento bayesiano, su significado, su deducción aritmética-intuitiva y su relación con el artículo *Essay towards solving a problem in the doctrine of chances* publicado en 1763, dos años después de la muerte de su autor: Thomas Bayes. La importancia del tema se refleja en las enormes aplicaciones que tiene este razonamiento y, más específicamente, al papel que juega la estadística bayesiana en la investigación científica, así como en las dificultades que enfrentan los estudiantes para su cabal comprensión ([1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8]).

El trabajo está organizado en dos partes: en la primera se describe el razonamiento bayesiano que no es otra cosa que la actualización de una probabilidad, creencia o grado de certeza con base en nueva información conocida. Ejemplifiquémoslo con una situación sencilla: Suponga que alguien está observando un jugador de baloncesto que realiza unos tiros libres y quiere asignarle una probabilidad a su capacidad de encestar. Como esa persona no sabe mayor cosa de ese jugador, resuelve actuar salomónicamente y asignarle igual probabilidad de acertar que de fallar. Acto seguido el jugador realiza dos lanzamientos y los convierte ambos. Estos resultados hacen que el observador cambie su probabilidad inicial y le conceda al jugador una mayor probabilidad de acertar, es decir, una probabilidad superior a 0,5. A la luz de los resultados observados, ¿Cuál es la nueva probabilidad de acierto del lanzador? La respuesta la da el muy conocido Teorema de Bayes que todo estudiante que haya tomado un curso de estadística a nivel universitario conoce.

En este trabajo se presenta una deducción aritmética intuitiva sustentada en los siguientes dos principios:

(1) Si acierta es más probable que sea un buen jugador y si es un buen jugador su probabilidad de acierto es más alta. En términos algebraicos expresamos este principio en términos de la siguiente relación de proporcionalidad donde la letra E hace referencia a Experto, o buen jugador:

$$\frac{P(E/Acierta)}{P(noE/Acierta)} \propto \frac{P(Acierta/E)}{P(Acierta/noE)} \quad (1)$$

(2) Entre mejor jugador sea, mayor será la probabilidad de que habiendo acertado sea un Experto, es decir, se tiene la siguiente proporcionalidad:

$$\frac{P(E/Acierta)}{P(noE/Acierta)} \propto \frac{P(E)}{P(noE)} \quad (2)$$

Con estos dos principios y un poco de aritmética se llega al siguiente resultado que no es otra cosa que el Teorema de Bayes, aunque su presentación no sea la más conocida, pero sí con mayor posibilidad de ser interpretada y recordada:

$$\frac{P(E/Acierta)}{P(noE/Acierta)} = \frac{P(Acierta/E)}{P(Acierta/noE)} \times \frac{P(E)}{P(noE)}$$

El problema que atacó Bayes, que se puede considerar el problema inverso a la Ley de los Grandes Números descrito por Bernoulli, fue el siguiente: dado el número de veces en las cuales un *evento desconocido* ha ocurrido o fallado, se requiere el chance de que la probabilidad de su ocurrencia en un simple ensayo caiga en algún lugar entre cualesquiera dos grados de probabilidad. Es decir, si al realizar un determinado número de repeticiones de un experimento, se conocen los resultados favorables y los no favorables a un evento, ¿cuál es su probabilidad de ocurrencia? Dicho en otras palabras, si conozco el pasado, ¿qué puedo decir del futuro? En el artículo se describen las proposiciones enunciadas y demostradas por Bayes que le permitieron llegar al resultado de este teorema que, si bien, en un principio no fue bien entendido y menos utilizado, en tiempos posteriores dio lugar en el siglo XX a la creación de lo que hoy se llama estadística bayesiana y que ha demostrado ser una herramienta muy útil para resolver variados tipos de problemas.

Referencias

[1] Díaz, C. De la Fuente, I. (2006). Dificultades en la resolución de problemas que involucran el teorema de Bayes, un estudio exploratorio en estudiantes españoles de psicología. *Educación matemática*: Vol.18, 75-94.

[2] Estrada, A., Díaz, C., De la Fuente, I. (2005). Un estudio inicial de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en alumnos universitarios. X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. En P. Bolea, M.J. Gonzáles y M. Moreno (Eds.). Huesca, España, p. 277-284.

[3] Falk, R. (1986). *Conditional probabilities: insights and difficulties.* II International Conference on Teaching Statistics. En R. Davidson y J (Eds.). Victoria, Canadá, p. 292–297.

[4] Lonjedo, M.A. (2007*). Análisis de los problemas ternarios de probabilidad condicional de enunciado verbal y de sus procesos de resolución*. Tesis doctoral publicada en la Universidad de Valencia. España.

[5] Pollatsek, A., Well, A., Konold, C. & Hardiman, P. (1987). *Understanding Conditional Probabilities*. Organization Behavior and Human Decision Processes, 40, 255-269.

[6] Yáñez, G. (2001). El álgebra, las Tablas y los Árboles en Problemas de Probabilidad Condicional. *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro.* En Gómez, P., y Rico, L. Granada, España, p. 355-37.

[7] Yáñez, G. (2003). *Estudios sobre el papel de la simulación computacional en la comprensión de las secuencias aleatorias, la probabilidad y la probabilidad condicional.* Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

[8] Yáñez, G., Rátiva, A.M., Lozano, D.P. (2013). Efecto de los formatos y el tipo de información en la resolución de problemas de probabilidad condicional. En Audy Salcedo (ed.) *Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas, p. 31-50.* Universidad Central de Venezuela. Venezuela.

ESTADÍSTICA

Cursillos

Análisis de datos: metodología y práctica

Julio M. Singer

Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo.

Resumen

Consideramos tres problemas prácticos y los analizamos siguiendo los siguientes pasos:

1. Definición operacional del problema.
2. Análisis descriptivo.
3. Adopción de un modelo probabilístico.
4. Especificación de los objetivos en términos de los parámetros del modelo probabilístico.
5. Estrategia y especificación de la metodología de análisis.
6. Implementación computacional.
7. Presentación de los resultados.

Los problemas a ser trabajados son:

A) Utilización de modelos lineales mixtos para evaluar la necesidad de realizar un análisis en triplicado para la estimación de la cantidad esperada de aceites esenciales en el zumo de limón.

B) Utilización de regresión logística para evaluar la asociación entre posibles factores de riesgo y la obstrucción coronaria.

C) Utilización de modelos binomiales negativos para el muestreo de agua de lastre de buques.

Referencias

- Agresti, A. (1995). **Introduction to the Analysis of Categorical Data**. New York: Wiley.

- Kutner, M.H., Neter, J., Nachtsheim, C.J. and Li, W. (2004). **Applied Linear Statistical Models, 5th ed.** New York: McGraw-Hill/Irwin. ISBN-10: 007310874X, ISBN-13: 978-0073108742.
- Paulino, C.D. e Singer, J.M. (2006). **Análise de Dados Categorizados**. São Paulo: Edgard Blücher. ISBN: 8-521-20392-6, http://www.blucher.com.br/livro.asp?Codlivro=03926.
- Poleto, F.Z. (2006) Análise de dados categorizados com omissão. Dissertação de mestrado. Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo. (Prêmio Associação Brasileira de Estatística 2008)

  http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45133/tde-04122007-192457.
- Singer, J.M., Lima, A.C.P., Tanaka, N. and González-López, V.A. (2007). To triplicate or not to triplicate? **Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, 86**, 82-85, doi:10.1016/j.chemolab.2006.08.008.

Reflexiones y "Tips" sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la estadística

Roberto Behar Gutiérrez

Escuela de Estadística, Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Resumen

Es ampliamente conocido, que la actitud generada en el estudiante por los cursos de estadística en todos los niveles de formación está muy lejos de la deseable. En ocasiones los estudiantes sienten que son exigidos demasiado, pero que al final el resultado del aprendizaje es algo confuso, que difícilmente pueden ligar con sus conocimientos previos con los cuales están familiarizados. Dependiendo de la vocación del docente, el curso puede tener mucho parecido con un curso de matemática, o convertirse en curso donde aprenden a calcular cosas. En ocasiones, desde el principio empezamos con los árboles y dejamos de lado el bosque. Damos desarrollo a un programa de contenidos lineal, orientado más a las herramientas que a la solución de problemas o a responder preguntas de interés.

El profesor es solo una componente de este sistema complejo que es el proceso de enseñanza-aprendizaje, el estudiante, no obstante que no haya tenido ningún curso formal en estadística, no viene vacío a la primera clase, el ha tenido que enfrentar de manera permanente situaciones de incertidumbre y ha desarrollado sus propios mecanismos y estrategias para tomar decisiones cuando le ha correspondido. Nosotros, los profesores con nuestras estrategias y el "nuevoçonocimiento, debemos competir con las que tiene el estudiante y que le han ayudado a sobrevivir hasta ahora. Esta competencia es difícil e injusta y en ella tenemos alta probabilidad de salir derrotados, a pesar de los esfuerzos del profesor. En este cursillo, reflexionaremos sobre estos aspectos y sobre algunas opciones para ganar la motivación del estudiante, requisito indispensable para un aprendizaje significativo.

Es una oportunidad para intercambiar experiencias y hacernos conscientes de la complejidad de la problemática del proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística, pero al mismo tiempo mostrando algunos caminos que podrían ser abordados para aumentar la probabilidad de éxito.

Modelamiento conjunto de datos longitudinales y tiempo para un evento mediante un modelo de riesgo aditivo-multiplicativo

Luis Guillermo Díaz Monroy

Departamento de Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Resumen

Los datos longitudinales y el tiempo para la ocurrencia de un evento se observan en áreas como la salud pública, la medicina, ingeniería, economía, entre otras. Generalmente, estas observaciones, longitudinales o de sobrevida, se registran sobre una misma unidad junto con algunas covariables (dependientes del tiempo o no) que pueden afectar a las primeras. Por ejemplo, un marcador biológico que es sensible y específico para la presencia de un tumor, su metástasis o la muerte del paciente que lo posee, es seguido durante el tiempo de tratamiento del paciente para ese cáncer. Algunas covariables tales como el sexo, edad, peso o tamaño del tumor, el tipo de tratamiento, son registradas sobre cada uno de los pacientes considerados en este estudio. Así, el comportamiento del marcador es observado en diferentes momentos o tiempos y durante el tiempo de seguimiento del cáncer.

En estos estudios se consideran, fundamentalmente, tres grupos de variables, las cuales dan una estructura a los datos registrados directamente sobre cada unidad. El primer grupo de variables está conformado por los datos longitudinales (o medidas repetidas) de una o más variables observadas durante el tiempo de estudio (por ejemplo, el marcador); un segundo grupo lo constituyen las observaciones del tiempo hasta la ocurrencia de un evento (por ejemplo, tiempo para la reaparición del tumor), y, el tercer grupo corresponde a la información contenida en las covariables (por ejemplo, sexo, edad) registradas sobre cada participante en el estudio.

Estas medidas son registradas sobre la misma unidad o sujeto, en consecuencia, se debe evidenciar alguna correlación entre estas. El interés se dirige a adaptar modelos de riesgo aditivos-multiplicativos que incluyan y muestren la posible de-pendencia entre estos tres grupos de variables; este es el objetivo central de este trabajo.

Diseños de experimentos con arreglos factoriales. Una visión desde la teoría normal y no normal

Luis Alberto López Pérez

Departamento de Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Resumen

El Diseño de Experimentos tuvo su inicio teórico a partir de 1935 por Sir Ronald A. Fisher, quién sentó la base de la teoría del diseño experimental y a la fecha se encuentra ampliamente desarrollada. Las aplicaciones del Diseño de Experimentos se encuentran en la mayoría de las ciencias naturales, médicas, ingenierías y las ciencias sociales. Los desarrollos modernos son múltiples: como son los modelos para datos correlacionados, los modelos de sobredispersión y los modelos de dependencia.

En este minicurso estudiaremos los principios generales de la estadística experimental; la visión inicial de los experimentos factoriales; factoriales simétricos; factoriales fraccionados bajo normalidad; arreglos factoriales no normales dentro del contexto de los Modelos Lineales Generalizados y los modelos con respuesta Beta. Ejemplos y Aplicaciones será presentados y desarrollados en este minicurso.

ESTADÍSTICA

Ponencias

Medidas de asociación para variables aleatorias por medio de cópulas

Magda Carolina Guevara Muñoz

Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia, mcguevaram@correo.udistrital.edu.co

Resumen

Las cópulas son una herramienta que se utiliza para describir la dependencia entre variables aleatorias, por tal razón es importante conocer el papel que adoptan las cópulas en el estudio de la dependencia y cual es la relación que guardan con los conocidos coeficientes no paramétricos de dependencia, rho de Spearman y tau de Kendall, ambos relacionados a una forma de dependencia conocida como concordancia.

1. Introducción

La palabra cópula es un sustantivo que viene del latín que significa "vinculo o lazo" y fue usada por primera vez en un sentido matemático por Abe Sklar en 1959, quien resolvió algunos problemas estudiados por Fréchet [4] sobre la relación entre una función de distribución de probabilidad multidimensional y sus marginales de menor dimensión [3]. Sklar desarrolló gran parte de la teoría con el extraordinario teorema que lleva su nombre y conduce al análisis de la estructura de dependencia de variables aleatorias, a partir de su distribución conjunta sin tener en cuenta las distribuciones marginales [2]. Sin embargo, el comienzo de todos los resultados concernientes a cópulas, fueron obtenidos en el desarrollo de la teoría de los espacios métricos probabilísticos estudiados por Abe Sklar y Berthold Schweizer. A medidos de los años 70 el interés de la comunidad estadística por este tema surge cuando Schweizer y Wolff [9], inician el estudio de la dependencia entre variables aleatorias, además de discutir y modificar los criterios de Rényi [8] sobre las medidas de dependencia entre pares de variables aleatorias. Durante varios años más, el capítulo 6 del libro fundamental [10], dedicado a la teoría de los espacios métricos probabilísticos fue la principal fuente de información sobre las cópulas [1]. En 1990, Dall'Aglio organizó la primera conferencia dedicada a cópulas, acertadamente llamadas "Distribuciones de probabilidad con marginales dadas". Este resultó ser el primero de una serie de conferencias que ayudó en gran medida el desarrollo del campo, ya que cada uno de ellos ofreció la oportunidad de presentar los resultados y aprender de otros investigadores, estas fueron realizadas en Seatle-1993, Praga-1996, Barcelona-2000, Québec-2004, Tartu-2007 y Sao Paulo en el 2010 [5]. En 1997 Joe publica el libro Multivariate models and dependence concepts [6] con un capítulo dedicado a cópulas y en 1999 Nelsen publica su primera edición del libro An Introduction to Copulas [7].

2. Cópulas

Pensemos en un par de variables aleatorias X e Y con funciones de distribución $F(x) = P[X \leq x]$ y $G(y) = P[Y \leq y]$, respectivamente, y una función distribución conjunta $H(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y]$. Para cada par de números reales (x, y) podemos asociar tres números: $F(x)$, $G(y)$, y $H(x, y)$. Nótese que cada de estos números se encuentra en el intervalo $[0, 1]$. En otras palabras, cada par (x, y) de números reales conduce a un punto $(F(x), G(y))$ en el cuadrado de la unidad $[0, 1] \times [0, 1]$, y este par ordenado, a su vez corresponde a un número $H(x, y)$ en $[0, 1]$.

Definición 1. *Una cópula es una función* $C : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ *que satisface las siguientes condiciones:*

1. $C(u, 1) = u;\ C(1, v) = v.$
2. $C(u, 0) = 0 = C(0, v).$
3. *Para todo* $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1]$, *tal que* $u_1 \leq u_2$ *y* $v_1 \leq v_2$.
   $V_C([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) = C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0.$

Teorema 2 (Teorema de Sklar)**.** *Sean* X *e* Y *variables aleatorias con función de distribución conjunta* H *y funciones de distribución marginal* F *y* G, *respectivamente. Entonces existe una cópula* C *tal que*

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) \tag{1}$$

para todo x, y *en* R. *Si* F *y* G *son continuas, entonces* C *es única. De lo contrario, la cópula* C *se únicamente determina en* $Ran(F) \times Ran(G)$.

Inversamente, si C *es una cópula y* F *y* G *son funciones de distribución, entonces la función* H *definida por (1) es una función de distribución conjunta con marginales* F *y* G.

3. Medidas de asociación

Las cópulas son en sí mismas una caracterización de la dependencia de un par de variables aleatorias (X,Y), por lo que tendría sentido usarlas para medir cuál sería ese grado de dependencia. El término medida de asociación está reservado para medidas más generales, como el tau de Kendall y rho de Spearman.

Observación 3. *Intuitivamente, a un par de variables aleatorias se les denomina* ***concordantes*** *si "grandes" (respectivamente "pequeños") valores de una de las variables tienden a estar asociados con "grandes" (respectivamente "pequeños") valores de la otra.*

Definición 4. *Sean* (x_i, y_i) *y* (x_j, y_j) *dos observaciones de un par de variables aleatorias absolutamente continuas* (X, Y). *Entonces,* (x_i, y_i) *y* (x_j, y_j) *son concordantes si* $x_i < x_j$ *y* $y_i < y_j$ *,o si* $x_i > x_j$ *y* $y_i > y_j$. *De manera análoga,* (x_i, y_i) *y* (x_j, y_j) *son discordantes si* $x_i < x_j$ *y* $y_i > y_j$ *, o si* $x_i < x_j$ *y* $y_i > y_j$.

Definición 5. *Decimos que* (x_i, y_i) *y* (x_j, y_j) *son concordantes si* $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ *y que son discordantes si* $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$.

Definición 6 (τ de Kendall)**.** *Sean* (X_1, Y_1) *y* (X_2, Y_2) *vectores aleatorios independientes e igualmente distribuídos en* $\mathbb{R}^2$ *con función de distribución común conjunta* F*, entonces* τ *de Kendall está definido como la probabilidad de concordancia menos la probabilidad de discordancia. Esto es [6]:*

$$\rho_\tau(X, Y) = P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0). \tag{2}$$

Como τ *de Kendall es invariante a transformaciones estrictamente crecientes, el siguiente teorema ofrece una expresión de este coeficiente en términos de cópulas.*

Teorema 7. *Sean* X *e* Y *variables aleatorias continuas cuya cópula es* C*. Entonces el coeficiente de* τ *de Kendall para* X *e* Y *,* $\rho_\tau(X, Y)$ *está dado por:*

$$\rho_\tau(X, Y) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1. \tag{3}$$

Definición 8 (ρ de Spearman)**.** *Sean* X *e* Y *dos variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta* H *y funciones de distribución marginales* F *y* G *respectivamente. Se define el coeficiente de correlación de Spearman entre* X *e* Y *,* $\rho_S(X, Y)$ *de la siguiente manera:*

$$\rho_S(X, Y) = \rho(F(X), G(Y)), \tag{4}$$

donde ρ *es el coeficiente de correlación de Pearson.*

Teorema 9. *Sean* X *e* Y *variables aleatorias absolutamente continuas con marginales* $F(x)$ *y* $G(y)$ *respectivamente y cópula asociada* C *entonces el coeficiente de correlación de Spearman para* X *e* Y $\rho_S(X, Y)$*, está dado por:*

$$\rho_S(X, Y) = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v)\, du dv - 3.$$

Referencias

[1] Blanco L. & Moreno D., *Metodología para seleccionar una cópula arquimediana óptima*, Universidad Nacional de Colombia, Bogota. Tesis (2012).

[2] Bouyé, E., *Copulas for Finance, A Reading guide and some applications.*, Financial Econometrics Research centre (2000).

[3] Escarela G. & Hernández A., *Modelado de parejas aleatorias usando cópulas*, Revista Colombiana de Estadística 32, (2009) 33-58.

[4] Fréchet M., *Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données*, Ann. Univ. Lyon. 14 (1951), 53–77.

[5] Jaworski P. & Durante F. , *Copula Theory and Its Applications*, Lecture notes in Statistics. Springer (2009), 5–7.

[6] Joe H., *Multivariate models and dependence concepts*, Monographs on Statistics and Applied Probability,73 Chapman & Hall, London. (1997).

[7] Nelsen R. B. , *An Introduction to Copulas*, Series in Statistics, Springer, New York. (2006).

[8] Rényi, A. , *On measures of dependence*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 10 (1959), 441–451.

[9] Schweizer B. & Wolff E.F., *On nonparametric measures of dependence for random variables*, Ann. Statist. 9 (1981), 870–885.

[10] Schweizer B. & Sklar A. , *Probabilistic metric spaces*, North-Holland Series in Probability and Applied Mathematics, North-Holland Publishing Co., New York. (1983)

Importancia de la versión de Lindeberg-Lévy en la enseñanza del Teorema Central del Límite a estudiantes de ingeniería

Jhon Jairo León Salazar

Departamento de Matemáticas, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia.

1. Introducción

Entre todas las versiones del Teorema Central del Límite existe una muy especial que es la versión propuesta por Lindeberg y Lévy. Es especial en el contexto de la enseñanza de éste tema a estudiantes de ingeniería. La demostración del teorema usando la función característica de la variable aleatoria involucrada es un elemento definitorio desde el punto de vista didáctico. En ésta demostración se utilizan elementos teóricos muy importantes como la función característica de una variable aleatoria, las propiedades de esperanza matemática y los principios de convergencia en distribución de variables aleatorias. Por otro lado la versión de Lindeberg y Lévy es la que mejor se adapta a las aplicaciones del teorema central del límite en el contexto de las ingenierías.

2. Conceptos preliminares

Antes de enunciar y demostrar el teorema de Lindeberg-Lévy, presentaremos unos conceptos preliminares que el estudiante debe conocer muy bien.

2.1. Una propiedad de la esperanza matemática

Si $\{X_n, n \geq 1\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, entonces

$$E\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \sum_{k=1}^{n} E(X_k).$$

2.2. La función característica

1. La función característica de una variable aleatoria X se define así:

$$\Phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX}\, dF(X),$$

donde $F(\cdot)$ es la función de distribución de X.

2. Si X y Y son variables aleatorias independientes, entonces:

   a) $\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t) \cdot \Phi_Y(t)$.

   b) $\Phi_{aX}(t) = \Phi_X(at)$, donde a es una constante.

2.3. Convergencia en distribución

Una sucesión de variables aleatorias, $\{X_n, n \geq 1\}$, converge en ley o en distribución a una variable aleatoria X, cuando se cumpla alguna de las siguientes condiciones, con el convencimiento de que si se cumple una se cumplirán las restantes:

1. Si para toda función real g se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} E\left[g(x_n)\right] = E\left[g(x)\right].$$

2. Si para todo número real t se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} E\left[e^{tx_n}\right] = E\left[e^{tx}\right].$$

3. Si para todo par de puntos a y b, con $b > a$ se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} P(a < x_n < b) = \lim_{n\to\infty} \left[F_{x_n}(b) - F_{x_n}(a)\right] = P(a < x < b) = F_x(b) - F_x(a).$$

4. Si para todo punto de X en el que las funciones de distribución de las variables de la sucesión sean continuas, se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x),$$

   de esta forma se interpreta que la variable aleatoria X_n converge en distribución o converge en ley a la variable aleatoria X y se denota

$$X_n \xrightarrow{d} X$$

   cuando en el límite el comportamiento de la función de distribución de la sucesión de variables aleatorias y la de aquella a la que converge son iguales.

2.4. Teorema de continuidad de Lévy

Si la sucesión de funciones de distribución $\{F_n(X), n \geq 1\}$ converge en todo punto de continuidad a la función de distribución $F(X)$, entonces la sucesión $\{\Phi_n(t), n \geq 1\}$ de las correspondientes funciones características de las $F_n(X)$ para $n \to \infty$, converge en distribución a la función característica $\Phi(t)$ en $t = 0$, correspondiente a la función de distribución $F(X)$[1].

Nota: Este teorema se demuestra a partir del *Teorema de Helly*.

[1] Tomado y adaptado de [3].

Estos elementos hacen parte de las clases que ha recibido los estudiantes de ingeniería previo a la presentación del Teorema Central del Límite. La versión del Teorema de Lindeberg-Lévy es como se presenta a continuación:

3. Teorema de Lindeberg-Lévy

Sea $\{X_n, n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con esperanza matemática $E(X_k) = \mu$ y varianza $Var(X_k) = \sigma^2$, entonces la variable aleatoria

$$S_n^* = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\right) \xrightarrow{d} Z_n,$$

donde $Z_n \sim N(0,1)$.

Demostración: Como se observará en la demostración, la misma se dividirá en partes con un objetivo didáctico. El estudiante podrá con la asesoría de su profesor ir construyendo la demostración paso a paso.

Parte I:

Definamos ante todo algunas herramientas, como por ejemplo:

1. Si $\Phi_X(t) = E\left[e^{itX}\right]$, entonces $\Phi_{X-\mu}(t) = E\left[e^{it(X-\mu)}\right]$.
2. Un polinomio de Taylor para $\Phi_{X-\mu}(t)$ alrededor de $t = 0$ es:

$$\Phi_{X-\mu}(t) = \Phi_{X-\mu}(0) + \Phi'_{X-\mu}(0)t + \frac{1}{2}\Phi''_{X-\mu}(\xi)t^2, \tag{1}$$

con $0 < \xi < t$ y donde se sabe por definición que $\Phi_{X-\mu}(0) = 1$.

Ahora, se tiene que:

$$\Phi'_{X-\mu}(t) = E\left[i(X-\mu)e^{it(X-\mu)}\right],$$

luego

$$\Phi'_{X-\mu}(0) = E\left[i(X-\mu)\right] = i\left[E(X) - \mu\right] = 0.$$

Por lo tanto (1) queda así:

$$\Phi_{X-\mu}(t) = 1 + \frac{1}{2}\Phi''_{X-\mu}(\xi)t^2.$$

Si restamos y sumamos a esta expresión el término $\sigma^2 t^2/2$, se obtiene:

$$\Phi_{X-\mu}(t) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\Phi''_{X-\mu}(\xi) + \sigma^2\right)t^2. \tag{2}$$

Parte II:

Por otra parte analicemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\Phi_{S_n^*}(t) &= E\left[\exp\left\{\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu\right)\right\}\right] \\ &= E\left[\exp\left\{\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\left(X_1-\mu\right)\right\}\right]\cdot E\left[\exp\left\{\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\left(X_2-\mu\right)\right\}\right] \\ &\cdots E\left[\exp\left\{\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\left(X_n-\mu\right)\right\}\right].\end{aligned}$$

Dado que las X_k son todas independientes e idénticamente distribuidas, entonces:

$$\begin{aligned}\Phi_{S_n^*}(t) &= E\left[\exp\left\{\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\left(X_1-\mu\right)\right\}\right]^n \\ &= \left[\Phi_{\frac{X-\mu}{\sigma\sqrt{n}}}(t)\right]^n \\ &= \left[\Phi_{X-\mu}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n.\end{aligned}$$

Luego de (2) se puede obtener:

$$\Phi_{X-\mu}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\Phi''_{X-\mu}(\xi)+\sigma^2\right)\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2.$$

La expresión anterior, cuando $n\to\infty$ se puede escribir así:

$$\Phi_{X-\mu}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{t^2/2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Parte III:

Finalmente,

$$\Phi_{S_n^*}(t) = \left[1 - \frac{t^2/2}{n}\right]^n = \left[1 + \frac{-t^2/2}{n}\right]^n$$

Aplicando el teorema de continuidad de Lévy, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_{S_n^*}(t) = \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{-t^2/2}{n}\right]^n = e^{-t^2/2} = \Phi_Z(t),$$

donde $\Phi_Z(t)$ es la función de distribución de una variable aleatoria normal de media cero y varianza uno.

De ésta manera queda demostrado el teorema de Lindeberg-Lévy. La demostración dividida en tres partes hacen que el estudiante la construya paso a paso haciendo uso de una buena cantidad de conceptos previos a este tema.

4. Muestra de Ejercicios

Se presenta en esta sección una muestra de algunos ejercicios para trabajar la aplicación del Teorema Central del límite[2].

1. El peso de una persona que utiliza el ascensor del aulario es una variable aleatoria con media $75kg.$ y varianza $100kg^2$. Si suben 33 personas, seleccionadas al azar, en el ascensor, calcular la probabilidad de que no se supere el peso máximo de $2500kg$.

2. Se sabe que el número de personas que visitan el IVAM a lo largo de cualquier semana sigue una distribución con media 4.750 personas y desviación típica 2.500 personas. Calcular la probabilidad de que el número de visitantes en un año (52 semanas) esté comprendido entre 250.000 y 275.000 personas. Indicar claramente que supuestos se deben asumir para calcular esa probabilidad.

3. El número de unidades vendidas diariamente en un comercio de un determinado electrodoméstico se puede representar mediante una variable aleatoria con distribución de Poisson de media 1.1. Calcular la probabilidad de que el número de unidades vendidas de este electrodoméstico a lo largo 110 días no supere la cifra de 143.

4. Según el titular de un periódico, el 33 % de los inmigrantes llegados en 2003 a nuestro país consiguieron legalizar su situación. Calcula la probabilidad de que de 1000 inmigrantes recién llegados, al menos 300 consiguieran regularizar su situación. Indica claramente qué supuestos se deben asumir para calcular dicha probabilidad.

5. Se sabe que en una ciudad, el 30 % de los hogares ven la televisión mediante el sistema de TDT (televisión digital terrestre). Si se selecciona aleatoriamente 200 hogares de esa ciudad, Â¿cuál es la probabilidad de que el número de hogares que ven la televisión mediante TDT esté comprendido entre 50 y 70? (Indica claramente los supuestos que sea necesario asumir para calcular la probabilidad).

6. Se considera que el número diario de ejemplares vendidos de una determinada publicación en un quiosco es una variable aleatoria que se distribuye según una Poisson de media 30. El precio de venta de cada ejemplar es de 1,3 euros. Obtener, razonadamente, la probabilidad de que en los próximos 40 días los ingresos por la venta de ejemplares superen los 1625 euros. Indique todos los supuestos que sea necesario asumir para obtener dicha probabilidad.

7. La demanda diaria de cierta marca de refresco en litros, se puede representar mediante una variable aleatoria X de media 3000 litros y de varianza 8100.

   a) Obtén razonadamente, la probabilidad de que el total de litros demandados en 100 días éste entre 298000 y 301800 litros. Indique todos los supuestos que sea necesario asumir para obtener dicha probabilidad.

   b) Calcula la producción de litros de refresco en 100 días, para atender la demanda total con probabilidad 0,99.

[2]Tomado de [7].

Referencias

[1] Blaiotta, Jimena. Delieutraz, Pablo. *Teorema Central del Límite*. Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, 30 de julio de 2004.

[2] Canavos, George. *Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y métodos*. McGrawHill, Interamericana de México. México, 1988.

[3] Ferriero, Alessandro. *NOTAS DEL CURSO DE PROBABILIDAD II*. Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, Campus de Cantoblanco. 28049 Madrid.

[4] Martínez de Lejarza, Ignacio. De Lejarza, Juan Martínez. *Inferencia*. Open Curse Ware, Universidad de Valencia. España, 2010.

[5] Martínez Gómez, Mónica. Marí Benlloch, Manuel. *Utilización Práctica del Teorema Central del Límite*. Universidad Politécnica de Valencia. España, 2010.

[6] MAYORGA J. H. *Inferencia Estadística* Universidad Nacional de Colombia, 2004.

[7] MURGUI, J.S. *Ejercicios de Estadística: economía y ciencias sociales*. Tirant lo Blanch, Valencia, 2002.

Análisis de una red social de Facebook a través de la Teoría de Grafos y de algunas Medidas de Centralidad

Yeimy Andrea Castro Quintero

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia, jeimy_andrea92@hotmail.com

Resumen

Se quiere realizar el análisis de las relaciones o conexiones existentes entre un grupo de amigos de la red social Facebook, determinando algunas medidas de centralidad, a saber: centralidad de grado, centralidad de Bonacich y centralidad de vector propio. La Teoría de grafos es la herramienta principal para el análisis grafico de dicha red y el Software Ucinet, el cual tiene las planillas NetDraw y Spreadsheet, que ayudan a la elaboración y posterior análisis de las redes representadas por grafos. Las medidas de centralidad determinan la importancia, una más que otra, de los entes involucrados (amigos), en la red de amistad que constituyen.

1. Introducción

Facebook se ha constituido como una de las redes sociales más influyentes en todo el mundo y como el medio de comunicación popular en donde se comparte información relacionada con las actividades de los usuarios o de los grupos; ya que en esta red social es posible ver las relaciones de amistad, entre otras, de algunos usuarios (especialmente amigos), la unidad de análisis es un grupo de 30 personas que comparten algunas características sociales.

La teoría de grafos, una de las partes más relevantes de la matemática discreta [1] que se ha venido constituyendo como una herramienta útil para la resolución de problemas, desde el surgimiento de esta disciplina (problema de los 7 puentes de Königsberg); hasta el día de hoy cuando se han creado varios software para la construcción de los grafos y el análisis de estos como lo es NetDraw, a partir de matrices de datos creadas o transformadas en Ucinet y su planilla Spreadsheet.

El análisis, de la red de amigos de Facebook, se hará por medio de algunas medidas de centralidad como lo son centralidad de grado, centralidad de Bonacich y centralidad de vector propio.

Algunos resultados y experiencias de este escrito son la base para el desarrollo de algunos proyectos en donde se quiere hacer el estudio de la producción bibliográfica colombiana de ciencias representada en las bases Web of Knowledge y Scopus mediante los grafos, medidas de centralidad y otros métodos de análisis presentes en el Software Ucinet.

2. Grafos

Rosen, K. (2012): "Un dígrafo (V, E) consiste en un conjunto no vacío de vértices V y un conjunto de arcos o nodos E. Cada arista dirigida está asociada con un par ordenado de vértices. Las aristas dirigidas asociadas con el par ordenado (u, v) se dice que comenzará en u y terminará en v."

3. Medidas de Centralidad

La centralidad de una red, en los años 60 y 70, se basaba en que "debería indicar la tendencia de un único punto a ser más central que otros puntos de la red" (Freeman, 2000, p.131), que ha venido evolucionando con los estudios realizados.

Por ejemplo, Albornoz, M. & Alfaraz, C., afirman que:

Se refiere a la posición de los nodos en las redes, las medidas de centralidad asignan el valor más elevado a la estructura en estrella o rueda, y el valor mas bajo al grafo completo en donde todas las aristas posibles están presentes, puesto que todos los nodos en ese grafo son homogéneos en todos los aspectos. (p. 15).

1. Centralidad de grado (degree centrality).

   En términos de grafos la centralidad de grado es el número de aristas que conectan a un nodo con otros, por lo tanto los nodos más conectados, con otros, se consideran como los más centrales; en cuanto al análisis de red sociales, es considerado como la capacidad o intercambio de comunicación entre los entes estudiados, es decir, la cantidad de aristas que conectan a nodo sin tener en cuenta su capacidad de control sobre estas redes de comunicación. (Monsalve, 2008, p. 3)

   $$c_G(n_i) = \sum_{i=1}^{N} g(n_i),$$

   donde: C: centralidad y n_i: nodo específico, $i = 1, 2, \ldots, N$.

2. Centralidad de Bonacich (Bonacich's $c(\beta)$).

   Adquiere este nombre ya que su creador es Bonacich. Esta medida de centralidad está relacionada con la acción de contar los caminos, pero cuando hay caminos infinitos, porque en el grafo hay ciclos, se puede atenuar los caminos usando una tasa de descuento, que hace que "los caminos más largos se suman con números más pequeños, y los infinitos son ceros" (Monsalve, 2008, p. 3).

   $$c(\beta) = \sum_{k\geq 1}^{N} \beta^k A^k \cdot \vec{1}$$

   donde: β es la tasa de descuento y A^k cuenta los caminos de largo k entre cualquier par de actores.

3. Centralidad de vector propio (eigenvector centrality).

   Representa al nodo que está conectado a muchos nodos que a su vez tienen conexiones eficaces, se puede considerar que aquel nodo es el que tiene mayor popularidad entre la red de amigos y al que se le considera el centro de la misma. (Monsalve, 2008, p. 4)

$$\vec{c} \approx \frac{A^k \vec{c}}{\|A^k \vec{c}\|},$$

   para un k adecuado y A es la matriz de adyacencia de la matriz de los datos que representan la red de amigos en facebook.

4. Resultados obtenidos

El grafo realizado con NetDraw (Figura 1) muestra las relaciones de amistad mostradas en la Tabla 1, en donde a partir de la matriz de datos presentada, 1 significa existencia de amistad y 0 no conexión.

	Sami Vargas	Aura Reyes	Alejandra Reyes	Karen Daniela
Sami Vargas	0	1	0	0
Aura Reyes	1	0	1	1
Alejandra Reyes	0	1	0	1
Karen Daniela	0	1	1	0

Tabla 1. Algunas relaciones de amistad en Facebook, matriz de datos 4×4, de una matriz cuadrada 30×30 que contiene todos los datos.

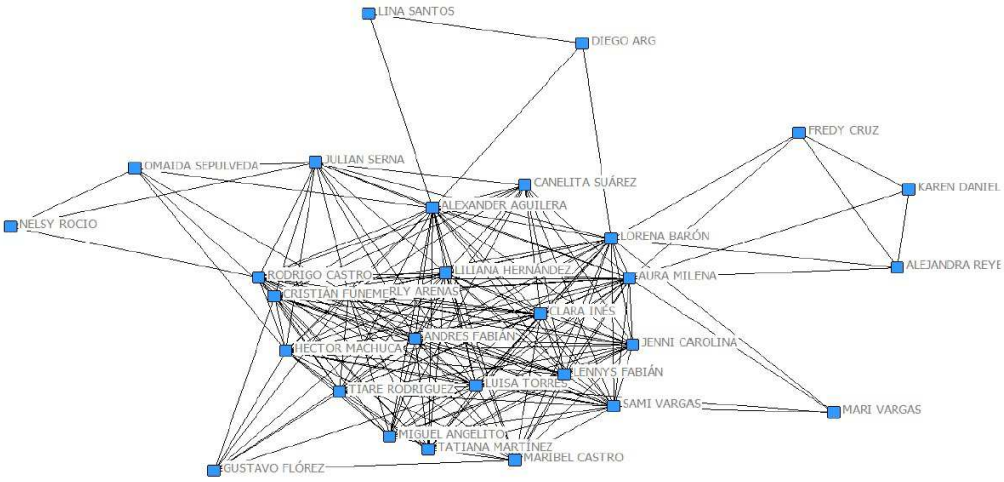


Figura 1. Grafo que representa las relaciones de amistad de un grupo de usuarios de la red social Facebook.

Mediante Ucinet, se obtienen los siguiente datos para cada una de las medidas de centralidad estudiadas.

CENTRALIDAD DE GRADO (DEGREE CENTRALITY)				
	OutDegree	InDegree	NrmOutDeg	NrmInDeg
AURA MILENA	23	23	79,3193485	79,3193485
MAYERLY JOHANNA	0	0	0	0

Tabla 2. Centralidad de grado de algunos de los nodos de la red de amigos.

CENTRALIDAD DE BONACICH (BONACICH'S C(B))		
	Power	Normalized Power
SAMI VARGAS	3693,95483	1,208614588
AURA MILENA	4080,81396	1,335189939
ALEJANDRA REYES	491,3172	0,160752684
MARIBEL CASTRO	3360,07422	1,099373221
TATIANA MARTÍNEZ	3482,66187	1,13948226
OMAIDA SEPULVEDA	1067,7179	0,349343598
CANELITA SUÁREZ	2966,46948	0,97059077
NELSY ROCIO	395,180695	0,129298061
JULIAN SERNA	2479,77979	0,811352134
ANDRES FABIÁN	4057,08472	1,327426076

Tabla 3. Centralidad de Bonacich de algunos de los nodos de la red de amigos.

CENTRALIDAD DE VECTOR PROPIO (EIGENVECTOR CENTRALITY)		
	Eigenvec	NEigenvec
SAMI VARGAS	0,22069633	31,21117401
AURA MILENA	0,243608698	34,45147324
ALEJANDRA REYES	0,029225528	4,133113861
KAREN DANIELA	0,017182751	2,430007935
LORENA BARÓN	0,223745629	31,64241028
LUISA TORRES	0,235664442	33,32798386
LINA SANTOS	0,015349487	2,170745134
MAYERLY ARENAS	0,245806843	34,76233673
ALEXANDER AGUILERA	0,24244006	34,28620148
LENNYS FABIÁN	0,228740036	32,34872437

Tabla 4. Centralidad de Vector Propio de algunos de los nodos de la red de amigos.

Referencias

[1] García, F. *Matemática Discreta*, Editorial Thomson-Paraninfo. Segunda edición.(2006).

[2] Rosen, K. *Discrete Mathematics and Its Applications* New York: McGraw-Hill Education. (2012)

[3] Freeman, L. *La centralidad en las redes sociales. Clarificación conceptual* Política y Sociedad, 33 (2000),pp 131-148.

[4] Monsalve M., (11 de diciembre del 2008). *Análisis de redes sociales: un tutorial*. Recuperado de: homepage.cs.uiowa.edu/∼mmonsalv/bio/SNA.pdf.

Una visión Booleana del Teorema del Límite Central a partir del concepto de elemento aleatorio

Angie Tatiana Suárez Romero* y Luis Eduardo Castillo Méndez**

*Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia, atsuarezr@correo.udistrital.edu.co

**Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia, lecastillom@udistrital.edu.co

Resumen

Ya que la Teoría de la Probabilidad está fundamentada en conjuntos y variables aleatorias; los conjuntos con sus operaciones usuales son un álgebra de Boole y una variable aleatoria puede ser interpretada como un ejemplo de elemento aleatorio; entonces, se puede ganar generalidad definiendo algunos conceptos de probabilidad a partir de álgebras de Boole y el elemento aleatorio. Lo que se va a presentar es un enfoque a partir de álgebras de Boole y elemento aleatorio de los conceptos y teoremas fundamentales de la Teoría de la Probabilidad. Se presentará una propuesta del Teorema del Límite Central en este contexto.

1. Introducción

Con la gran aceptación que está teniendo la estadística como una disciplina a gran cantidad de situaciones pertenecientes a otras disciplinas tales como, la medicina, la administración, la ingeniería, la biología entre muchas más; y como la Teoría de la Probabilidad es la base matemática que fundamenta dicha disciplina, se espera que, al generalizar algunos conceptos matemáticos de esta teoría, obtener métodos eficientes para la estadística a partir de este enfoque de álgebra de Boole y elemento aleatorio.

2. Conceptos básicos alcanzados

Diremos que los elementos del Álgebra de Boole $\mathbb{B}$ se verán como eventos de un experimento aleatorio. Si $a, b, c \in \mathbb{B}$, con $a \leq b$ entonces que ocurra el evento a implica que ocurre el evento b. Si a y b son eventos disyuntos, entonces si ocurre a no ocurre b, es decir son eventos incompatibles. Si $a = b^c$, entonces $b = a^c$, esto es que a e b son eventos complementarios. Si $a = 0_B$, entonces a es un evento imposible. Si $a = 1_B$, entonces a es un evento seguro. Si $a = b \vee c$, entonces si ocurre el evento b u ocurre el evento c, ocurrirá el evento a, es decir a es la "suma"de los eventos b y c. Si $a = b \wedge c$, entonces si ocurre el evento b y al tiempo ocurre el evento c, ocurrirá el evento a, es decir a es la disyunción "producto"de los eventos b y c.

Una medida de probabilidad sobre un álgebra de Boole $\mathbb{B}$ es una función P, de $\mathbb{B}$ sobre $\mathbb{R}$, tal que $P(a) \geq 0$, para todo $a \in \mathbb{B}$; $P(0_B) = 0$, $P(1_B) = 1$; y además es aditiva contable, esto es que para todo $i \neq j$, $a_i \wedge a_j = 0_B$ se cumple que $P(\bigvee a_i) = \sum P(a_i)$, para cualquier $a_i, a_j \in \mathbb{B}$.

Llamaremos a la dupla $(\mathbb{B}, P)$ espacio de probabilidad booleano; así la interpretación en álgebras de Boole de algunos teoremas de la Teoría de la Probabilidad son las siguientes:

i. En $(\mathbb{B}, P)$ la probabilidad de cualquier evento es menor o igual que la unidad, $0 \leq p(a) \leq 1$, para $a \in \mathbb{B}$.

ii. Si a, b son eventos de $(\mathbb{B}, P)$ tales que $a \leq b$, entonces, $P(a) \leq P(b)$

iii. Si a es un evento de $(\mathbb{B}, P)$, entonces la probabilidad de que no ocurra el evento a es $p(a^c) = 1 - p(a)$.

iv. Si a, b son eventos de $(\mathbb{B}, P)$ se cumple que: $P(a \vee b) = P(a) + P(b) - P(a \wedge b)$.

Por otra parte las definiciones que probabilidad condicional e independencia en este contexto se interpretaran como:

Definición 1. *Si a, b son eventos de $(\mathbb{B}, P)$ tales que $P(b) > 0$. La probabilidad condicional del evento a cuando ha ocurrido el evento b, y se designa por $P(a|b)$ es, $P(a|b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)}$, lo cual implica que: $P(a \wedge b) = P(a|b)P(b)$*

Definición 2. *Sean a, b eventos de $(\mathbb{B}, P)$; se dice que son independientes si: $P(a \wedge b) = P(a) \cdot P(b)$. Tomando una colección finita de elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{B}$, se dice que son independientes, si para toda escogencia de subíndices $i_1, \ldots, i_k$ del conjunto de índices $1, \ldots, n$, se tiene que:*

$$P(a_{i1} \wedge a_{i2} \wedge \ldots \wedge a_{ik}) = P(a_{i1}) \cdot P(a_{i2}) \cdot \ldots \cdot P(a_{ik})$$

De esta manera para un espacio de probabilidad booleano $(\mathbb{B}, P)$ se prueban, el teorema de la probabilidad total, donde si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es una colección de eventos disyuntos dos a dos en $\mathbb{B}$ que satisfacen $\bigvee_{j=1}^{n} a_j = 1_B$ y $P(a_j) > 0$ para $j = 1, \ldots, n$, entonces para todo $b \in \mathbb{B}$, $P(b) = \sum_{j=1}^{n} P(b|a_j)P(a_j)$. La Formula de Bayes, si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es una colección de eventos disyuntos dos a dos en $\mathbb{B}$ que satisfacen $\bigvee_{j=1}^{n} a_j = 1_B$ y $P(a_j) > 0$, entonces para todo $b \in \mathbb{B}$, para los cuales $P(b) > 0$, entonces $P(a_i|b) = \dfrac{P(b|a_i)P(a_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(b|a_j)P(a_j)}$, y la regla multiplicativa, si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son eventos de $\mathbb{B}$, para los cuales $P(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_{n-1}) > 0$, entonces

$$P(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n) = P(a_1)P(a_2|a_1)P(a_3|a_1 \wedge a_2) \cdots P(a_n|a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_{n-1})$$

3. Elementos aleatorios en álgebras de Boole

Se dice que una función v de un espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ a un espacio métrico X es un elemento aleatorio (e.a), si la imagen inversa de un boreliano B de X, a través de v, es una elemento de

$\mathcal{F}$. Si tomamos a $X = \mathbb{R}$ con la métrica usual, la noción de elemento aleatorio es la misma que la de variable aleatoria. Lo mismo ocurre en $\mathbb{R}^n$, pues los abiertos son uniones numerables de abiertos $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, donde cada $I_i = (a_i, b_i)$ es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Luego una función $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un elemento aleatorio en $\mathbb{R}^n$ si y sólo si cada $x_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una variable aleatoria.

A partir de la idea de elemento aleatorio, se propone la siguiente definición que corresponde a elemento aleatorio booleano (e.a.b)

Definición 3. *Una función t de un álgebra de Boole $\mathbb{B}$ a un espacio métrico X es un elemento aleatorio booleano (e.a.b), si la imagen inversa de un boreliano B de X, a través de t, es un elemento de $\mathbb{B}$.*

A partir de este momento los conceptos de función de densidad de probabilidad, función acumulada de probabilidad, esperanza, varianza, función generadora de momentos y función característica se extienden de manera natural en el contexto de elementos aleatorios booleanos, al igual que independencia de elementos aleatorios y elementos aleatorios idénticamente distribuidos.

4. Propuesta del Teorema del Límite Central a partir del concepto de elemento aleatorio booleano

De la propuesta del enunciado y demostración del Teorema del Límite Central de Lindeberg-Lévy, se enuncia la siguiente proposición que será la versión en el contexto de elementos aleatorios booleanos del Teorema del Límite Central

Proposición 4. *Sean $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_k, \ldots$ elementos aleatorios booleanos independientes e idénticamente distribuidos, con esperanza matemática y varianza finita de cada X_i , entonces*

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} X_i$$

sigue una distribución normal de un elemento aleatorio booleano.

La demostración de la anterior proposición parte de la misma idea con la que Lindeberg-Lévy demostró el Teorema del Límite Central para variables aleatorias.

Referencias

[1] D.A. Vladimirov, *Boolean Algebras in Analysis*, Springer Science+Business Media Dordrecht, 2002.

[2] Dodu Juliette and Morillon Marianne, *The Hahn-Banach Property and the Axiom of Choice*, Mathematical Logic Quarterly, 1999.

[3] Enciso Ruiz y German Andrés, La Fuerza de Elección del Teorema de Hahn-Banach, Tesis de grado, Universidad de los Andes, Colombia, 2000.

[4] Matías Carrasco, Probabilidades en espacios abstractos: Una introducción, Trabajo Monográfico, Universidad República de Uruguay, 2005.

[5] Mood Alexander McFarlane, *Introduction to the theory of statistics*, Library of Congress Cataloging, McGraw-Hill, 1913.

[6] Muñoz de Özak Myriam y Blanco Castañeda Liliana, Introducción a la teoría avanzada de la probabilidad, Universidad Nacional De Colombia, Sede Bogotá, 2002.

[7] Robert G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classics Library, Eastern Michigan University and University of Illinois, New York, 1995.

Un estudio alternativo para estimar los parámetros de la secante hiperbólica generalizada: máxima verosimilitud modificada

Luis Alejandro Másmela Caita* y Alvaro Alexander Burbano Moreno*,[a]

*Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. lmasmela@udistrital.edu.co

[a]Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. aaburbanom@unal.edu.co.

Resumen

Diversas distribuciones generalizadas se desarrollan en la literatura estadística, entre ellas se encuentra la distribución Secante Hiperbólica Generalizada (SHG). En este documento se presenta un método alternativo para la estimación de los parámetros poblacionales de la SHG, llamado Máxima Verosimilitud Modificada (MVM). Asumiendo algunas expresiones alternas que difieren con el trabajo de Vaughan en el 2002 y basándose en el mismo conjunto de datos de la fuente original. Se implementa computacionalmente el método transformado de MVM, permitiendo observar unas buenas aproximaciones de los valores de los parámetros de localización y escala, presentados por Vaughan en su artículo. Con esto se pretende que en la práctica se cuente con una metodología diferente para estimar.

1. Introducción

La distribución secante hiperbólica (SH), fue estudiada primero por Baten [1] y por Talacko [2], su función de densidad de probabilidad con media cero y varianza uno, está dada por

$$f_{SH}(x) = \frac{1}{2\cosh(\pi x/2)}, \qquad x \in \mathbb{R}\,, \tag{1}$$

o, de manera equivalente, su función de distribución acumulada está dada por

$$F_{SH}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(\operatorname{senh}(\pi x/2)). \tag{2}$$

Recientemente, Vaughan [3] propuso una familia de distribuciones simétricas, que llamó distribución SHG. Esta se compone de distribuciones con curtosis que van desde $1,8$ hasta el infinito e incluye la logística como un caso especial, la uniforme como un caso límite y se aproxima a las distribuciones normal y la t de Student con curtosis correspondientes. Por otra parte, el método utilizado generalmente para estimar los parámetros de localización y escala de la SHG (Máxima Verosimilitud (MV)), presenta algunas complicaciones que se mencionan en Vaughan [3]. Por consiguiente, se usarán las estimaciones de MVM en este trabajo.

2. Metodología

En esta sección se detalla la metodología que se seguirá, en la cual se expone primero aspectos relacionados con la SHG. Luego, se utiliza el método de estimación de MVM, asumiendo algunas modificaciones efectuadas en las expresiones originales presentadas en el trabajo de Vaughan.

2.1. Formas funcionales

Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución SHG con parámetro t, si su función de densidad está dada por:

$$f(x;t) = \frac{c_1 e^{c_2 x}}{e^{2c_2 x} + 2ae^{c_2 x} + 1} \tag{3}$$

donde para $-\pi < t < 0$,

$$a = \cos(t),\ c_2 = \sqrt{\frac{(\pi^2 - t^2)}{3}} \quad y \quad c_1 = \frac{\operatorname{sen} t}{t} c_2, \tag{4}$$

para $t = 0$

$$a = 1,\ c_1 = c_2 = \frac{\pi}{\sqrt{3}}, \tag{5}$$

y para $t > 0$

$$a = \cosh t,\ c_2 = \sqrt{\frac{(\pi^2 + t^2)}{3}} \quad y \quad c_1 = \frac{\operatorname{senh} t}{t} c_2. \tag{6}$$

La densidad en (3) se escoge de manera que $X \sim \text{SHG}(0\,,1;t)$, es decir, con media cero y varianza uno. Nótese también que independientemente del valor de t, esta distribución es simétrica alrededor de cero. La función de distribución acumulada (fda)

$$F(x;t) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{t}\cot^{-1}\left(-\dfrac{(e^{c_2 x} + \cos t)}{\operatorname{sen} t}\right), & \text{si } -\pi < t < 0; \\ \dfrac{e^{\pi x/\sqrt{3}}}{(1 + e^{\pi x/\sqrt{3}})}, & \text{si } t = 0; \\ 1 - \dfrac{1}{t}\coth^{-1}\left(\dfrac{e^{c_2 x} + \cosh t}{\operatorname{senh} t}\right), & \text{si } t > 0. \end{cases} \tag{7}$$

2.2. Los estimadores de MVM

Suponiendo que es conocido el parámetro de forma t, en general, se dice que una variable aleatoria X se encuentra distribuida secante hiperbólica generalizada, denotado esto como $X \sim \text{SHG}(\mu,\ \sigma;\ t)$, si su densidad está dada por:

$$f(x) = \frac{c_1}{\sigma} \frac{\exp(c_2(x-\mu)/\sigma)}{\exp(2c_2(x-\mu)/\sigma) + 2a\exp(c_2(x-\mu)/\sigma) + 1}\,, \tag{8}$$

donde $-\infty < x < \infty$, $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$. Los estimadores de MV de μ y σ, son las soluciones de las ecuaciones

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = -\frac{c_2 n}{\sigma} + \frac{2c_2}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} g(z_i) = 0 \tag{9}$$

y

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} - \frac{c_2}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} z_i + \frac{2c_2}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} z_i g(z_i) = 0\,, \tag{10}$$

donde $g(z) = (a\exp(c_2 z) + \exp(2c_2 z)/(\exp(2c_2 z) + 2a\exp(c_2 z) + 1)$ y $z = (x-\mu)/\sigma$. Cabe hacer mención que la función referida anteriormente, es una nueva propuesta que se presenta en el documento y que resulta ser una expresión equivalente a la mostrada por Vaughan [3].

Las ecuaciones (9) y (10) no admiten soluciones explícitas debido a los términos relacionados con la función no lineal $g(z)$, pero pueden ser resueltas por métodos iterativos. Esto puede ser problemático por razones de (i) las raíces múltiples, (ii) la falta de convergencia de las iteraciones (Barnett [4], Tiku y Suresh [5], Puthenpura y Sinha[6]). Lo que se necesita es un método de estimación que capture la belleza de la máxima verosimilitud, pero que alivie sus dificultades en el cálculo. Uno de los métodos y tal vez el más viable, es el método de estimación de máxima verosimilitud modificada que se originó con Tiku [7, 8]. Sea $t_{(i)} = E(z_{(i)})$ el valor esperado de la i-ésima variable estandarizada ordenada $z_{(i)}$, $(1 \le i \le n)$. Es posible, encontrar una adecuada aproximación lineal para $g(z_{(i)})$ a partir de la expansión en series de Taylor alrededor de $t_{(i)}$. De este modo, suponiendo que $g(z)$ es casi lineal en un pequeño intervalo $a < z < b$ (Tiku [7, 8]) y $z_{(i)}$ está situada en una vecindad de $t_{(i)}$ para un n grande, se obtiene una aproximación de los dos primeros términos de una serie de Taylor, es decir

$$\begin{aligned} g(z_{(i)}) &\cong g(t_{(i)}) + (z_{(i)} - t_{(i)})\left\{\frac{d}{dz}g(z)\right\}_{z=t_{(i)}} \\ &= \alpha_i + \beta_i z_{(i)}, \quad 1 \le i \le n\,, \end{aligned}$$

donde $\beta_i = \left\{\dfrac{d}{dz}g(z)\right\}_{z=t_{(i)}}$ y $\alpha_i = g(t_{(i)}) - \beta_i t_{(i)}$. Por lo tanto, las ecuaciones de verosimilitud modificada son:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} \simeq \frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu} = \frac{2c_2}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} \beta_i z_{(i)} = 0\,, \tag{11}$$

y

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} \simeq \frac{\partial \ln L^*}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{c_2}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} z_{(i)}(-1 + 2\alpha_i + 2\beta_i(z_{(i)} - t_{(i)})) = 0\,. \tag{12}$$

Cabe señalar que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = n/2$ y $\sum_{i=1}^{n}\beta_i t_{(i)} = 0$. Aunque la formulación para encontrar los valores exactos de las esperanzas $t_{(i)}$ están disponible en Vaughan [3], es difícil de implementar. Por consiguiente, se propone en este documento utilizar una forma alternativa, esta consiste en valores aproximados para los $t_{(i)}$ presentados en Tiku, Aysen y Akkaya [9] y que permiten minimizar las

operaciones realizadas en la programación del método:

$$t_{(i)} = \begin{cases} \dfrac{1}{c_2} \ln\left(\dfrac{\operatorname{sen}(tq_i)}{\operatorname{sen}(t(1-q_i))}\right), & \text{si } -\pi < t < 0; \\ \dfrac{\sqrt{3}}{\pi} \ln\left(\dfrac{q_i}{1-q_i}\right), & \text{si } t = 0; \\ \dfrac{1}{c_2} \ln\left(\dfrac{\operatorname{senh}(tq_i)}{\operatorname{senh}(t(1-q_i))}\right), & \text{si } t > 0, \end{cases} \tag{13}$$

donde $q_i = i/(n+1)$. Las soluciones simultáneas de $\widehat{\mu}_m$ y $\widehat{\sigma}_m$ de las de las ecuaciones (11) y (12) son:

$$\widehat{\mu}_m = \bar{x}_b = \frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} \beta_i} \tag{14}$$

y

$$\widehat{\sigma}_m = \frac{c_2}{2}\left[\bar{x}_a - \bar{x} + \left((\bar{x} - \bar{x}_a)^2 + \frac{8}{nc_2}\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i (x_{(i)} - \bar{x}_b)^2\right)\right)^{1/2}\right], \tag{15}$$

donde $\bar{x} = 1/n \sum_{i=1}^{n} x_{(i)}$, $\bar{x}_a = 2/n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{(i)}$.

3. Resultados

A continuación se presentan los resultados obtenidos al aplicar la metodología en dos ejemplos, donde se incluyen algunos valores comparativos.

Ejemplo 1. *Considere los siguientes datos obtenidos por Darwin [10], que representan las diferencias de alturas de pares de plantas de maíz, cruzadas y autofertilizadas sembradas en unas mismas macetas (Ver Tabla 1).*

Tabla 1: Diferencias de alturas ordenadas en octavos de pulgadas

-67	-48	6	8	14	16	23	24
28	29	41	49	56	60	75	

Si se asume que las 15 observaciones son normales $N(\mu, \sigma^2)$, entonces se obtienen los estimadores habituales de la media y varianza. Los valores son:

$$\bar{x} = 20,93 \qquad s = 37,74.$$

Recurriendo al gráfico de caja como se indica en la figura 11, se observa que el conjunto de datos del ejemplo, presenta valores atípicos. Dado que la presencia de estos valores en los datos afecta a la

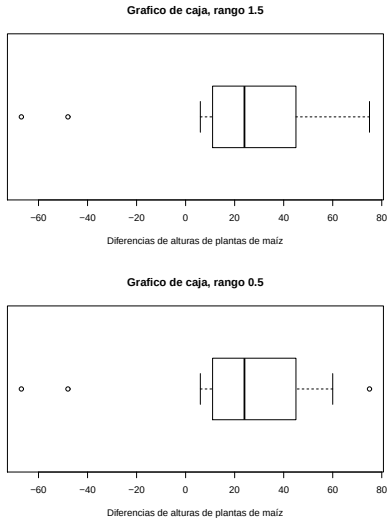


Figura 11: Datos atípicos.

media muestral como estimador de la media poblacional, Vaughan [3] sugiere de manera alternativa, la distribución SHG como un modelo que ofrece un buen ajuste a los datos.

Para estimar los parámetros de localización y de escala mediante el método de MVM, se procede primero a calcular el parámetro de forma adecuado para el conjunto de datos. Mediante las ecuaciones (14) y (15), se tiene los siguientes valores de $(1/n)\ln L$ (Ver Tabla 2). Se elige $t = -\pi/2$, que

Tabla 2: Valores de $(1/n)\ln L$

t	-2.5	$-\pi/2$	$-\pi/4$	2.5	5	7.5	$\pi\sqrt{11}$
	$-4,9539$	$-4,9703$	$-4,9848$	$-5,0286$	$-5,0669$	$-5,0689$	$-5,0633$

es claramente un valor plausible del parámetro de forma. Cualquier valor de t cerca de $t = -\pi/2$ proporciona un modelo plausible, debido a la robustez intrínseca de las estimaciones de MVM, es decir, que esencialmente dan las mismas estimaciones y errores estándar.
Con base en el modelo de la SHG y $t = -\pi/2$, las estimaciones de máxima verosimilitud modificada de μ y σ son:

$$\widehat{\mu}_m = 24,89 \quad y \quad \widehat{\sigma}_m = 36,59.$$

Cabe destacar que el parámetro de forma t y las estimaciones obtenidas por MVM, se calculan mediante la programación de códigos en Matlab 7.12.0 (R2011a). Además, estas estimaciones son aproximaciones de los valores exactos mostrados en Vaughan [3]

$$\widehat{\mu}_m = 25,12 \quad y \quad \widehat{\sigma}_m = 35,98.$$

4. Conclusiones

1. En cuanto a las modificaciones que se hacen al planteamiento original hecho por Vaughan [3], se obtuvo una expresión equivalente para la función $g(z) = (a\exp(c_2 z) + \exp(2c_2 z)/(\exp(2c_2 z) + 2a\exp(c_2 z) + 1)$.

2. Se emplearon unas expresiones alternas para $t_{(i)}$ ilustradas en Tiku [9, página 31-34], las cuales junto con la función equivalente $g(z)$, es uno de los aportes principales de este trabajo.

3. Las variaciones realizadas a la fuente original, exhibieron un comportamiento similar en las estimaciones, pero permitieron una mayor facilidad en la programación del método en el software Matlab.

Referencias

[1] W. D. Baten, "Probability law for the sum of n independent variables, each subject to the law $(1/2h)Sech(\pi x/2h)$," *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 40, no. 1, pp. 284–290, 1934.

[2] J. Talacko, "Perks' Distributions and Their Role in the Theory of Wiener's Stochastic Variables," *Trabajos de Estadística*, vol. 7, pp. 159–174, 1956.

[3] D. C. Vaughan, "The Generalized Secant Hyperbolic Distribution And Its Properties," *Communications in statistics*, vol. 31, no. 2, pp. 219–238, 2002.

[4] V. D. Barnett, "Evaluation of the maximum likelihood estimator when the likelihood equation has multiple roots," *Biometrika*, vol. 53, pp. 151–165, 1996a.

[5] M. L. Tiku and R. P. Suresh, "A new method of estimation for location and scale parameters," *J. Stat. Plann*, vol. 30, pp. 281–292, 1992.

[6] S. Puthenpura and N. K. Sinha, "Modified maximum likelihood method for the robust estimation of system parametrs from very noisy data," *Automatica*, vol. 22, pp. 231–235, 1986.

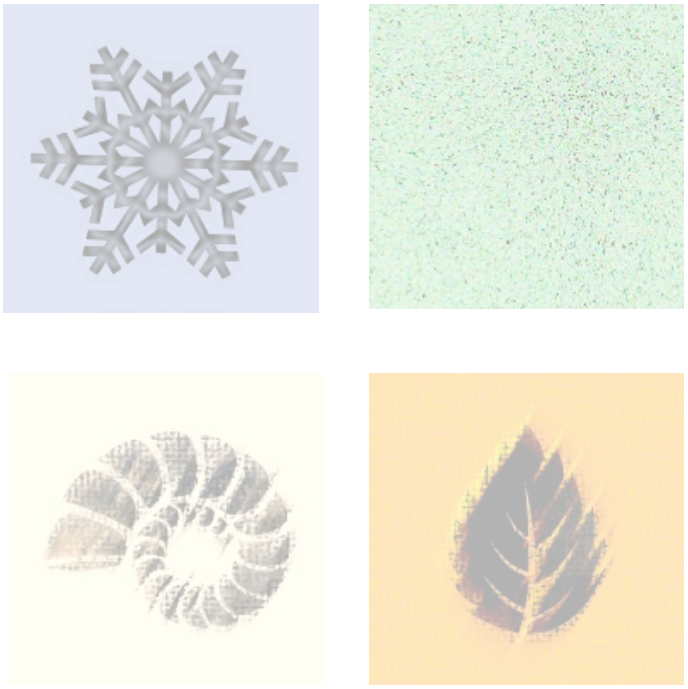
[7] M. L. Tiku, "Estimating the mean and Standard Deviation from a censored Normal Sample," *Biometrika*, vol. 54, no. 1, pp. 155–165, 1967a.

[8] M. Tiku, "A note on estimating the location and scale parameters of the exponential distribution from a censored sample," *Austral. J. Statist*, vol. 9, no. 1, pp. 49–54, 1967b.

[9] M. L. Tiku, D. Aysen, and Akkaya, *Robust Estimation and Hypothesis Testing*, 2nd ed. New York: New Age, 2004.

[10] R. A. Fisher, *The Design of Experimets*, 9th ed. Hafner Publishing company, 1971.

EDUCACIÓN MATEMÁTICA



Plenarias y Semiplenarias

¿Qué nos dice la teoría APOE sobre la enseñanza del Álgebra Lineal?

María Trigueros G.[1]

Depto. de Matemáticas
ITAM, México
trigue@itam.mx

Resumen

En este trabajo se presentan los resultados de dos proyectos de investigación sobre el aprendizaje de los conceptos del Álgebra Lineal y sus relaciones y sobre la enseñanza de esta disciplina mediante el uso de modelos abiertos; ambos utilizando la teoría APOE. Los resultados de las investigaciones empíricas acerca del aprendizaje de los distintos conceptos del Álgebra Lineal constituyen la base para la selección de conceptos a enseñar y el diseño de modelos y actividades para enseñarlos. Los resultados obtenidos permiten valorar las aportaciones de la teoría APOE a la investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza del Álgebra Lineal.

El Álgebra Lineal es una disciplina que día con día se considera más importante en la preparación de alumnos de diferentes licenciatura. La gran cantidad de aplicaciones que pueden tratarse utilizando los conceptos de esta disciplina y su potencial para desarrollar la capacidad de abstracción matemática y de formalización en los estudiantes son determinantes en la formación de profesionales hoy en día. Sin embargo, los estudios que se han realizado acerca dela enseñanza del Álgebra Lineal indican que los estudiantes presentan muchas dificultades debido, principalmente, a la abstracción que se requiere en la formalización de los conceptos y al lenguaje que se utiliza en ella. Dubinsky (1997) advirtió ya desde hace muchos años que estas dificultades no pueden ni deben evitarse y que dedicar toda la atención a enseñar los aspectos computacionales de la disciplina eludiendo la abstracción que es necesaria en un aprendizaje a profundidad de esta materia no es conveniente. La abstracción y el formalismo son la esencia de las Matemáticas, y en particular del Álgebra Lineal, por ello es necesario buscar acercamientos específicos que permitan a los alumnos comprender los conceptos a través de experiencias agradables pero sin eludir la exigencia de abstracción indispensable para profundizar en ellos. El

logro de diseñar estrategias de enseñanza exitosas está íntimamente ligado a la investigación y experimentación didáctica.

En este artículo se describen los resultados experiencias de investigación y enseñanza de algunos conceptos del Álgebra Lineal utilizando como marco teórico la Teoría APOE. Para ello se inicia con una breve descripción de la teoría, posteriormente se presenta un panorama que intenta dar una idea del contenido y alcance de los proyectos tanto de investigación cuanto de enseñanza y de los resultados obtenido hasta ahora.

La Teoría APOE

La teoría APOE (Arnon, et al., 2013) ofrece un modelo teórico acerca de la construcción del conocimiento matemático basado en el mecanismo de *abstracción reflexiva*. La construcción del conocimiento inicia cuando un estudiante realiza acciones sobre objetos matemáticos conocidos. Una *acción* es una transformación de un objeto mental siguiendo una o varias reglas específicas que el estudiante considera como externas. Conforme el individuo reflexiona sobre sus acciones, éstas se interiorizan en un *proceso*. En este caso, cada paso de la trasformación puede describirse sin necesidad de hacerla. La reflexión sobre el proceso y la necesidad de aplicar acciones sobre el mismo hace que el estudiante tome conciencia de él y que lo encapsule en un *objeto*. Un *esquema* se considera como una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que se relacionan entre sí para formar estructuras matemáticas útiles en la solución de problemas. Estos esquemas pueden evolucionar conforme se construyen relaciones entre sus componentes de manera que los esquemas cambian dinámicamente construyéndose y reconstruyéndose. La evolución de los esquemas se describe mediante los niveles de la *triada*: El nivel Intra- se caracteriza por el foco en estructuras aisladas de otras estructuras de naturaleza similar. En el nivel Inter- se construyen relaciones y transformaciones entre los componentes del esquema, se agrupan y se pueden identificar con el mismo nombre. En el nivel Trans- se construyen síntesis entre los componentes del esquema que permiten entender las relaciones construidas con anterioridad y decidir cuándo el esquema es aplicable a una situación particular.

La aplicación de la teoría APOE requiere del diseño de un modelo teórico de análisis: la *descomposición genética.* Este modelo, no necesariamente único, consiste en una descripción de la forma en que un concepto matemático de interés se construye. Para ello utiliza las construcciones específicas de la teoría que se consideran necesarias en esa construcción y posteriormente se valida o refina a través de investigación empírica.

La descomposición genética constituye la base del ciclo de investigación de la teoría APOE que inicia con el diseño de la misma y culmina con su validación. La teoría APOE propone finalmente un modelo de enseñanza: el ciclo ACE (Actividades, discusión en clase, ejercicios)

en el que se ponen en juego actividades que promueven las construcciones modeladas en la descomposición genética.

A continuación se describen brevemente dos proyectos de investigación que ilustran el uso de esta teoría en relación con la construcción de conceptos del Álgebra Lineal.

Dos proyectos de investigación

En México se están desarrollando dos proyectos de largo alcance con el fin de estudiar cómo se aprenden los conceptos del Algebra Lineal. Uno de ellos se centra principalmente en el uso de la teoría APOE para desentrañar las construcciones de los estudiantes respecto a los conceptos fundamentales de esta disciplina (Oktaç y Trigueros, 2010). En el marco de este proyecto, ya se han estudiado a profundidad los conceptos de sistemas de ecuaciones lineales, espacio vectorial, conjunto generador y espacio generado, base, transformaciones lineales. El otro proyecto utiliza conjuntamente los ciclos de investigación y enseñanza de la teoría y aporta la introducción de modelos en el aula con el objetivo de brindar oportunidades a los alumnos de usar sus conocimientos previos y de conectar los conceptos abstractos del Algebra Lineal con situaciones que permitan darles un sentido más cercano a su experiencia (Possani, Trigueros, Preciado & Lozano, 2009; Trigueros y Possani, 2013). Este proyecto aprovecha los resultados de las investigaciones del de investigación y las descomposiciones genéticas propuestas en él para diseñar actividades de enseñanza que complementan los problemas de modelación para abordar distintos conceptos. Este proyecto profundiza en la forma en que los alumnos aprenden los conceptos y, además, estudia la relación que guarda la introducción de problemas abiertos en dicha construcción. En este contexto se han abordado los temas de vectores, independencia lineal, valores y vectores propios y programación lineal, además de los mencionados anteriormente.

Ambos proyectos coinciden en utilizar el análisis teórico de las construcciones involucradas en el aprendizaje de cada uno de los conceptos considerados con el fin de validar, o en su caso refinar, .dicho análisis a través de los datos que se obtienen de la investigación empírica. Los resultados de ambos proyectos se han aprovechado para diseñar sugerencias didácticas para guiar al maestro en el uso de los problemas y de las actividades que ya han sido probadas en el aula.

Resultados de la investigación sobre algunos conceptos del Álgebra Lineal

Los resultados obtenidos en las investigaciones de los proyectos han dado luz acerca de los múltiples factores que intervienen en el aprendizaje del Algebra Lineal. Entre ellos destaca la

importancia que tiene la comprensión de la variable en el aprendizaje de todos los conceptos. Una y otra vez distintas investigaciones evidencian la necesidad de interpretar, manipular y simbolizar flexiblemente la variable en la comprensión de cada uno de los conceptos del Álgebra Lineal estudiados. La posibilidad de diferenciar entre los usos de la variable: numero general, incógnita y variables en relación funcional, y de integrar estos usos en la solución de problemas, juega un papel fundamental en la generalización de la variable real hacia otro tipo de variables como parámetros, vectores o matrices y en la interpretación de resultados de los problemas relacionados con los nuevos conceptos. Los resultados de varios proyectos han mostrado que el trabajo con modelos y con actividades específicas que abordan la dificultad con las variables contribuye a que las dificultades de los alumnos disminuyan y que ello contribuye a una mejor comprensión de los conceptos nuevos conceptos estudiados.

En todas las investigaciones relacionadas con la enseñanza de distintos conceptos del Álgebra Lineal se ha encontrado que el uso del ciclo ACE promueve la construcción de los distintos conceptos, al menos como una concepción proceso y en varias ocasiones como una concepción objeto. Tal es el caso, por ejemplo de la noción de conjunto solución como proceso, de la noción de espacio generado, conjunto generador, base y vectores propios. También se ha reportado que promueve la construcción de relaciones entre conceptos y permite la evolución de los esquemas de los alumnos, como por ejemplo en el caso de la independencia y dependencia lineal. Algunas de las dificultades mencionadas en la literatura y que resultan difíciles de superar a la luz de los resultados de la investigación se relacionan con la representación geométrica de los sistemas de ecuaciones lineales y su solución, particularmente cuando el problema se plantea en R^3.

Suele considerarse que el uso de la modelación en la clase de matemáticas contribuye a motivar el interés de los alumnos. Si bien los resultados encontrados en el proyecto permiten decir lo mismo para la mayoría de los estudiantes; hay evidencias claras en los resultados de investigación de aprendizaje de los alumnos.

Aportaciones de ambos proyectos

En términos generales podemos decir que el uso de un modelo abierto en la clase de Álgebra Lineal permite desarrollar una discusión interesante con el grupo acerca de los conceptos importantes del tema en consideración. Por ejemplo, permite comparar distintos sistemas de ecuaciones lineales y sus conjuntos solución; introducir nuevas técnicas y nuevos conceptos para profundizar en la generación de un modelo y en el trabajo sobre él cuando resultan necesarias para los alumnos, o reflexionar conjuntamente en las propiedades de cada concepto y las relaciones entre ellos. El caso de un problema de tráfico ejemplifica claramente este hecho. En el marco del trabajo de modelación y de su uso conjunto con actividades conceptuales, fue posible no solamente introducir el método de Gauss para resolver eficientemente sistemas de ecuaciones lineales e interpretar su solución, sino también discutir acerca de la relación de los elementos de

la matriz con el conjunto de calles y discutir su significado en relación al problema de los signos de las ecuaciones. En términos de la variable, el trabajo en el modelo apoyó la interpretación y el manejo de los parámetros por parte de los alumnos, además de la posibilidad de utilizarlos como herramienta para determinar las características de las soluciones factibles, la comparación de diferentes parametrizaciones utilizando una representación geométrica del espacio de soluciones factibles.

El trabajo con un modelo y con actividades diseñadas con la teoría APOE favorece la construcción de conceptos en un contexto en que los alumnos pueden darles sentido y articularlos. Por ejemplo, los conceptos de dependencia e independencia lineal suelen ser muy difíciles para los estudiantes. Sabemos que entre las dificultades que se presentan están el entender su definición e interpretar la solución del sistema de ecuaciones necesario para determinar si un conjunto es o no linealmente independiente, particularmente en el caso en el que hay dependencia lineal. Se ha encontrado que un modelo de producción permite que el concepto de dependencia lineal se concrete mediante la idea de "información redundante" y que esto apoye la interiorización de estos conceptos. La reflexión sobre la pregunta "¿Cuál es el mínimo de información que se necesita utilizar?" conduce a la construcción de las nociones de conjunto generador y base. Las relaciones entre los conceptos de sistema de ecuaciones, combinación lineal, dependencia e independencia lineal, conjunto generador, base y dimensión empiezan, además, a construirse conformando un esquema. El trabajo de los estudiantes en actividades cuidadosamente diseñadas con la teoría APOE apoya la evolución del esquema. Una limitación importante en el uso de este modelo es que el esquema no llega a evolucionar el nivel trans-independencia lineal y los estudiantes muestran muchas dificultades para generalizar el concepto a otros espacios vectoriales distintos a R^n.

El uso de modelos a lo largo del curso, relacionados, por ejemplo, con las transformaciones lineales, los valores y vectores propios o matrices, hace posible la construcción de relaciones entre los distintos del Álgebra Lineal y favorece la evolución de un esquema para esta disciplina. Es importante mencionar, sin embargo, que no es el trabajo únicamente con los modelos lo que hace posible esta evolución. En ella, el trabajo con las actividades que promueven las construcciones de los conceptos y de relaciones entre ellos juega un papel fundamental. Las dificultades encontradas en los estudios y su explicación en términos de la descomposición genética de los distintos conceptos conforman la base del diseño de las actividades utilizadas en el aula, guían la discusión del grupo y el trabajo del maestro a lo largo de las sesiones de clase.

Conclusiones

Las investigaciones realizadas en los dos proyectos han mostrado claramente que la forma en que se introducen los conceptos en el aula juega un papel importante en el tipo de construcciones que se favorecen en los alumnos. Los modelos estimulan la emergencia de "ideas poderosas" y

de formas de dar sentido a los conceptos abstractos del Álgebra Lineal. Las actividades promueven la reflexión en equipo y con el grupo en torno a ellos y su formalización.

Los proyectos han permitido también el desarrollo de nuevo conocimiento. Las discusiones entre los investigadores para diseñar los modelos a utilizar en la case, condujo a proponer una nueva manera de considerar la construcción de conocimiento mediante el uso de modelos en términos de la teoría APOE. La investigación en ambos ha contribuido a profundizar en el conocimiento de cómo se aprende el Álgebra Lineal: Entre los dos proyectos se ha investigado la construcción de casi todos los conceptos relevantes de esta disciplina. Estas investigaciones señalan las dificultades de los estudiantes, pero van más allá, permiten diagnosticar las posibles causas de estas dificultades y ofrecen formas de trabajar con ellas. Este conocimiento se aprovecha en el diseño de material didáctico, basado en la investigación, para promover un aprendizaje significativo de esta importante disciplina.

Quedan aún cuestiones de investigación abiertas que es necesario abordar. Entre ellas, la investigación sobre la construcción de los conceptos que no han sido abordados y el uso de las descomposiciones genéticas en nuevas investigaciones para validarlas o refinarlas. Sin embargo, el trabajo realizado hasta el momento pone en evidencia la contribución de la teoría APOE a la comprensión de la construcción de conocimientos de Álgebra Lineal y a su enseñanza.

1. En este trabajo han colaborado las siguientes personas: Asuman Oktaç, Solange Roa-Fuentes, Edgar Possani, Carmen López, Javier Alfaro, Darly Kú, Ligia Manzanero, Ma. Dolores Lozano, Xaab Nop Vargas, Hilda Salgado, Ivonne Sandoval, Marcela Parraguez, Ana Elisa Lage y Barbara Bianchini.

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J. Dubinsky, E., Oktaç, A. Roa-Fuentes, S. Trigueros, M. & Weller, K. (2013). APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. Springer. New York.

Dubinsky, E. (1997). Some Thoughts on a First Linear Algebra Course. En D. Carlson, C.R. Johnson, D.C. Lay, R.D. Porter, A. Watkins, & W. Watkins (eds), Resources For Teaching Linear Algebra, MAA Notes, 42, 85-106.

Oktaç, A. y Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*,13 (4-II), 373-385.

Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J.G. & Lozano, M.D.. (2009) Use of models in the teaching of linear algebra, *Linear Algebra and its Applications*. 432 (8), 2125–2140.

Trigueros, M. (2008) Modélisation de situations réelles et utilisation d'une théorie de construction de la connaissance dans l'enseignement des mathématiques universitaires. En C.

Ouvrier-Buffet & M.-J. Perrin-Glorian (éd.). *Approches plurielles en didactique des mathématiques. Apprendre à faire des mathématiques du primaire au supérieur: quoi de neuf? Actes Colloque DIDIREM08*, pp. 83-101.Paris, France.

Trigueros, M. & Possani, E. (2013). Using an economics model for teaching linear algebra. *Linear Algebra and Its Applications*. Vol. 438, 4, pp. 1779–1792.

Aproximación temprana al razonamiento geométrico en Educación Básica

Leonor Camargo, Carmen Samper

Universidad Pedagógica Nacional
lcamargo@pedagogica.edu.co; csamper@pedagogica.edu.co

Introducción

El aprendizaje de la geometría, a nivel escolar, se basa en el desarrollo de procesos cognitivos relacionados con el sentido espacial y el razonamiento, relativos al espacio bi y tridimensional. Entre estos procesos están la visualización, la representación gráfica de objetos y relaciones, la conjeturación acerca de propiedades y relaciones de estos, la justificación de afirmaciones acerca de estas propiedades, y la resolución de problemas que requieren modelos de representación de relaciones espaciales. Avanzar en el desarrollo del sentido espacial y del razonamiento geométrico implica una evolución en las formas de pensar, no exenta de tensiones, que va desde las maneras intuitivas o informales que usamos para acceder a información visual, para usarla y aceptar su validez, hasta formas más sofisticadas de procesar y comunicar información, que usan recursos propios de la cultura matemática.

En la presente conferencia presentamos una propuesta de aproximación temprana al razonamiento geométrico que busca acercar a niños de Educación Básica al mundo teórico de la geometría. La propuesta se ha venido desarrollando por el equipo de profesores del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, Æ•G, de la Universidad Pedagógica Nacional, en sus estudios acerca del aprendizaje de la geometría en la formación de profesores de matemáticas y en algunas tesis de maestría realizadas por profesores de matemáticas de primaria y secundaria[1]. Pretende constituirse en un organizador curricular para la geometría en tanto impulsa una reorganización de las prácticas usuales de enseñanza, tradicionalmente centradas en el reconocimiento y clasificación de formas, en pro de procesos de descubrimiento y justificación de propiedades geométricas. Inicialmente aclaramos alguna terminología, y posteriormente nos centramos en la propuesta y damos algunos ejemplos.

[1] Agradezco especialmente a Andrea Escobar, Alejandro Barbosa, Mario Cañón, Liliana Rozo por permitirme hacer uso de sus datos investigativos.

Aclaración de conceptos

Entendemos por razonar matemáticamente, de manera general, el conectar, atendiendo reglas definidas por una comunidad matemática de referencia, experiencias y saberes, con el propósito de indagar, obtener e interpretar información, explicar hechos o procedimientos, determinar una manera de proceder, formular dudas, contradecir, refutar, concluir, etc. (Perry, Samper, Camargo, Molina, en prensa). El razonamiento matemático es el producto de razonar matemáticamente.

Cuando el razonamiento se hace con el propósito específico de sustentar ante otros, o a uno mismo, que una afirmación es cierta dentro de un sistema de conocimientos, nos referimos a una argumentación. Esta se compone de argumentos o enunciados orales o escritos, de estructura ternaria, que relacionan proposiciones particulares entre sí, mediante una regla general. Ahora bien, si una argumentación es de carácter deductivo se aplica una proposición general o garantía ($r: p \rightarrow q$) con la que se cuenta, a unos datos que se tienen (instancia de p), para concluir una afirmación (instancia de q).El esquema del argumento es: $(p \wedge r) \rightarrow q$ y tiene como característica que la afirmación (instancia de q) es necesaria y constituye nueva información para la situación particular. Las proposiciones podrían no estar totalmente explicitas pero debería ser posible identificarlas en un esfuerzo por formalizar lo expresado. (Perry, Samper, Camargo, Molina, en prensa).

Con una introducción temprana al razonamiento geométrico nos referimos a propiciar la elaboración, por parte de los estudiantes, de justificaciones, en particular con argumentos deductivos, pues consideramos que son la esencia de las matemáticas y en particular de una manera matemática de trabajar en geometría. La aproximación metodológica que proponemos busca impulsar el desarrollo de procesos de justificación de propiedades geométricas que han sido obtenidas a partir de procesos de conjeturación.

El grupo de investigación Æ•G ha denominado por actividad demostrativa (Perry, Samper, Camargo, Molina, en prensa) al constructo que articula el proceso de conjeturación con el de justificación de tal manera que se justifique lo que se conjetura.

- La conjeturación hace parte de los procesos de razonamiento matemático y tiene por meta, la formulación de conjeturas, es decir, enunciados de carácter general, fundamentados en la observación o el análisis de indicios, cuyo valor de verdad no lo tiene definido el estudiante pero tiene un alto grado de certeza sobre su veracidad, razón por la cual considera que dichos enunciados son candidatos a entrar en un proceso de justificación. Formular una conjetura se refiere a explicitar en términos matemáticos, y como un enunciado condicional general, un hecho matemático (aquí, geométrico) que se ha reconocido a través del estudio de casos particulares. Corroborar la conjetura significa examinar si lo que se reporta en el antecedente es suficiente para obtener como

consecuencia las propiedades que se mencionan en el consecuente de la conjetura y si el consecuente incluye todas las conclusiones posibles.

- La justificación tiene por meta la producción de una argumentación de carácter deductivo que valide la conjetura formulada, es decir, la sustente como verdadera dentro de algún sistema de conocimiento acordado por el grupo social que debería reconocerla como válida.

Siguiendo a Stylianides (2007), en la educación básica es posible denominar como demostración a una justificación si es una secuencia de afirmaciones conectadas deductivamente, a favor de un enunciado, que:

- Usan hechos geométricos aceptados por la comunidad de la clase como garantías de las afirmaciones que se concluyen; esto quiere decir que los estudiantes conocen los hechos geométricos, los aceptan y recurren a ellos cuando los necesitan.
- Usan formas de razonamiento que son válidas, conocidas y al alcance de la comunidad de la clase, especialmente formas de argumentación deductiva que desestiman el recurso a la ostensión.
- Usan formas expresivas (notación, lenguaje simbólico, terminología) al alcance de la comunidad de la clase y que favorecen la comunicación.

Aspectos centrales de la propuesta

Desde el punto de vista del grupo Æ•G la elaboración de argumentos deductivos y, por lo tanto la aproximación temprana al razonamiento geométrico se ve favorecida si se combinan los siguientes elementos:

- Una propuesta de secuencia de problemas de construcción geométrica relacionados entre sí, de tal forma que algunos de ellos permiten el descubrimiento empírico de hechos geométricos que se asumen como ciertos (a manera de postulados de un sistema teórico), y otros que dan lugar a conjeturas que pueden ser validadas con argumentos deductivos, mediante los hechos geométricos aceptados previamente (a manera de teoremas). Por esta vía, los estudiantes pueden ver que las propiedades de las figuras geométricas constituyen un entramado que da forma al conocimiento geométrico y experimentan la potencia de la demostración matemática. La propuesta busca que los estudiantes dejen de ver las propiedades geométricas únicamente como atributos descriptivos de las figuras, identifiquen relaciones de dependencia entre ellas y construyan, en algunos casos, argumentos deductivos para justificarlas.

- El uso, para la resolución de los problemas, de un programa de geometría dinámica que hace que la construcción y la exploración sean una actividad matemática apoyada en las propiedades geométricas y no en la percepción visual. Específicamente, el reconocimiento de las propiedades construidas, ya sea directamente o con el arrastre, y

el estudio del comportamiento de las figuras geométricas, cuando algunos elementos de la configuración son arrastrados, proveen a los estudiantes un mecanismo para identificar invariantes y relaciones de dependencia entre propiedades geométricas que es central para formular conjeturas y disponer de elementos para justificarlas. En ese sentido, se aprovecha el potencial de los programas de geometría dinámica, no sólo como recurso para tener disponibles rápidamente una gran cantidad de ejemplos de una figura geométrica dada, favoreciendo la inducción empírica, sino como recurso para detectar invariantes y establecer relaciones de dependencia que favorecen la construcción de enunciados condicionales, gracias principalmente a la actividad experimental que se logra con el arrastre. En particular, los procedimientos de construcción de figuras elementales, como un paralelogramo y arrastrar hasta que las diagonales sean congruentes, obliga a tener consciencia de las propiedades que definen la figura y a aquellas que se imponen, las cuales se constituyen en los antecedentes de proposiciones condicionales, y descubrir propiedades que se mantienen o suceden simultáneamente al imponer una, se constituyen en los consecuentes, dando lugar a conjeturas iniciales y posiblemente a ideas para que los estudiantes las justifiquen deductivamente.

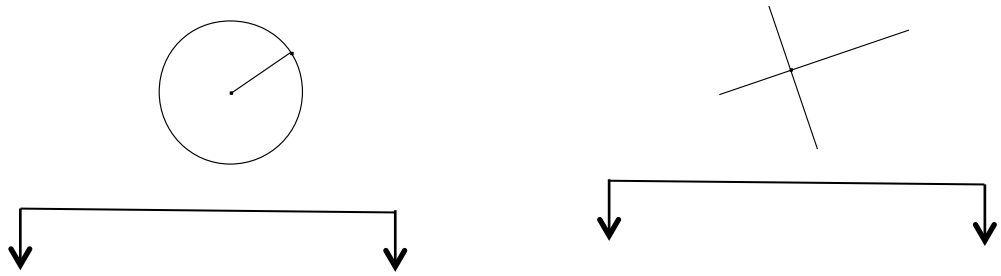
- La mediación semiótica del profesor que guía las actividades impulsando a los estudiantes a interpretar signos del profesor o de otros alumnos y producir signos, a través de los cuales manifiesten sus significados personales acerca de las figuras y las relaciones representadas en la pantalla, como forma de construir conocimiento personal significativo cuya referencia es un conocimiento cultural aceptado por la comunidad matemática de referencia, de acuerdo a las metas instruccionales. En tal sentido, además de diseñar la secuencia de problemas que posibiliten la emergencia de enunciados en torno a un concepto o relación geométrica, el profesor es el encargado de generar una interacción discursiva para que a partir de esos enunciados surjan otros que les den soporte y para que tales enunciados evolucionen hacia los significados matemáticos del contenido.

A continuación, presentamos posibles vías de acceso al universo teórico de la geometría partiendo de cuatro hechos geométricos básicos derivados de experiencias empíricas de construcción de circunferencias y rectas perpendiculares. La propuesta se ha experimentado con estudiantes de grados cuarto, quinto y octavo. La ilustramos con ejemplos sacados de sus producciones.

Punto de partida

Los hechos geométricos básicos para las propuestas son: (i) los radios de una circunferencia son congruentes (HG1) (ii) los puntos de una circunferencia equidistan del centro de la misma (HG2) (iii) dos rectas perpendiculares forman ángulos rectos (HG3) (iv) dos rectas perpendiculares

forman ángulos de 90° (HG4) (Figura 1). Para llegar a estos hechos se puede invitar a los estudiantes a realizar actividades de construcción. Algunas de las actividades que hemos propuesto a estudiantes de cuarto de primaria a noveno grado son: determinar un punto *C* y luego ubicar puntos que estén a la misma distancia de *C*; construir un segmento *AB* y luego arrastrar el punto *B* procurando que la medida del segmento no cambie; ubicar tres puntos *A, B, C* y luego una circunferencia que pase por dicho puntos; hallar el centro de una circunferencia; construir un ángulo recto; construir dos rectas perpendiculares. En todos los casos, se puede pedir a los estudiantes estudiar propiedades para analizar qué cambia con el arrastre, qué no cambia, y qué cambia simultáneamente con otro cambio. Pueden tomar medidas y arrastrar hasta llegar a tener certeza de las conclusiones. Cuando el grupo de estudiantes acepta que las cuatro propiedades son ciertas, ellas se convierten en herramientas de construcción, control y justificación de equidistancia, congruencia de segmentos y construcción de ángulos rectos.



HG1: Los radios de una circunferencia son congruentes.	HG2: Los puntos de una circunferencia equidistan del centro de la misma.	HG3: Dos rectas perpendiculares forman ángulos rectos.	HG4: Dos rectas perpendiculares forman ángulos de 90°.

Figura 1.

A partir de estos hechos se planean secuencias de problemas de construcción, de acuerdo con el nivel y la experiencia escolar previa de los estudiantes en geometría y con programas de geometría dinámica. Se busca que construyan, exploren, descubran propiedades, formulen conjeturas y justifiquen algunas de ellas con los hechos geométricos iniciales y los que se derivan de nuevos problemas. Inicialmente se solicita que justifiquen los procedimientos de construcción y luego las conjeturas que resultan de explorar las construcciones.

Generalmente, las secuencias comienzan solicitando a los estudiantes construir un segmento congruente a uno dado. Esta tarea puede ser más o menos exigente según si se ponen condiciones especiales o no. En la Figura 2 se presentan tres opciones de pregunta y las construcciones realizadas por estudiantes de quinto de primaria junto con la argumentación que dieron acerca de por qué los segmentos son congruentes, todas basadas en el HG1.

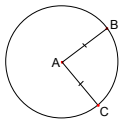
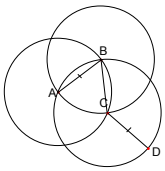
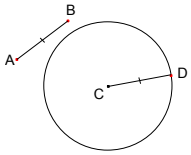
Problema	Construcción	Justificación
Construir un segmento congruente al segmento AB dado.		María: *Los segmentos AB y AC son congruentes porque son radios de la misma circunferencia.*
Construir un segmento congruente al segmento AB dado cuyos extremos no sean A ni B.		Sebastián: *Los segmentos AB y CD son congruentes porque AB y BC son radios de la misma circunferencia y BC y CD son radios de una misma circunferencia.*
Construir un segmento congruente al segmento AB y tal que C sea uno de sus extremos.		Laura: *Los segmentos AB y BC son congruentes porque hice una circunferencia con centro en C y radio el segmento AB* (opción compás).

Figura 2.

Los argumentos de María, Sebastián y Laura son deductivos, como se demuestra al transformar las proposiciones que los componen pero no están explícitos todos los elementos del argumento. En el caso del argumento de María, se concluye una afirmación (los segmentos *AB* y *AC* son congruentes) que se deriva de unos datos (segmentos *AB* y *AC* son radios de una circunferencia)

y ambas proposiciones se conectan con la palabra "porque". Para construir el argumento deductivo hay que invertir el orden de las proposiciones y hacer explícito el HG1 como garantía de que la afirmación se deriva de los datos (Figura 3). Es una transformación que puede hacer María, con la guía del profesor.

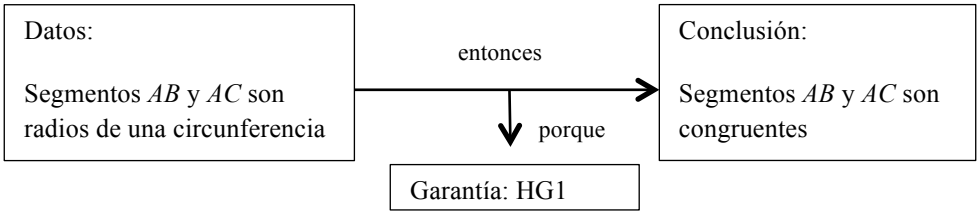


Figura 3.

El argumento de Sebastián es un poco más complejo pues implica la propiedad transitiva de la congruencia (Figura 4). En el caso de Laura basta afirmar que los $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ miden lo mismo, por lo que son congruentes, usando como garantía la definición de congruencia.

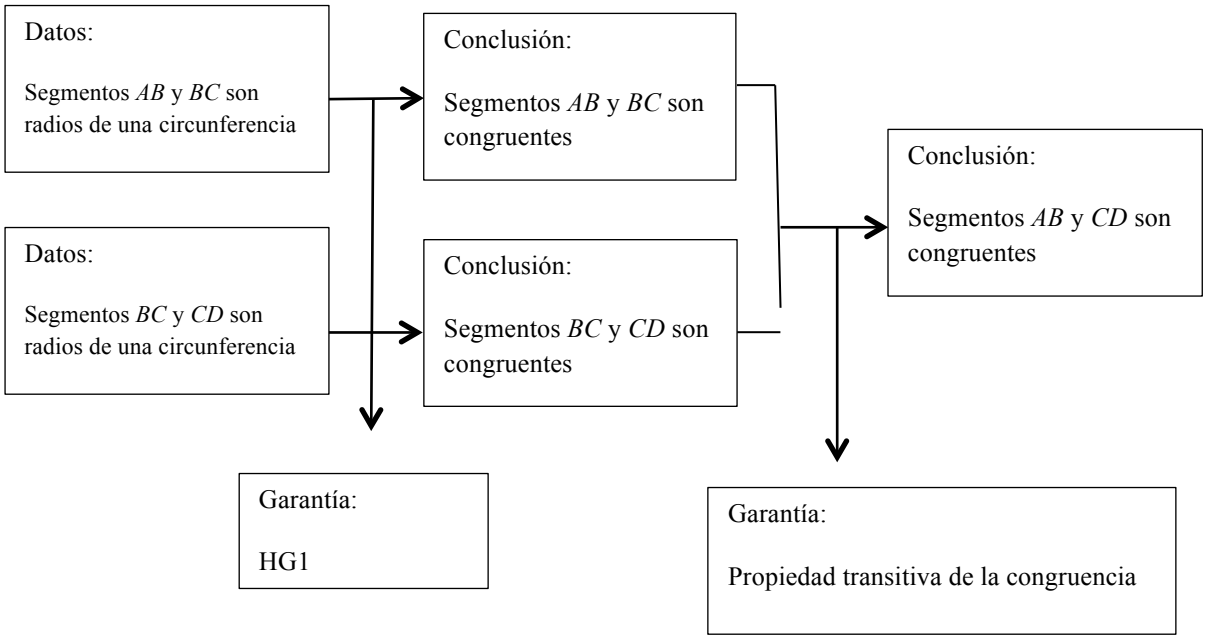


Figura 4.

Después de resolver el problema de construir un segmento congruente a otro, se pide a los estudiantes que construyan varios puntos que equidisten de los extremos de un segmento *AB* o de dos puntos dados, *A* y *B,* e investiguen las propiedades del lugar geométrico de tales puntos. Los estudiantes, con los que hemos experimentado la propuesta, han procedido de varias formas: ubicar varios puntos en la pantalla, medir la distancia de ellos a los puntos *A* y *B* y arrastrarlos

hasta obtener una medida aproximadamente igual; colocar un punto, medir la distancia del punto a *A* y a *B*, activar la huella del punto y arrastrarlo hasta obtener un conjunto de puntos que equidiste de *A* y *B*; construir varias circunferencias que pasen por los dos puntos *A* y *B*, y señalar los centros. Este problema de construcción se constituye en una oportunidad para identificar y definir el punto medio de un segmento, construir la mediatriz de un segmento e introducir la definición de mediatriz de dos maneras: como los puntos que equidistan de dos puntos fijos y como la recta perpendicular a un segmento que pasa por su punto medio. En la Figura 5 se presentan las construcciones blandas (obtenidas con el arrastre) (Healy, 2000) hechas por estudiantes de grado octavo, la construcción robusta (que no se modifica con el arrastre) de la mediatriz y los hechos geométricos[2] que se introducen a partir de este problema.

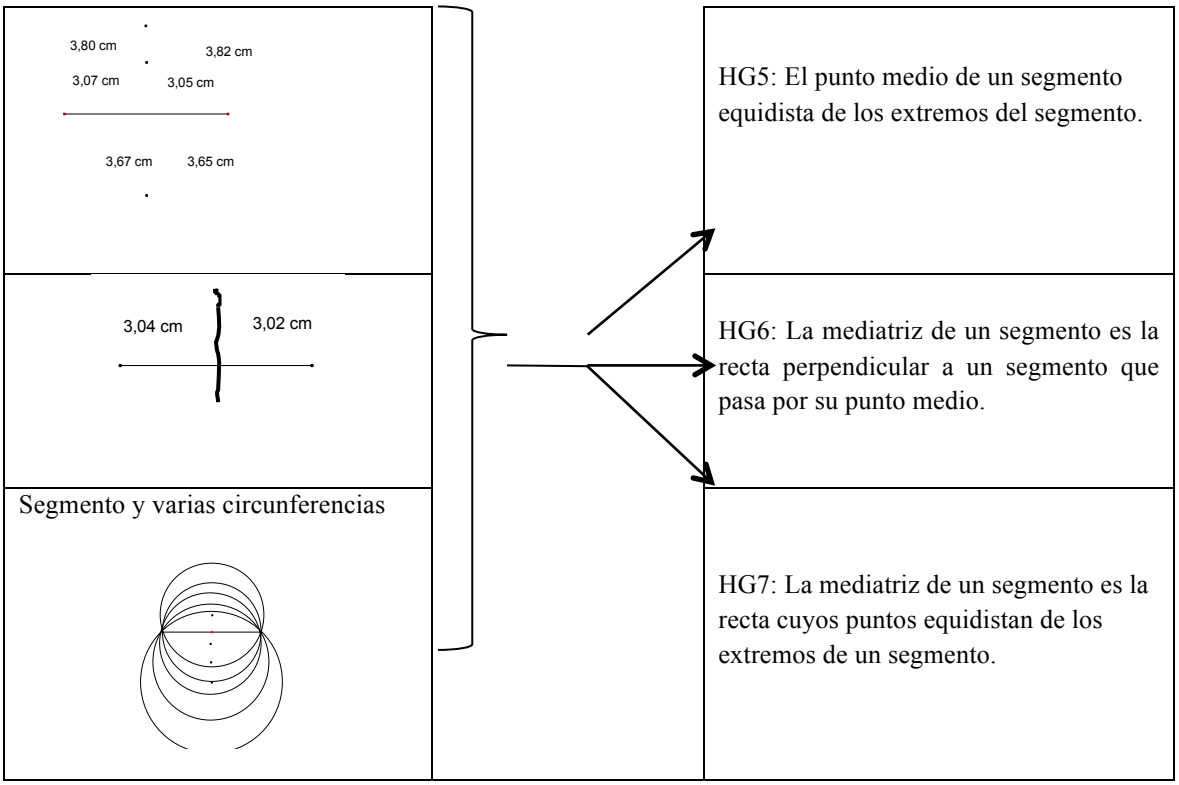


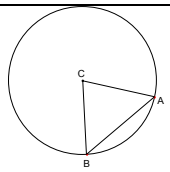
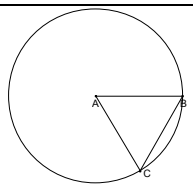
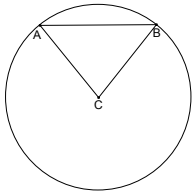
Figura 5.

A partir de allí, las secuencias pueden continuar por varios caminos. A continuación presentamos tres opciones y mencionamos, en cada caso, aspectos relacionados con el uso del programa de geometría dinámica y la mediación semiótica del profesor.

Ejemplo de secuencia para cuarto y quinto de primaria

[2] En esta conferencia numeramos en orden consecutivo los hechos geométricos para facilitar la lectura del texto, pero no pretendemos insinuar que estos se deben introducir en ese orden. Las secuencias de problemas pueden variar y por lo tanto la introducción de hechos geométricos, de acuerdo a circunstancias particulares de cada implementación.

Se propone el problema de construir triángulos isósceles. Así como en el caso de la construcción de segmentos congruentes, se puede decidir el grado de dificultad de la tarea o se puede ir modificando éste de acuerdo al desempeño de los estudiantes. En la Figura 6 ilustramos las construcciones realizadas por tres niños, de acuerdo a variantes en el enunciado del problema. También incluyo la justificación que dieron a la propuesta de construcción, la cual asumimos como una conjetura de la forma: si el triángulo se construye de tal forma que… entonces es isósceles.

Problema	Construcción	Justificación
Construir un triángulo isósceles.		Juan: *El triángulo es isósceles porque los lados CA y CB son congruentes ya que son radios de una circunferencia y los radios de una circunferencia son congruentes.* (HG1)
Construir un triángulo isósceles que tenga al segmento AB como uno de los lados congruentes.		Alicia: *El triángulo ABC es isósceles porque AB y AC son congruentes ya que son radios de una circunferencia y los radios de una circunferencia son congruentes* (HG1)
Construir un triángulo isósceles en el que el segmento AB no es congruente a otro lado del triángulo.		Estela: *El triángulo ABC es isósceles porque CA y CB son congruentes ya que C equidista de los extremos de un segmento* (HG1 - HG7)

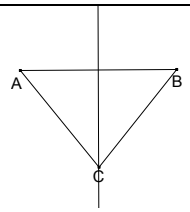
		Beatriz: *El triángulo ABC es isósceles porque CA y CB son congruentes ya que C está en la mediatriz de AB porque hice la recta que es perpendicular al segmento por el punto medio* (HG6) *y los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos de un segmento* (HG7)

Figura 6.

La secuencia continúa con la construcción de triángulos equiláteros, rombos, cuadrados y rectángulos. Las herramientas de control HG1, HG2, HG3, HG4 y los hechos geométricos HG6 y HG7 son suficientes para justificar el resultado de las construcciones. Así, es posible organizar los hechos geométricos en un sistema teórico local (Perry, Samper, Molina, Camargo, Echeverry, 2012), en donde los hechos que se aceptan sin justificar se consideran como postulados y los que se justifican son los teoremas del sistema. En la Figura 7 ilustramos el uso de un sistema teórico local relacionado con la construcción de triángulos isósceles y equiláteros. Los recuadros en línea continua gruesa, ligados por una flecha, contienen los datos y las afirmaciones que se concluyen de ellos y los recuadros en línea punteada contienen las garantías que permiten afirmar que la conclusión se sigue de los datos.

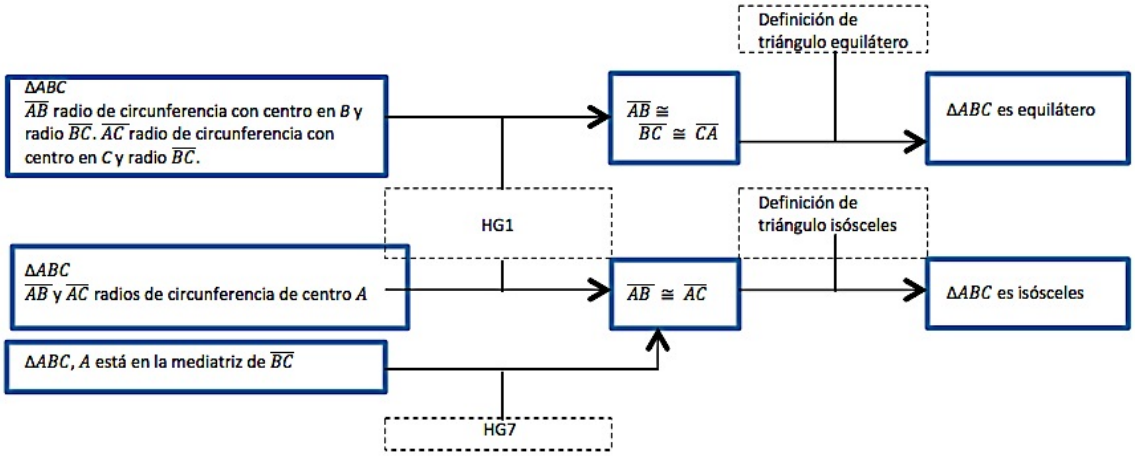
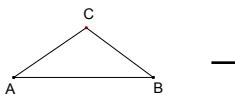
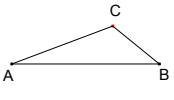
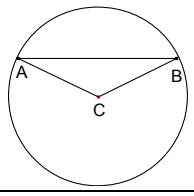
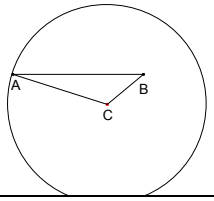


Figura 7.

La posibilidad de aprovechar un programa de geometría dinámica para incentivar el aprendizaje de la demostración se incrementa si los estudiantes ganan confianza en el uso del arrastre como medio de exploración, verificación y control. Cuando se han tenido pocas experiencias con el uso de estos recursos, se tienden a usarlo para hacer construcciones estáticas como si fueran dibujos hechos en lápiz y papel. Es tarea del profesor impulsar a los estudiantes a arrastrar elementos de la figura, analizar permanentemente los invariantes al movimiento e identificar los cambios simultáneos. Por ejemplo, al pedirles que construyan un triángulo isósceles *ABC* a partir de un segmento *AB* que no sea congruente a otro lado del triángulo, es probable que los estudiantes poco experimentados con programas de geometría dinámica hagan una figura blanda (Healy, 2000) que sea un triángulo que perceptualmente tenga dos lados congruentes. Incluso, por la experiencia que han tenido con circunferencias, puede que partan de un segmento *AB* y una circunferencia que pase por *A* y perceptualmente pase por *B* (Figura 8). Sin embargo, al verificar si dicha propiedad se mantienen al arrastrar los vértices se darán cuenta que las medidas de los lados no permanecen congruentes. Así, se estimula el uso de estrategias de construcción geométrica, con base en propiedades conocidas, como la congruencia de los radios de una circunferencia. Por esta vía se incentiva el establecimiento de relaciones geométricas y la identificación de garantías para afirmar que la figura efectivamente es un triángulo isósceles.

	Estrategias que se desestiman porque no soportan el arrastre		
			

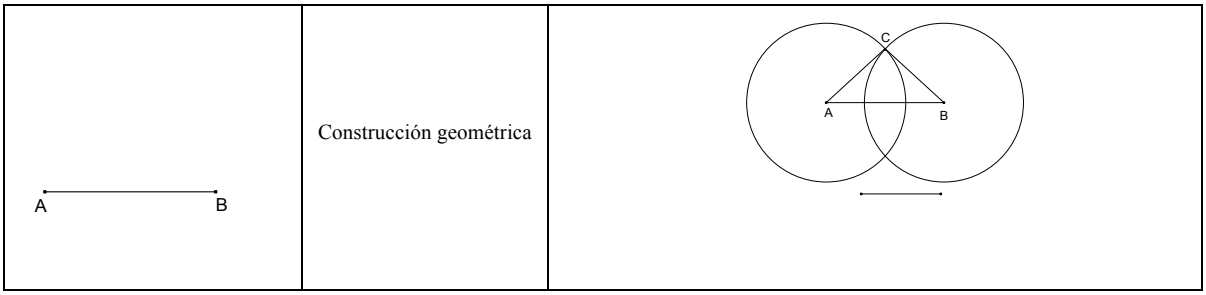


Figura 8.

Cuando los estudiantes aprenden a construir triángulos isósceles que soporten el arrastre se puede combinar el trabajo con el dibujo de figuras en papel y lápiz, haciendo uso del compás. La asociación de la abertura del compás con el radio de una circunferencia, les permite reconocer el invariante que se deriva de su uso, es decir, la congruencia. Adicionalmente, se trabaja en el reconocimiento del estatus que un objeto geométrico puede tener, por ejemplo, puede ser a la vez radio de dos circunferencias o el lado de un triángulo. Con ello, se sientan las bases de la geometría de las relaciones.

El trabajo realizado con estudiantes de cuarto de primaria nos ha permitido percatarnos de algunas acciones que están bajo la responsabilidad del profesor, para favorecer la justificación deductiva:

- La indagación permanente por el porqué de los hechos y las afirmaciones que formulen para que los estudiantes experimenten un ambiente de clase centrado en la búsqueda de propiedades, más que en su memorización.
- La institucionalización de los hechos geométricos de tal forma que los estudiantes puedan recurrir a ellos al momento de justificar sus afirmaciones. Si los estudiantes tienen claro de cuál conjunto de hechos pueden escoger las garantías, podrán más fácilmente construir pasos de deducción.
- La exigencia de expresar completamente los pasos de deducción mencionando explícitamente los datos iniciales, la afirmación que desean justificar y la garantía. Así, poco a poco irán ganado en las formas convencionales para argumentos e irán desestimando garantías como la percepción visual.
- La introducción de terminología geométrica y la notación para hacer referencia a puntos, segmentos, vértices, lados, congruencia, etc. Esto facilita la comunicación y permite que los estudiantes expresen más fácilmente sus hallazgos. Incluso hemos visto que el uso de programas de geometría dinámica favorece esta práctica, pues algunos de ellos introducen automáticamente la notación de los puntos construidos.

Ejemplo de secuencia para sexto y séptimo:

Después de haber trabajado la construcción de segmentos congruentes, se propone el problema de construir dos segmentos congruentes que se bisequen y descubrir qué cuadrilátero se forma al unir los extremos mediante segmentos que no se intersequen. En la Figura 9 se presentan los pasos que usualmente siguen los estudiantes y los hechos geométricos que se concluyen.

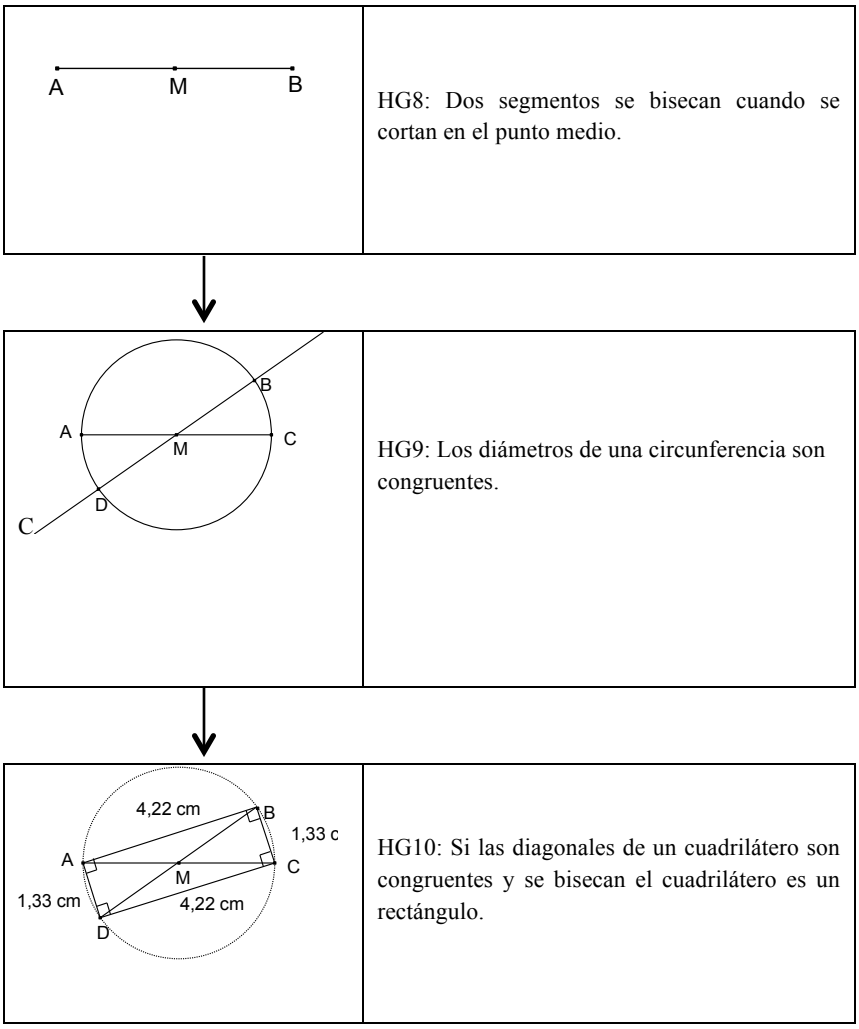
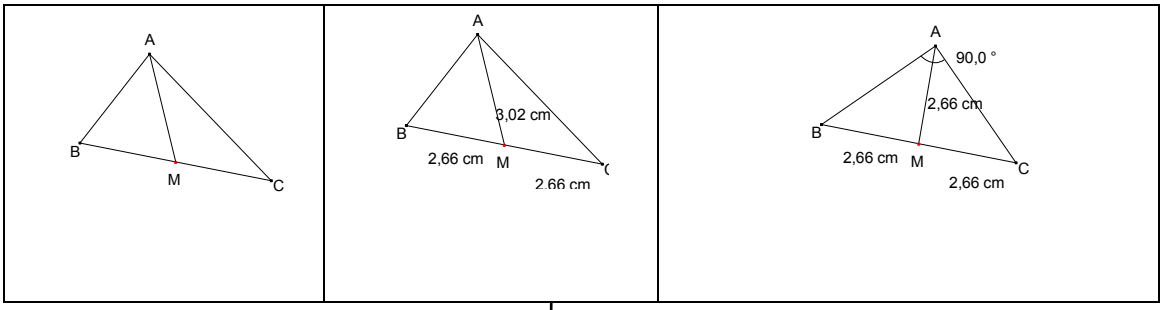


Figura 9.

A continuación, se propone el problema de descubrir en qué triángulos el punto medio de un lado equidista de los tres vértices. Usualmente los estudiantes construyen un triángulo que denominaremos ABC, el punto medio M de un lado, $\overline{BC}$ y el segmento cuyos extremos son M y A. Toman las medidas MB, MC, MA, arrastran los vértices del triángulo y se dan cuenta que los segmentos MB, MC y MA son congruentes cuando el ángulo A es recto. Este problema da lugar al HG 11: Si en el triángulo ABC con M punto medio del lado BC, se cumple que M equidista de

los puntos A, B y C (o los segmentos $MB, MA\ y\ MC$ son congruentes), entonces el triángulo ABC es rectángulo y el ángulo A es recto (Figura 10).



HG 11: Si en el triángulo ABC con M punto medio del lado BC, se cumple que M equidista de A, B y C entonces el triángulo ABC es rectángulo y el ángulo A es recto.

Figura 10.

Luego se propone un problema que da lugar a una conjetura que puede justificarse con los hechos geométricos disponibles. Se pide construir una circunferencia de centro en el punto *O* y diámetro *AC,* y ubicar un punto *B* en la circunferencia. Después se solicita descubrir una propiedad del triángulo *ABC* y justificarla. En este caso no se trata de justificar el resultado de una construcción, sino de demostrar que el ángulo *B* es recto. Para ello, los estudiantes pueden valerse principalmente de los hechos HG9, HG10 y HG11. La justificación usando el HG11 es casi inmediata, por lo que conviene pedirles otra vía. En la Figura 11 presentamos el uso de un posible sistema teórico local, construido a partir de los hechos geométricos que surgen de los problemas propuestos, para demostrar otros hechos geométricos. Para no extendernos en la explicación, no incluímos algunos de los hechos que aparecen en la figura como la definición de figuras inscritas en circunferencias, la definición de rectángulo y de ángulo recto. En la parte superior de la figura se avanza en afirmaciones hacia la derecha, usando los hechos geométricos HG1 y HG11 principalmente, como garantía. En la parte inferior se usan los hechos geométricos HG1, HG9 y HG10.

Los tres problemas propuestos en esta sección tienen como característica que, a partir de la construcción, basta hacer una exploración dinámica sencilla para detectar el invariante esperado. De esta manera se aprovecha el programa de geometría dinámica para impulsar la inducción empírica, dado que los estudiantes pueden apreciar una regularidad en múltiples configuraciones que tienen las mismas relaciones geométricas.

La mediación semiótica se centra principalmente en el apoyo a los estudiantes para que encuentren una de las vías para construir la justificación, con base en los hechos geométricos conocidos. Enfocarse en las propiedades geométricas usadas en la construcción y en los hechos

geométricos que se tienen a disposición permite a los estudiantes validar la conjetura que surge del último problema, desarrollando un proceso deductivo.

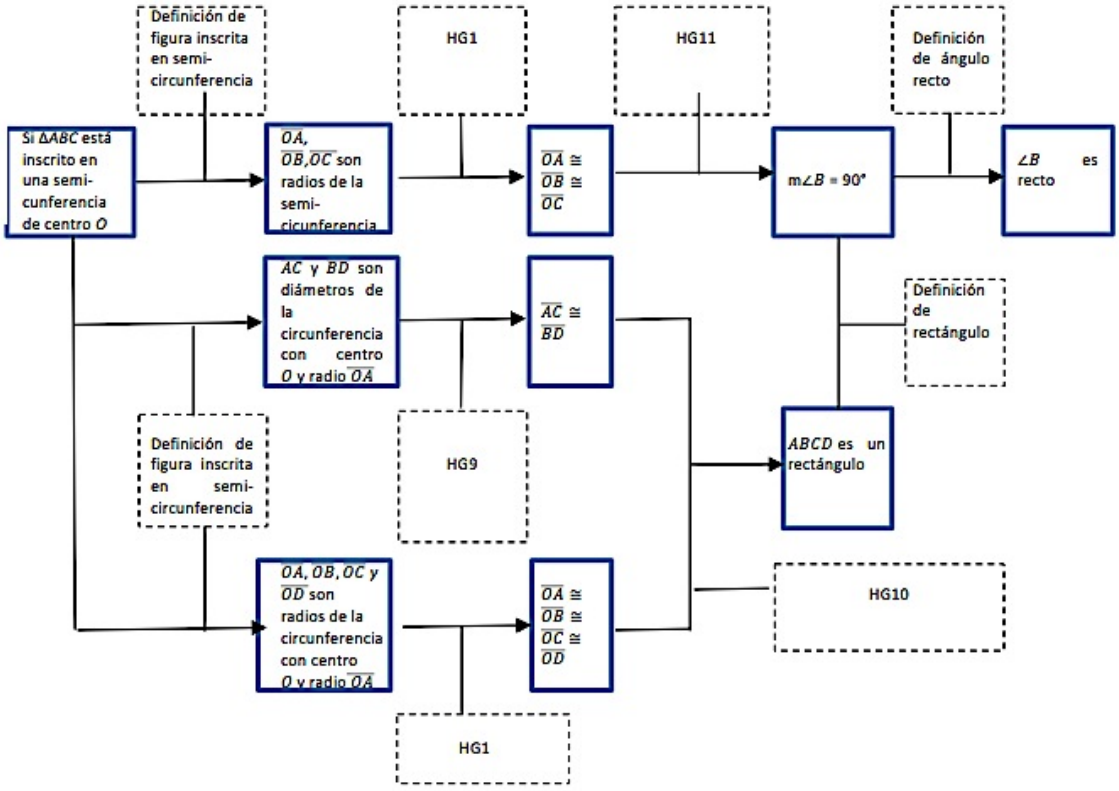


Figura 11.

Ejemplo de secuencia para octavo grado:

Después de construir segmentos congruentes, se proponen los problemas: (i) construir dos rectas perpendiculares m y l y una recta p perpendicular a l; descubrir una relación de las rectas m y p, (ii) construir dos rectas paralelas m y l y una recta p perpendicular a l; descubrir una relación entre las rectas m y p. (Figura 12). Estas construcciones dan lugar a los hechos geométricos HG12 y HG13.

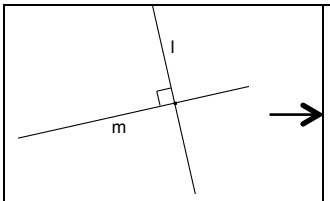
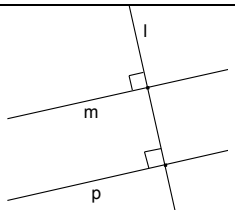
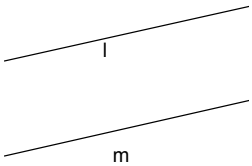
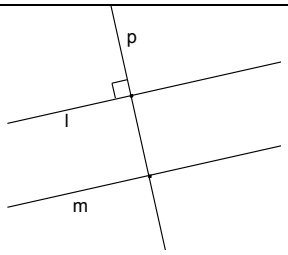
		HG12: Si las rectas m y p son a l entonces m y p son paralelas.
		HG13: Si las rectas l y m son paralelas y l es perpendicular a p entonces m y p son perpendiculares.

Figura 12.

El problema principal en esta secuencia es encontrar cuadriláteros cuyas mediatrices se corten en un punto. Es probable que estudiantes con poca experiencia con geometría dinámica comiencen analizando cuadriláteros conocidos como el rectángulo, el rombo o el trapecio. A continuación presento algunas propuestas de solución de estudiantes:

- *Sebastián hace un rectángulo mediante una construcción robusta, a partir de un segmento.* Al trazar las mediatrices, se da cuenta que éstas coinciden dos a dos. La pregunta por la concurrencia se transforma en tratar de justificar por qué las mediatrices de lados opuestos del rectángulo coinciden. Los hechos geométricos HG12 y HG13, la definición de distancia entre dos rectas y el HG5 permiten justificar este hecho (Figura 13). Una vez justificado que las mediatrices del rectángulo concurren, el profesor le pide que encuentre una propiedad del punto de corte de las mediatrices. Por esta vía, Sebastián usa el HG7 para justificar que los vértices del rectángulo están en una circunferencia con centro en el punto de corte de las mediatrices.

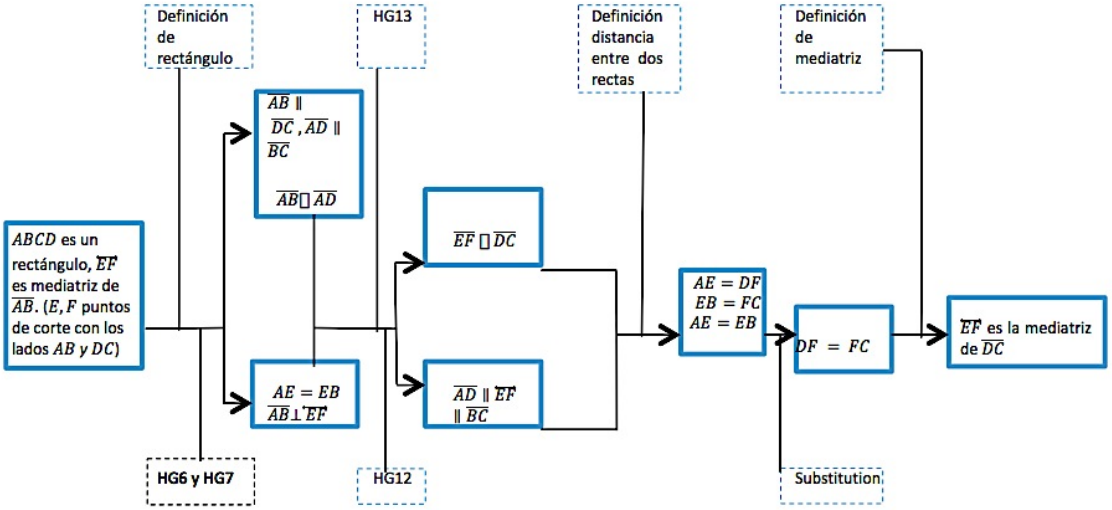


Figura 13.

- *Mónica hace un rombo, mediante una construcción robusta.* Tan pronto construye la tercera mediatriz se da cuenta que en los rombos no se cumple la propiedad pedida.
- *Sara hace un cuadrado a partir de un polígono regular.* El programa de geometría dinámica deja ver una circunferencia circunscrita al cuadrado y marca su centro (Figura 14). Sara se da cuenta que, al trazar las mediatrices, éstas concurren en el centro de la circunferencia. Se vale de este hecho para justificar que la distancia del punto de corte a los vértices del cuadrado es la misma, pues los segmentos del vértice al centro son radios de la circunferencia (HG2). Usando la propiedad transitiva de la equidistancia, justifica que el centro de la circunferencia es el punto de concurrencia de las mediatrices. (Figura 15).

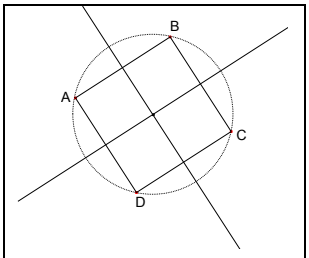


Figura 14.

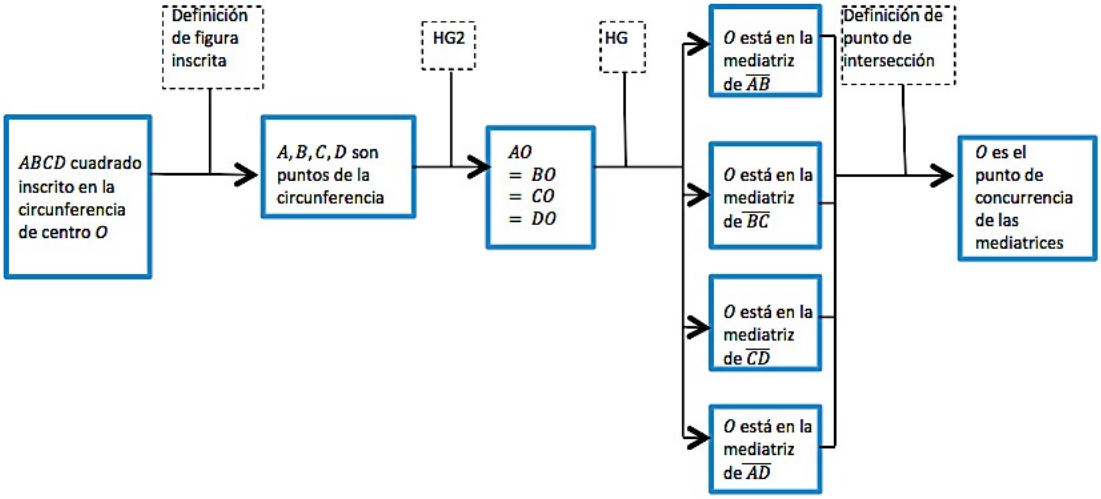


Figura 15.

- *Mario hace un trapecio.* Cuando el profesor insiste en que exploren figuras diferentes al cuadrado y al rectángulo, el estudiante decide explorar un trapecio. Hace una construcción de un cuadrilátero con dos lados opuestos paralelos, traza las mediatrices y usa el arrastre para explorar en qué casos éstas concurren. Se da cuenta que las mediatrices se intersecan en un punto sólo cuando este es isósceles. Ante la insistencia del profesor para que Mario justifique que las mediatrices concurren construye una circunferencia con centro en el punto de concurrencia, menciona que el cuadrilátero está inscrito en una circunferencia y se refiere al HG2 y HG7 para justificar que el centro está . en las respectivas mediatrices (Figura 16).

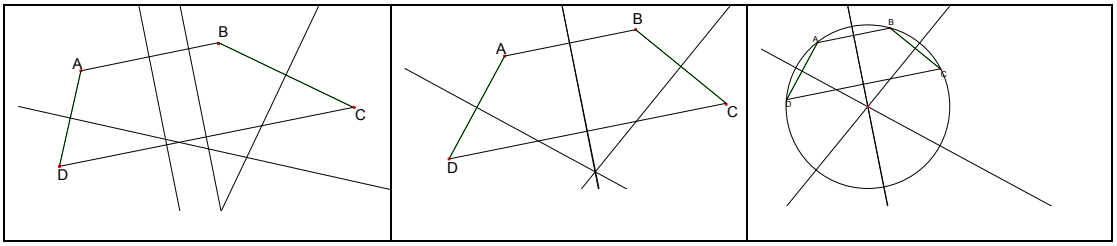


Figura 16.

- *Andrea hace un cuadrilátero inscrito en una circunferencia.* La socialización del trabajo realizado por Sebastián, Sara y Mario impulsa a Andrea a hacer un cuadrilátero sin una propiedad especial, trazar las mediatrices y arrastrar los vértices hasta que las mediatrices concurran. Una vez lograda la configuración, decide construir la

circunferencia circunscrita y usa los hechos geométricos HG2 y HG7 para justificar que todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia cumple la propiedad (Figura 17).

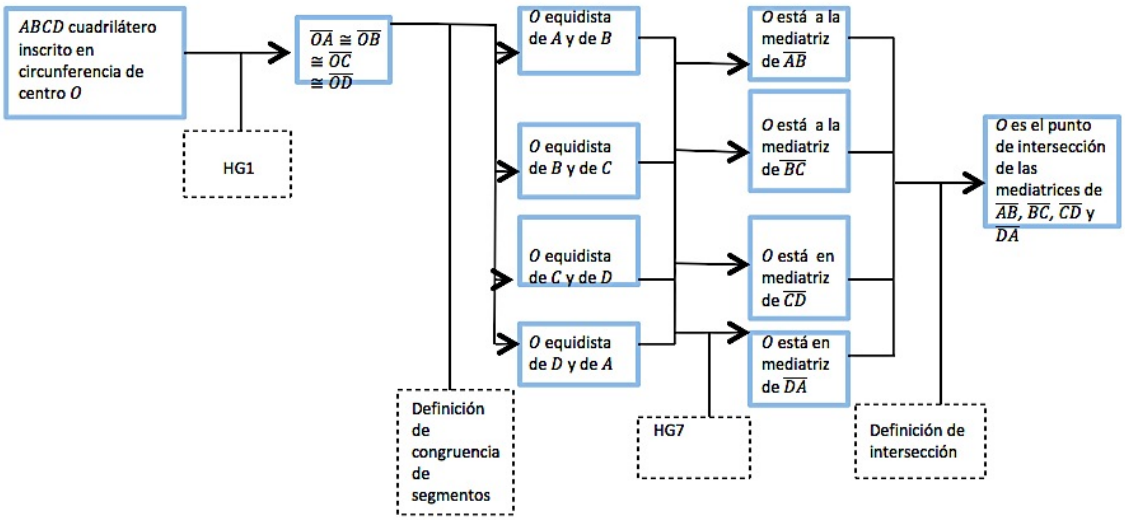


Figura 17.

El profesor guía el trabajo de los estudiantes, promueve la socialización de las propuestas y destaca en ellas el papel que juega la circunferencia circunscrita. Para generalizar los resultados les propone partir de una circunferencia y construir un cuadrilátero inscrito en ella. Con su ayuda, los estudiantes justifican porqué en cualquier cuadrilátero cíclico las mediatrices concurren.

Reflexión final

La investigación sobre la enseñanza apoyada por tecnología ha abarcado el análisis de propuestas para la enseñanza de conceptos geométricos y para impulsar en los estudiantes el desarrollo de procesos de conjeturación y justificación. En todos los casos, los investigadores señalan que la selección de tareas es uno de los aspectos más críticos para sacar provecho del potencial de las tecnologías. Laborde (2001) distingue cuatro clases de tareas propuestas por los profesores que usan ambientes de geometría dinámica: (i) Tareas en las cuales el programa favorece la elaboración de las representaciones, pero en esencia no altera lo que los estudiantes podrían hacer con lápiz y papel; por ejemplo, producir figuras y medir sus elementos. (ii) Tareas en las cuales el programa de geometría dinámica favorece la exploración y el análisis; por ejemplo, identificar relaciones entre las partes de una figura geométrica a través del arrastre. (iii) Tareas que tienen su contraparte en papel y lápiz que pueden ser resueltas de manera diferente en cada ambiente; por ejemplo, una tarea de construcción puede ser resuelta en un programa de geometría dinámica mediante una transformación. (iv) Tareas que sólo pueden ser resueltas en

un ambiente de geometría dinámica; por ejemplo, reconstruir una figura dada, después de haber analizado su comportamiento dinámico para identificar propiedades. En los dos primeros casos, la mediación del programa facilita la realización de tareas usuales. En los últimos casos las tareas cambian debido a la mediación, en relación con las usuales, y se asemejan más a una investigación o una modelación, modificando la naturaleza del conocimiento matemático que se alcanza en la clase.

En esta conferencia hemos propuesto otro tipo de intervención en el aula: diseña un conjunto de problemas articulados de tal forma que algunas de las propiedades que se descubren a partir de la exploración dinámica se utilicen como herramientas de construcción, verificación y control para descubrir, verificar y justificar propiedades que se descubren en la resolución de otros problemas. Consideramos que es una vía para introducir tempranamente a los estudiantes en la actividad matemática de justificar sujeto a un sistema teórico que se va construyendo colectivamente a partir de los hechos geométricos que la comunidad de la clase va aceptando. Ello es posible gracias a la mediación del profesor quien impulsa a los estudiantes a ir más allá de la impresión perceptual y la verificación empírica, cuando los estudiantes tienen los hechos geométricos que les sirven de garantía para justificar las afirmaciones que concluyen.

Referencias bibliográficas

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interaction with robust and soft Cabri constructions. *Proceedings of the 24th PME International Conference,* 1, 103 – 117.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry task with Cabri-geometry. *International Journal of computers for mathematical learning,* 6, 283 – 317.

Perry, P., Samper, C., Molina, Ó., Camargo, L.; Echeverry, A. (2012). La geometría del ángulo desde otro ángulo: una aproximación metodológica alternativa. *Épsilon. Revista de Educación Matemática,* 29(3), n°82, 41-56.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L.; Molina, Ó. (en prensa). *Geometría Plana*. Bogotá: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas

Jorge Enrique Fiallo Leal

Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.
jfiallo@uis.edu.co

Resumen

Presentamos un síntesis de las principales investigaciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración, con el ánimo de aportar fuentes de consulta a la comunidad de educadores en matemáticas interesados en el tema. Planteamos una estructura organizativa que incluye las siguientes líneas de investigación: consideraciones histórico–epistemológicas; la demostración en el currículo; concepciones y dificultades de los estudiantes al demostrar; relaciones entre argumentación y demostración; y propuestas didácticas para la enseñanza de la demostración.

Introducción

Los estudios acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración se han desarrollado desde perspectivas diferentes, que incluyen aspectos históricos, epistemológicos, psicológicos, cognitivos, curriculares y didácticos, lo que da lugar a diferentes clasificaciones o estructuras organizativas para la presentación de las principales corrientes investigativas en el campo. En la conferencia presentamos una síntesis de importantes publicaciones que dan cuenta de investigaciones sobre el aprendizaje y la enseñanza de la demostración matemática. La estructura presentada está organizada en cinco líneas de trabajo, derivadas de las caracterizaciones realizadas por Mariotti (2006), Harel y Sowder (2007) y Boero (2007).

También se tienen en cuenta las investigaciones que reconocen que las matemáticas son una producción social realizada por los matemáticos profesionales que se ponen de acuerdo sobre ciertas normas. Además, investigadores en educación matemática llevan estas ideas al mundo de la enseñanza y proponen considerar los grupos de estudiantes de un aula como una comunidad que puede adoptar sus propios acuerdos para construir su concepción de demostración matemática. Un ejemplo de ello lo tenemos en Camargo (2010). Desde este punto de vista, con el que coincidimos, la actividad de producir una demostración es una práctica social cuyas características dependen del ámbito institucional en donde se lleva a cabo.

Investigaciones en la línea histórico - epistemológica

La línea de investigación se sustenta con planteamientos como los de Balacheff (2008) quien propone que las diferentes concepciones sobre la demostración matemática deben ser explicadas y relacionadas para lograr una comprensión global acerca de la naturaleza de la demostración, una coherencia en el discurso acerca de ésta y significados compartidos entre investigadores en educación matemática. Como un aporte a la distinción acerca del estatus otorgado a la demostración por diversos investigadores, Balacheff (2008) distingue cinco posiciones diferentes:

- *La demostración matemática es un tipo universal y paradigmático de validación del conocimiento*. En ese sentido, la demostración matemática debido a sus relaciones privilegiadas con la lógica, podría ser vista como una referencia para procesos de validación en otros ámbitos y como el mejor ejemplo de racionalidad. Esto parece haber sido sistematizado de manera bastante radical por los educadores matemáticos estadounidenses de la primera parte del siglo pasado, dando lugar a un formato de representación a dos columnas, a favor un enfoque analítico, que facilita la evaluación de la demostración por el estudiante y el profesor (Balacheff, 2008).

- *La demostración matemática tiene una naturaleza idiosincrásica y particular, ligada al contenido matemático*. El esquema de demostración de una persona es algo completamente subjetivo, que puede variar de una persona a otra, de una cultura a otra y de una generación a otra. Así, los esquemas de demostración son idiosincrásicos y varían de un campo a otro, incluso dentro de las matemáticas. (Harel y Sowder, 1998). Esta visión de la demostración ha sido utilizada y/o adaptada por algunos investigadores para proponer modelos para el estudio de la demostración en la educación matemática (Antonini y Mariotti, 2008; Fiallo, 2006, 2010; Ibañes y Ortega 2003, 2004; Marrades y Gutiérrez, 2000; Stacey y Vincent, 2008; Stylianides, 2011).

- *La demostración es una práctica matemática por excelencia ubicada en el corazón de ésta*. La demostración es connatural al pensamiento matemático y el razonamiento deductivo, que sustenta el proceso de validar, diferencia las matemáticas de las ciencias empíricas. El proceso de construcción de una demostración es claramente complejo y riguroso: se trata de partir de lo que se sabe, las propiedades matemáticas que ya se conocen o se pueden asumir, identificar lo que se va a deducir y organizar un conjunto de transformaciones necesarias para inferir lo segundo a partir del conjunto inicial de propiedades, usando esquemas de

razonamiento lógico. (Healey y Hoyles, 1998). Esta visión ha sido compartida y complementada por investigadores ingleses (Hoyles y Küchemann, 2002; Küchemann y Hoyles, 2001; Tall, 1998).

- *La demostración es una herramienta necesaria para las matemáticas, cuya utilidad se percibe en sus aplicaciones*. La demostración adquiere significado en el juego dialéctico entre formular una demostración y comunicar su significado (Hanna y Jahnke, 1996). Esta dialéctica debería explotarse en la enseñanza combinando procesos sociales de verificación con la elaboración de demostraciones en el marco de sistemas teóricos. En ese sentido, la contribución más importante de la demostración a la educación matemática es la comunicación de la comprensión matemática. Un currículo de matemáticas que tiene como objetivo reflejar el verdadero papel de la demostración rigurosa de las matemáticas debe presentarla como una herramienta indispensable de las matemáticas y no en la esencia misma de la ciencia (Hanna y Jahnke, 1996).

- *La demostración es un campo autónomo específico de las matemáticas*. Un teorema3 sólo es aceptable porque es sistematizado en una teoría, con una total autonomía de cualquier verificación o argumentación a nivel empírico (Mariotti, 1997). Esta posición se basa claramente en el reconocimiento de un característica específica de las matemáticas: la organización teórica de acuerdo a axiomas, definiciones y teoremas (Balacheff, 2008).

Por su parte, de Villiers (1993) propone como funciones de la demostración la verificación, explicación, sistematización, descubrimiento y comunicación. El análisis se efectúa con base en consideraciones epistemológicas y en el testimonio personal de matemáticos activos. Plantea que la convicción de un hecho no se consigue exclusivamente con una demostración, ni la única función de la demostración es la de verificación/convicción; esta función no tiene sentido para los estudiantes en los casos evidentes o fácilmente verificables, mientras que la función de explicación es más significativa. Según el autor, en el ámbito educativo debe ponerse más atención a las funciones de descubrimiento y comunicación. La función de sistematización debe dejarse para niveles más avanzados y debería ser omitida en un curso introductorio de la demostración.

Investigaciones en la línea de la demostración en el currículo

En esta sección nos referimos a investigaciones que tienen como meta proporcionar una descripción del estatus de la demostración en la escuela y su relación con el currículo. Algunos

[3] "Unidad compuesta de un enunciado matemático, una demostración y una teoría matemática, donde la forma condicional del enunciado desempeña un papel principal" (Mariotti y otros, 1997).

interrogantes que motivan los estudios investigativos son: ¿cuál es el estatus de la demostración en la escuela? (Mariotti, 2006), ¿qué influencia tienen las concepciones epistemológicas acerca de la demostración en las diversas opciones curriculares? ¿qué relación guardan el aprendizaje de la demostración en la escuela y las concepciones de los estudiantes acerca de la demostración con supuestos históricos y epistemológicos subyacentes en el currículo? (Boero, 2007). A continuación sintetizamos algunos de los principales estudios representativos de esta línea.

Battista y Clements (1995) proponen que el currículo de secundaria debe estimular a los estudiantes a refinar su pensamiento gradualmente, conduciéndolos a comprender los defectos de las justificaciones visuales y empíricas para que descubran y comiencen a usar componentes críticos del pensamiento formal. Al respecto Godino y Recio (2001) plantean que la enseñanza de las matemáticas debe procurar que los estudiantes controlen y dominen las diversas prácticas argumentativas, así como ser conscientes de las relaciones dialécticas entre las mismas.

Healy y Hoyles (1998, 2001) presentan los resultados de un proyecto nacional sobre las concepciones de demostración que tienen estudiantes entre 14 y 15 años, en Inglaterra y Gales. A partir de un cuestionario aplicado masivamente, que incluía preguntas de álgebra y geometría, examinan la relación entre el currículo nacional, las concepciones que manifiestan los estudiantes, así como su desempeño. Las respuestas del cuestionario sirvieron a Küchemann y Hoyles (2001) para sacar conclusiones sobre la influencia del tema (álgebra o geometría), el género y el conocimiento matemático general en las concepciones acerca de la demostración y en el desempeño al demostrar. Los autores señalan que las respuestas a los ítems cuyos temas eran más familiares a los estudiantes estaban sujetas a la influencia de los libros de texto más que al conocimiento matemático general, mientras que las respuestas a los ítems menos familiares (geometría), estaban más sujetas a la variación entre clases; en un estudio complementario al anterior, los autores caracterizan las diferentes respuestas de dos estudiantes con diferentes visiones de demostración y de matemáticas. En un estudio local, usando la idea de evaluación propuesta en Küchemann y Hoyles (2001), Fiallo y Gutiérrez (2007) presentan los resultados cualitativos y cuantitativos de una evaluación diagnóstica aplicada a 100 estudiantes de 10º grado de bachillerato (14 – 16 años) de tres instituciones de Santander (Colombia), mediante el análisis de los tipos de demostraciones que realizan los estudiantes al inicio del curso. Con un objetivo similar, Szendrei-Radnai y Török (2007) suministran información sobre la existencia de situaciones alternativas y la influencia de "agentes" externos a la configuración escolar húngara usual (contextos matemáticos y cotidianos) que contribuyen a proporcionar buenas oportunidades para que los estudiantes puedan hacer frente a una demostración de una manera coherente y proporcionan una imagen parcial y relativa de las concepciones de los estudiantes en Hungría acerca de la demostración al entrar en la Universidad, como efecto del acercamiento escolar.

Ibañes y Ortega (2004) realizan un análisis curricular del tratamiento de las demostraciones trigonométricas revisando los libros de texto españoles de primer curso de bachillerato. Usan como categorías de análisis de contenido matemático las definidas para ese fin en Ibañes y Ortega (2003). Por esta razón, estudian los esquemas de demostración, las técnicas empleadas en las demostraciones -método, estilo y modo-, las funciones de la demostración, la explicitación de procesos, las expresiones que se utilizan y si en los textos se hacen consideraciones globales del proceso seguido en la demostración. En un trabajo similar, Stacey y Vincent (2008) usan la definición de demostración y los esquemas de demostración de Harel y Sowder (2007) para analizar los modos de razonamiento explícito en las explicaciones, justificaciones y demostraciones de varios tópicos en cuatro libros de texto australianos. Concluyen que todos los libros de texto hacen algún intento de explicar cada proposición. Ningún libro de texto presenta "reglas sin razón". Sin embargo, parece ser que el único objetivo al deducir una regla es ponerla en práctica en ejercicios, en lugar de utilizar las explicaciones como una herramienta de pensamiento. Las explicaciones son muy cortas y sólo presentan aspectos esenciales del razonamiento formal, por lo que los estudiantes deben acudir a los profesores para comprenderlas, aunque el material proporcionado requiere de profundización en el conocimiento matemático y pedagógico del contenido por parte de los profesores. Algunos de los recursos electrónicos que se agregan, incluyendo demostraciones geométricas dinámicas y plantillas para la construcción, son para llenar algunas lagunas en las explicaciones.

Investigaciones en la línea de concepciones y dificultades de los estudiantes al aprender a demostrar

En este grupo ubicamos investigaciones que buscan obtener una mejor idea sobre los procesos relacionados con el aprendizaje de la "demostración" y aportan respuestas a interrogantes como ¿cuáles son las actuales concepciones de la demostración de los estudiantes? (Harel y Sowder, 2007) ¿cuáles son las principales dificultades que encaran los estudiantes en relación a la demostración? y ¿cuál puede ser el origen de tales dificultades? (Mariotti, 2006; Harel y Sowder, 2007). A continuación presentamos trabajos de investigación representativos de esta línea.

Balacheff (1988b) presenta un estudio experimental acerca de las concepciones de demostración de los estudiantes, desde el punto de vista de las prácticas matemáticas. Plantea la siguiente clasificación para las concepciones: *empirismo ingenuo, experimento crucial, ejemplo genérico y experimento mental*. Las tres primeras corresponden a demostraciones empíricas y la última a demostraciones deductivas informales, La diferencia entre las demostraciones empíricas es la forma como los estudiantes seleccionan los ejemplos: En el empirismo ingenuo, el estudiante busca, muchas veces de manera aleatoria, uno o varios ejemplos, que son percibidos como casos aislados. En el experimento crucial, la demostración se basa en la concepción de que todos los

ejemplos se comportarán de la misma manera, por lo que el estudiante elige ejemplos de manera cuidadosa para que no sean "especiales" y verifica en ellos la conjetura cuya veracidad quiere demostrar. En el ejemplo genérico, el estudiante hace una búsqueda cuidadosa de ejemplos, que son representantes de sus clases y portadores de propiedades abstractas. La principal característica del experimento mental es que los ejemplos ya no forman parte de la demostración, sino que son un complemento que ayuda al estudiante a encontrar propiedades y relaciones deductivas para construir la demostración.

Ibañes y Ortega (2003) presentan un estudio sobre el reconocimiento de diferentes procesos matemáticos por parte de estudiantes de primer curso de bachillerato, entre los cuales está la demostración. En su estudio muestran que los estudiantes van evolucionando en el reconocimiento, distinción e identificación de las demostraciones matemáticas, basados en razones externas al proceso y en las funciones que le asignan al mismo, logrando una caracterización cada vez mejor del mismo. Cuando ellos se fijan en las funciones de la demostración, la de explicación es la que más consideran. Los estudiantes que no han recibido una instrucción específica sobre la aplicabilidad de los teoremas no son conscientes de esta posibilidad e incluso creen que se pueden encontrar ejemplos que no satisfagan un teorema ya demostrado. Antonini y Mariotti (2008), a partir de la noción de teorema de Mariotti y otros (1997), proponen un modelo para ser usado en la observación, el análisis y la interpretación de asuntos didácticos y cognitivos relacionados con las argumentaciones y demostraciones indirectas. Plantean que el uso de las expresiones "demostración indirecta", "demostración por contradicción", "demostración por contraposición", "demostración ad absurdum", en los libros de texto, no es claro y uniforme, y puede ser objeto de polémica, incluso entre los matemáticos. Los autores señalan la dificultad de algunos estudiantes para convencerse de la veracidad de alguna conjetura a partir de una demostración por contradicción, debido a la complejidad de la argumentación que soporta la demostración y su lejanía con posibles procesos previos de generación de la conjetura. Dichos autores detectan también que, para muchos estudiantes, las demostraciones por contradicción no cumplen las funciones asignadas a este proceso.

Por otro lado, Harel y Sowder (1998) consideran que las dificultades para aprender a demostrar obedecen a la variedad de formas como los estudiantes se convencen a sí mismos o persuaden a otros de la certeza de una observación. Proponen la noción de "*esquema de demostración*" como una herramienta para analizar las formas de convicción o persuasión y clasifican las demostraciones de los estudiantes en los siguientes esquemas, cada uno con sus respectivas sub-categorías: por convicción externa, empíricos o analíticos. Dichos esquemas son mutuamente exclusivos, pues un argumento de demostración no puede ser de dos tipos a la vez, pero es frecuente que los estudiantes utilicen más de una clase de esquema en diferentes partes de una demostración. Estos autores argumentan que las actividades de aprendizaje que educan el razonamiento de los estudiantes acerca de la demostración son cruciales en el desarrollo

matemático, aún desde los primeros años. Los estudiantes deberían aprender que las demostraciones son, primero que todo, argumentos convincentes, que son un producto de la actividad humana, en la cual ellos pueden y deben participar y que son parte esencial de la actividad matemática. La meta de la enseñanza de las matemáticas es ayudar a los estudiantes a refinar sus propios esquemas de lo que constituye una justificación en matemáticas: desde esquemas dominados por la percepción, la manipulación simbólica y los rituales, hasta esquemas basados en la necesidad lógica, pasando por esquemas basados en la intuición y la convicción personal.

Arzarello y otros (1998) bosquejan un modelo para interpretar las dificultades en los procesos de exploración de situaciones geométricas, cuando se están formulando conjeturas (fase ascendente de la actividad) y produciendo sus demostraciones (fases descendente de la actividad). El modelo está basado en los diferentes tipos de control del sujeto con respecto a la situación, y el paso de una fase a la otra. Estos autores analizan la solución a un problema de demostración poniendo especial atención al momento en que se pasa de la fase ascendente, caracterizada por una actividad empírica que apunta a entender mejor el problema, generar una conjetura o verificarla, hacia una fase descendente, donde se intenta construir una demostración deductiva de la conjetura.

Healy y Hoyles (2000) examinan las concepciones de los estudiantes de la demostración en álgebra, encontrando que los estudiantes sostienen simultáneamente dos concepciones diferentes de demostración. De un lado, prefieren argumentos que pueden evaluar, que les convencen, que le proveen una explicación significativa y que excluyen el álgebra. De otro lado, predomina el argumento empírico en las propias construcciones de demostraciones, aunque la mayoría de estudiantes se da cuenta de sus limitaciones. Otro resultado de este proyecto es reportado en Hoyles y Küchemann (2002), quienes analizan las respuestas a una pregunta escrita sobre la equivalencia de dos enunciados de teoría elemental de números, una implicación lógica y su recíproca, para evaluar la verdad de las afirmaciones y justificar sus conclusiones. Distinguen tres estrategias, empírica, empírica enfocada y deductiva enfocada, que representan cambios en la atención desde un acercamiento inductivo hacia uno deductivo. Estos autores presentan también algunas categorías teóricas para clasificar diferentes tipos de significados que los estudiantes asignan a la implicación lógica y las razones que sustentan estos significados. Las categorías distinguen respuestas donde un enunciado de implicación lógica es (o no) interpretado como equivalente a su recíproca, el antecedente y el consecuente se ven (o no) como intercambiable o las conclusiones son (o no) influenciadas por datos específicos.

Fiallo (2006) analiza los tipos de demostración propuestos por Marrades y Gutiérrez (2000) que emergen durante la aplicación de una unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un entorno de geometría dinámica enfocándola además hacia el desarrollo de las habilidades de la

demostración en los estudiantes de 10º grado. Con los datos obtenidos en esta investigación, Gutiérrez y Fiallo (2007) presentan algunos ejemplos de los diferentes tipos de demostración producidas por los estudiantes y muestran su progreso durante la unidad de enseñanza.

Investigaciones en la línea de la relación entre argumentación y demostración

En esta línea de investigación se busca dar respuesta a preguntas como las siguientes: ¿existe continuidad o distancia cognitiva entre la argumentación producida en la construcción de una conjetura y su demostración? ¿de qué tipo de continuidad se trata? ¿cómo comparar la argumentación con la demostración? ¿cómo identificar la fase de producción de una conjetura y la fase de construcción de la demostración? (Pedemonte, 2005).

Desde una perspectiva clásica epistemológica, algunos estudios han planteado, como una de las fuentes de dificultades, la discrepancia entre la argumentación con base en la verificación empírica (típica de un razonamiento común) y el razonamiento deductivo (típico de un razonamiento teórico). Balacheff (1988a) plantea que existe una heterogeneidad de tipo epistemológico entre estos dos procesos, debido a que los conocimientos utilizados son muy diferentes por la diferencia del paso de lo pragmático a lo teórico. Este autor también plantea que el objetivo de la argumentación consiste en obtener la adhesión del interlocutor sin plantear necesariamente el problema de validez del enunciado.

Duval (1989, 1992-1993) muestra la distancia cognitiva que separa la argumentación de la demostración, a pesar de una proximidad discursiva a veces muy grande, y se refiere al problema de reconocer una argumentación, dada la variedad de las formas discursivas que puede tomar y la diversidad de sus niveles de organización. Duval analiza cómo funciona una demostración para plantear una ruptura entre la argumentación y la demostración, afirmando que el razonamiento deductivo es de un carácter diferente al de la argumentación espontáneamente aplicada en discusiones o en debates relativos a conflictos cognitivos. Una argumentación no funciona en primer lugar sobre el estatus de las proposiciones, sino sobre su contenido. La consideración del estatus de las proposiciones no es esencial.

Douek (1998) toma el análisis del funcionamiento de la demostración de Duval como punto de referencia para subrayar la necesidad de considerar otros aspectos del proceso de construcción de una demostración dentro de las matemáticas. Plantea que, a pesar de la innegable distancia epistemológica y cognitiva entre la argumentación y la demostración matemática formal como productos socialmente situados, desde el mismo punto de vista epistemológico y cognitivo, la argumentación y la demostración matemática ordinaria tienen, como procesos, muchos aspectos en común. Al respecto, Boero y otros (1996) proponen que, en un contexto educativo adecuado,

es posible implementar con éxito un proceso de producción de teoremas, caracterizado por un fuerte vínculo cognitivo entre los procesos de argumentación y de demostración. En una investigación basada en un experimento de enseñanza organizado con estudiantes de grado octavo, que tenían que resolver problemas consistentes en elaborar conjeturas y demostrarlas de manera deductiva, observaron que los estudiantes que resolvían los problemas con éxito mantenían una gran coherencia entre el texto del enunciado producido por ellos y la demostración deductiva construida para justificarlo, mientras que los estudiantes que no lograban completar una demostración deductiva correcta mostraban diferencias importantes entre la actividad de elaboración y verificación de la conjetura y los intentos de demostrarla. Ello lleva a estos autores a proponer el constructo "*unidad cognitiva de teoremas*" para destacar la coherencia (o la falta de ella) entre ambas fases de resolución de los problemas de conjetura y demostración.

Pedemonte (2002, 2005, 2007, 2008) usa el constructo unidad cognitiva de teoremas para analizar y mostrar las posibles continuidades y rupturas entre la argumentación y la demostración. Para el análisis cognitivo de la continuidad que puede existir entre los procesos de argumentación que conducen a la explicación de una conjetura y su demostración, desde el punto de vista estructural y del sistema de referencia, Pedemonte utiliza una herramienta basada en el modelo cK¢[4] (Balacheff, 1995, Balacheff y Margolinas, 2005) integrado en el modelo de Toulmin (1958)[5]. El modelo cK¢ permite analizar el sistema de referencia y el modelo de Toulmin permite analizar la estructura de la argumentación.

Fiallo (2010) analiza la existencia de la continuidad o distancia cognitiva entre los procesos de argumentar y demostrar en el desarrollo de demostraciones de propiedades de las razones trigonométricas. Propone una estructura de análisis de los tipos de demostración que se presentan en la escuela secundaria, adaptando el modelo de Pedemonte y el constructo de unidad cognitiva de teoremas para el análisis de la unidad o distancia cognitiva entre el planteamiento de conjeturas y la construcción de demostraciones, según ésta estructura. Plantea cinco categorías de unidad o ruptura cognitiva, las cuales agrupan los diferentes logros o dificultades detectados en los procesos de argumentación y de demostración.

4 cK¢: conception, knowing, concept (Balacheff & Margolinas, 2005, p. 105)

5 Toulmin (1958) elabora un modelo de representación de argumentos en el que identifica seis características estructurales que se deben analizar y organizar durante el proceso de argumentación: el enunciado (claim), los datos (data), los permisos de inferir (warrant), el indicador de fuerza del argumento (modal qualifiers), las refutaciones potenciales (rebuttals) y el soporte del permiso de inferir (backing).

Investigaciones en la línea de propuestas didácticas

Los trabajos buscan dar respuestas a numerosas preguntas abiertas relativas a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración, tales como: ¿es posible superar las dificultades que encuentran los estudiantes en relación a la demostración? ¿cómo pueden ser diseñadas intervenciones de enseñanza? ¿qué sugerencias generales se pueden dar para la enseñanza de las demostraciones? (Mariotti, 2006), ¿cómo debería enseñarse la demostración? ¿cómo son construidas, verificadas y aceptadas las demostraciones en el aula?, ¿cuáles son las fases críticas en el desarrollo de la demostración con el estudiante y dentro del aula como comunidad de aprendizaje? ¿qué entornos de aula son propicios para el desarrollo del concepto de demostración con los estudiantes? ¿qué formas de interacciones entre los estudiantes y entre los estudiantes y el profesor pueden fomentar la concepción de demostración de los estudiantes? ¿qué actividades matemáticas -posiblemente con el uso de tecnología- pueden mejorar las concepciones de los estudiantes de la demostración? (Harel y Sowder, 2007).

Un aspecto mencionado recurrentemente en los estudios investigativos en esta línea es el tipo de tareas que se proponen a los estudiantes. Bell (1976) es pionero al sugerir que proponer a los estudiantes tareas de investigar situaciones problema puede conducir a diversas conjeturas formuladas por ellos, a la necesidad de resolver conflictos entre puntos de vista diferentes, a la presentación de evidencias y a la construcción de argumentos formales. Esta idea es llevada a la práctica, entre otros, por Lampert (1990), Hoyles (1997) y Martin y otros (2005); el primero de ellos sugiere que los problemas propuestos incluyan la observación de patrones de regularidad pues esto conlleva a la elaboración de argumentos empíricos inductivos y a explicaciones deductivas sobre por qué un patrón puede continuar. Por su parte, Radford (1994) hace una descripción más detallada del tipo de tareas para geometría, proponiendo la reformulación de teoremas relevantes en términos de problemas abiertos que dan lugar a una conjetura correspondiente al enunciado del teorema, seguida de actividades que buscan mostrar que una figura no puede constituirse en una demostración y de otras que procuran la comprensión del funcionamiento de una demostración -las cuales incluyen demostraciones incompletas o cuyos pasos están desordenados con la finalidad de completarlas u organizarlas, respectivamente-. Radford dice que por esa vía los estudiantes pueden ver los teoremas como algo significativo y se motivan a demostrarlos. Evalúa el éxito de su propuesta analizando los progresos individuales en la realización de demostraciones. Harel (1998) introduce un elemento nuevo en la selección de teoremas al proponer que éstos den lugar a demostraciones 'explicativas' (Hanna, 1990) pues son las que motivan a los estudiantes a aprender a demostrar. Adicionalmente, Marrades y Gutiérrez (2000) y Jones (2000) llaman la atención sobre la necesidad de organizar secuencias de enseñanza cuidadosas, graduar los problemas según el grado de dificultad y dar suficiente tiempo a los estudiantes para trabajar en los problemas propuestos.

Además de las tareas, otro aspecto al que se presta atención, especialmente con el advenimiento de los programas informáticos de geometría dinámica, es a los recursos que se ponen a disposición de los estudiantes. El trabajo de Groman (1996) es uno de los primeros enfocados en aspectos sociales del aprendizaje de la demostración en donde se emplea como mediador a la geometría dinámica. La investigadora señala que la presencia de la tecnología produce un cambio en la forma de hacer el curso, hacia una práctica de tipo social. A partir de la exploración de figuras geométricas para producir conjeturas y preguntas de la forma "qué pasa si…", los estudiantes, futuros profesores, pueden construir por sí mismos significados matemáticos en un ambiente social de investigación, donde el profesor es uno más de los participantes en el proceso.

Mariotti (2000) presenta un análisis de la relevancia de varias funciones del programa Cabri al permitir centrar la atención en los procedimientos de construcción y en su validez, más que en el resultado de los mismos. La autora ilustra -mediante episodios extraídos de un experimento de enseñanza realizado con estudiantes de 15-16 años- de qué manera aprovecha la correspondencia existente entre los comandos del menú que ofrece el programa y los axiomas y teoremas, que los estudiantes usan en sus justificaciones, para introducir la idea general de demostración y la necesidad de demostrar siguiendo los principios y reglas de inferencia aceptados por el grupo como parte de una teoría. Según Mariotti, el aprendizaje de la demostración se favorece cuando una solución propuesta por un estudiante se somete a juicio de los demás, con base en las justificaciones que éste da. De manera paulatina se va incrementando la necesidad de recurrir a la demostración como recurso de validación. Marrades y Gutiérrez (2000) señalan que el programa de geometría dinámica permite una exploración empírica de las representaciones de las figuras geométricas, hecho que influye en una evolución positiva hacia la producción de justificaciones cada vez más próximas a demostraciones deductivas. Jones (2000) propone tareas cuya intención es interesar a los estudiantes en el análisis de las propiedades geométricas que permiten establecer relaciones entre las figuras. Concluye que cuando los estudiantes intentan explicar qué características debe tener una figura construida en un programa de geometría dinámica para representar una figura geométrica específica, juegan implícitamente con la idea de inferencia y se preparan para comprender cómo opera una demostración. El programa de geometría dinámica aporta un contexto de significado a la tarea de explicar, al disponer de la función de arrastre de los objetos de la construcción; el uso de esta función motiva a preguntarse por las razones de la resistencia de una figura al arrastre o la permanencia de algunas de las características de las figuras bajo el arrastre. Así, la preparación para la demostración se hace con actividades que llevan a los estudiantes a tener conciencia de la dependencia entre propiedades, a partir del cuestionamiento de una propiedad condicionada a la validez de otra propiedad. Healy y Hoyles (2001) reportan un estudio en el que tienen como hipótesis que las explicaciones dadas por los estudiantes, derivadas de la interacción con un programa de

geometría dinámica, son más fáciles de sistematizar en una demostración deductiva que aquellas producto del trabajo con figuras hechas en papel; esto es debido a que al usar el programa se presta atención explícita a los procesos que se llevan a cabo. Fiallo (2010) usa archivos construidos en Cabri para que los estudiantes puedan explorar y comprender que los conceptos y propiedades de las razones trigonométricas se cumplen para cualesquier ángulo entre 0º y ±360º. Los archivos, junto con las preguntas propuestas en las guías de los estudiantes se constituyen es una gran ayuda para el aprendizaje de los conceptos y el mejoramiento de las habilidades de demostración. El autor señala que los propios estudiantes, sin demasiada intervención del profesor son los que "descubren" dichos conceptos y propiedades. Esto los motiva a querer saber por qué son verdaderos y el programa de geometría dinámica les proporciona herramientas necesarias para que exploren los objetos geométricos y las relaciones numéricas y encuentren dichas respuestas.

Un grupo de investigadores italianos han realizado diversos experimentos de enseñanza con el fin de analizar la problemática del aprendizaje de la demostración en clases ordinarias. Varias de esas investigaciones están resumidas en Boero (2007). Entre ellos, Bartolini Bussi y otros (2007a) presentan el trabajo de investigación referente al acercamiento a los teoremas de geometría en la escuela, proporcionando una estructura teórica unificada de los estudios de investigación que usan en investigaciones posteriores. Bartolini Bussi y otros (2007b) reportan un problema de construcción de la geometría del círculo en tercer grado de primaria, analizando los procesos que han tenido lugar en las aulas como consecuencia de la asignación de esta tarea, abordando algunos aspectos pertinentes, como la delicada relación entre las prácticas concretas y el pensamiento teórico, y analizando cómo fue intencionalmente provocado el cambio del uno al otro durante la interacción en las clases. Boero, Garuti y Lemut (2007) analizan los procesos mentales subyacentes a la producción y demostración de conjeturas en matemáticas, dando algunas pistas sobre situaciones problemáticas adecuadas para la enseñanza de la demostración y sobre la mejor forma de manejar el trabajo en clase para una amplia participación de los estudiantes en la construcción de conjeturas y demostraciones. Parenti y otros (2007) presentan las condiciones peculiares que habilitan la clase para llegar a buenos niveles de participación en discursos teóricos y estudian algunos procesos mentales que están involucrados en estas actividades. Confirman el importante papel que desempeña el profesor en el acercamiento a aspectos teóricos de las matemáticas: en el aula como un mediador cultural, que plantea y coordina discusiones; en el grupo de investigación, como un miembro que hace parte de la planificación de las actividades y en el análisis de los procesos mentales de los estudiantes.

Referencias

Antonini, S., Mariotti, M. A. (2008). Indirect proof: what is specific to this way of proving? *ZDM the International Journal on Mathematics Education, 40*, 401-412.

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., Robutti, O. (1998). A model for analiysing the transition to formal proofs in geometry. *Proceedings of the 22th PME International Conference, 2,* 24-31.

Balacheff, N. (1988a). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège* (tesis doctoral). Grenoble (Francia). [Traducción al español: Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá, Colombia: una empresa docente].

Balacheff, N. (1988b). Aspects of proof in pupils´ practice of school mathematics. En D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp. 216-235). Londres: Hodder & Stoughton.

Balacheff, N. (1995). Conception, connaissance et concept. En D. Grenier (Ed.), *Didactique et technologies cognitives en mathématiques, séminaires 1994-1995* (pp. 219-244). Grenoble (Francia): Université Joseph Fourier.

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM the International Journal on Mathematics Education, 4*0, 501-512.

Balacheff, N., Margolinas, C. (2005). cK¢ modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. En A. Mercier, C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75-106). Francia: La Pensée Sauvage.

Bartolini Bussi, M., Boero, P., Ferri, F., Garuti, R., Mariotti, M. A. (2007a). Approaching and developing the culture of geometry theorems in school: A theoretical framework. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 211-217). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense.

Bartolini Bussi, M., Boni, N., Ferri, F. (2007b). Construction problems in primary school: A case from the geometry of circle. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 219-247). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense.

Battista, M. T., Clements, D. H. (1995). Geometry and proof. *The Mathematics Teacher, 88* (1), 48-54.

Bell, A. W. (1976). A study of pupil's proof-explanation in mathematical situation. *Educational Studies in Mathematics, 7*(1), 23-40.

Boero, P. (2007). *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice*. Rotterdam, Los Países Bajos: Sense.

Boero, P., Garuti, R., Lemut, E., Mariotti, A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. *Proceedings of the 20th PME International Conference , 2*, 113-120.

Boero, P., Garuti, R., Lemut, E. (2007). Approaching theorems in grade VIII: Some mental processes underlying producing and proving conjectures, and conditions suitable to enhance them. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 249-264). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense.

Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria* (tesis doctoral). Valencia (España): Universidad de Valencia.

de Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon 26*, 15-29.

Douek, N. (1998). Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications. *Proceeding of the 1st Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME1),* 125-139.

Duval, R. (1989). Langage et représentation dans l'apprentissage d'une démarche déductive. *Proceedings of the 13th PME International Conference, 1*, 228-235.

Duval, R. (1992-1993). Argumenter, demontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? *Petit x, 31*, 37-61.

Fiallo, J. (2006). *Enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente cabri para el desarrollo de las habilidades de la demostración.* (memoria de investigación). Valencia (España): Universidad de Valencia.

Fiallo, J. (2010). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica* (tesis doctoral). Valencia (España): Universidad de Valencia.

Fiallo, J., Gutiérrez, Á. (2007). Tipos de demostración de estudiantes del grado 10º en Santander (Colombia). En M. Camacho, P. Flores, P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación*

Godino, J., Recio, A. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 19*(3), 405-414.

Groman, M. (1996). Integrating Geometer's Sketchpad into geometry course for secondary education mathematics major. *Proceedings of ASCUE,* North Myrtle Beach, EE.UU, 9-13.

Gutiérrez, Á., Fiallo, J. (2007). Analysis of conjectures and proofs produced when learning trigonometry. *Proceeding of the 5th Conference of European Society for Research in Mathematics Education,* 622-632.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange, 21*(1), 6-13.

Hanna, G., Jahnke, N. (1996). Proof and proving. En A. Bishop y otros (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 877-908). Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer.

Harel, G., Sowder, L. (1998). Student's proof schemes: results from exploratory studies. En A. Schoenfeld y otros (Ed.), *Research in collegiate mathematics education, III* (pp. 234-283). Providence, EE.UU.: American Mahematical Society.

Harel, G., Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842): Reston, VA, EE.UU.: National Council of Teachers of Mathematics.

Healy, L., Hoyles, C. (1998). Student's performance in proving: competence or curriculum? *Proceedings of the 1st Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME1)*, 153-167.

Healy, L., Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 396-428.

Healy, L., Hoyles, C. (2001). Software tools for geometrical problem solving: potentials and pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*, 235-256.

Hoyles, C. (1997). The curricular shaping of students' approaches. *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 7-16.

Hoyles, C., Küchemann, D. (2002). Student's understandings of logical implication. *Educational Studies in Mathematics, 51*, 193-223.

Ibañes, M., Ortega, T. (2003). Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias, 21*(1), 49-63.

Ibañes, M., Ortega, T. (2004). Un análisis del tratamiento de la demostración matemática en los libros de texto de bachillerato. *Números, 57*, 19-32.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: students' interpretation when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 55-85.

Küchemann, D., Hoyles, C. (2001) Investigating factors that influence students' mathematical reasoning. *Proceedings of the 25th PME International Conference, 3*, 257-264.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal, 27* (1), 29-63.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and Proving in Mathematics Education. En Á. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 173-204). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense.

Mariotti, M. A., Bartolini, M., Boero, P., Ferri, F., Garuti, R. (1997) Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition, *Proceedings of the 21th PME International Conference, 1*, 180-195.

Marrades, R., Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 87-125.

Martin, T. S., Soucy McCrone, S. M., Wallace, M. L., Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 95-124.

Parenti, L., Barberis, M., Pastorino, M., Viglienzone, P. (2007). From dynamic exploration to "theory" and "theorems" (from 6th to 8th grades). En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 265-284). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense.

Pedemonte, B. (2002). *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans le apprentisage des mathématiques* (tesis doctoral). Université Joseph Fourier-Grenoble I, Grenoble, Francia. Disponible en <http://math.unipa.it/~grim/ThFR-Pedemonte.pdf>.

Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l`analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 25*(3), 313-348.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics, 66*, 23-41.

Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *ZDM the International Journal on Mathematics Education, 40*, 385-400.

Radford, L. (1994). La enseñanza de la demostración: aspectos teóricos y prácticos. *Educación Matemática, 6*(3), 21-36.

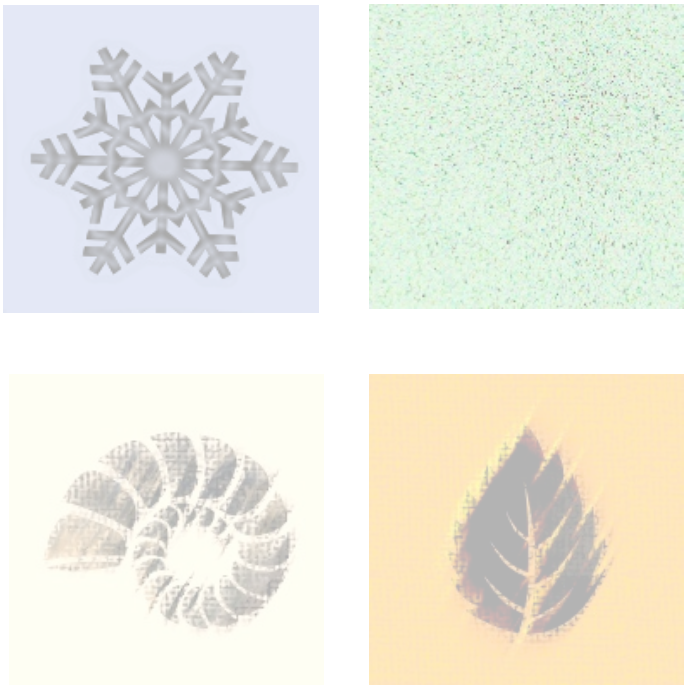
Stacey, K., Vincent, J. (2008). Modes of reasoning in explanations in year 8 textbooks. *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 475-481.

Stylianides, A. J. (2011). Toward a comprehensive knowledge package for teaching proof: A focus on the misconception that empirical arguments are proofs. *Pythagoras, 32* (1), 10 páginas.

Szendrei-Radnai, J., Török, J. (2007). The tradition and role of proof in mathematics education in Hungary. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 117-134). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense.

Tall, D. (1998). The cognitive development of proof: is mathematical proof for all or for some. Paper presented at the *UCSMP Conference*. Chicago University, Chicago, EE.UU.

Toulmin, S. E. (1958). *The use of argument*. Cambridge, Gran Bretaña: Cambridge University Press.



Ponencias

Dificultades de los estudiantes al plantear la ecuación diferencial que modela un problema de mezclas

Luis Alberto Jaimes Contreras y Rafael Felipe Chaves Escobar

Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia
mdma_lajaimesc824@pedagogica.edu.co; mdma_rfchavese097@pedagógica.edu.co

Resumen

Aunque la noción de ecuación diferencial está presente en campos como las matemáticas e ingeniería, su comprensión por parte de estudiantes y algunos profesores ha sido limitada, debido al enfoque algebraico en el que se ha centrado la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, dejando de lado la construcción de la ecuación diferencial, la cual es el fundamento al modelar algunos fenómenos físicos. En este artículo presentamos algunas dificultades identificadas al construir la ecuación diferencial que permite modelar un problema de mezclas en un grupo de 21 estudiantes de una Universidad Pública inscritos en la asignatura de ecuaciones diferenciales.

1. Introducción

Las prácticas investigativas en educación matemática vienen realizando grandes aportes con el propósito de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje en la educación; sin embargo, según Morales y Salas (2010) en algunos cursos de matemáticas actualmente *"predomina el enfoque algebraico…"* que algunos docentes emplean como estrategia didáctica. Esto lleva a que durante la formación del estudiante algunos temas sean vistos como memorización de fórmulas y algoritmos ocultando los conceptos, lo cual impide su comprensión precisa y lleva al estudiante, y en ocasiones a los docentes, a concebir la fórmula como el concepto en sí mismo (Nápoles, González, Genes, Basabilbaso & Brundo, 2004). En algunos libros de texto de ecuaciones diferenciales encontramos que se proporciona al lector la ecuación diferencial que permite modelar un problema, pero se encuentra muy poca información (nula en algunos casos) sobre la forma como es construida dicha ecuación diferencial, esto lleva a que el estudiante simplemente escoja la ecuación que más se ajuste a las condiciones del problema que se le planteé.

Basados en la teoría de las representaciones semióticas los trabajos desarrollados por Raymond Duval (2006) identificamos que los estudiantes poseen dificultades al pasar de un registro de

representación a otro, en particular en este trabajo, del registro lenguaje natural al registro algebraico. Los resultados obtenidos se fundamentan en el trabajo con problemas de mezclas, donde al estudiante se le expone una situación problema (dada en lenguaje natural) y se espera que el estudiante construya la ecuación diferencial que se ajusta al problema dado (lenguaje algebraico).

A continuación presentamos parte de la metodología aplicada y algunas dificultades identificadas en los estudiantes al plantear una ecuación diferencial que modela un problema de mezclas dado.

2. Desarrollo y algunos resultados

En la solución de problemas de mezclas que son modelados por una ED se requiere que el estudiante tenga claridad en el manejo de la derivada como una razón de cambio, de tal manera que le permita identificar constantes, parámetros, y variables que dependan entre sí.

Para detectar qué dificultades tienen los estudiantes al plantear una ecuación diferencial que se ajuste a un problema de mezclas, se elaboraron una serie de actividades que evidenciaron falencias en algunos conceptos previos al curso, los cuales dificultan el planteamiento de dicha ecuación, estas falencias generan dificultad para representar la situación expresada en lenguaje natural como una expresión algebraica.

La primera actividad tenía como propósito identificar situaciones en las que se presenta una razón de cambio cuyas variables en la mayoría de casos dependen del tiempo, y que pueden mejorar el tránsito entre el registro lenguaje natural y algebraico en diferentes situaciones reales. Para ello se elaboró una tabla en la que se le pide al estudiante leer situaciones como: "Cuando llenas un vaso con gaseosa, ¿qué tan rápido cambia el nivel de líquido al llenar el vaso?" y relacionarlas con una expresión de la forma $\frac{dh}{dt}$ donde h representa el nivel del líquido y t el tiempo. En esta actividad el estudiante se ubica en un contexto en el que debe identificar variables dependientes e independientes, y teniendo en cuenta la dependencia de las variables el estudiante debe escribir una expresión algebraica que se ajuste a la situación. En esta actividad se encontró que los estudiantes identificaron razones de cambio en situaciones donde solo se aprecia una variable que depende del tiempo, y por el contrario presentaron dificultades en situaciones donde se presenta más de una variable dependiente no necesariamente del tiempo.

En la segunda actividad se planteó una pregunta partiendo de una situación real, cuya respuesta implica expresar dicha situación como una variación, es decir, interpretar la derivada como una razón de cambio. Para responder esta pregunta el estudiante debía responder algunas subpreguntas que buscan identificar como está interpretando dicha situación. En esta actividad se identificó que los errores se encuentran asociados a la dificultad para reconocer algunas variables o identificar la dependencia e independencia de estas, expresar constantes o parámetros como variables o expresar los diferenciales como las variables del enunciado, también

encontramos que para algunos estudiantes no es posible derivar la expresión $V = \pi r^2 h$ con respecto al tiempo ya que la variable $\boldsymbol{t}$ no se encuentra en la expresión.

La tercera actividad presentaba un problema de mezclas tal como aparece en algunos libros de texto, en donde el estudiante debía plantear la ecuación diferencial que permite modelar un problema de mezclas, en esta actividad se identificó que los estudiantes en la mayoría de los casos expresan la respuesta en el registro de representación en la que fue formulada la pregunta.

3. Conclusiones

- La no identificación de la dependencia e independencia de variables, así como la no interpretación de la derivada como una razón de cambio, generan dificultades para pasar del registro lenguaje natural al registro algebraico, lo cual impide el planteamiento de la ecuación diferencial que permite modelar un problema.

- Se supone que en situaciones donde solo se presentan dos variables los estudiantes tienen éxito al realizar el traspaso del registro lenguaje natural al algebraico, esto puede deberse a que según lo mencionado por R. Duval acerca de la teoría de las representaciones semióticas serían representaciones congruentes de registros; por el contrario, en situaciones donde se encuentra más de una variable dependiente y no necesariamente del tiempo, se presenta un fenómeno de no congruencia; por lo tanto, esto genera mayor dificultad en el planteamiento de la ecuación diferencial que permite modelar un problema de mezclas.

- Los estudiantes tienden a permanecer en un mismo sistema de representación y por lo general dan respuestas a las preguntas en el registro en la cual estas son formuladas.

4. Referencias

Duval, Raymond (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de la RSME, 9.1, 143-168.

Morales L. Yuri y Salas H. Oscar. (2010). Incorporación de la tecnología para la enseñanza y aprendizaje de las ED ordinarias. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática,6* , 155-172.

Nápoles Valdés, J. E., González Thomas, A., Brundo, J. M., Genes, F. y Basabilbaso, F. (2004). El enfoque histórico problémico en la enseñanza de la matemática para ciencias técnicas: el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias. *Acta Scientiae, 6* , 41-59.

La paradoja de Aquiles y la Tortuga: Construcción de procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes

Diana Villabona Millán, Solange Roa Fuentes

Universidad Industrial de Santander, EDUMAT-UIS, Bucaramanga, Colombia
diana.villabona@gmail.com; sroa@matematicas.uis.edu.co

Resumen

En este documento se presenta una descomposición genética de la paradoja de Aquiles y la tortuga. Dicho análisis toma los elementos teóricos presentados en Roa-Fuentes (2012) para la construcción del infinito potencial (construcción de procesos iterativos infinitos) y el infinito actual (construcción de objetos trascendentes) mediante el mecanismo de completez. El análisis teórico, muestra la necesidad de partir de "concepciones primarias" sobre el infinito, que pueden ser controvertidas mediante la construcción formal de procesos iterativos infinitos.

1. Introducción

La naturaleza dual del infinito (como acto y como potencia) ha ocasionado malestar y confusión desde la antigüedad en la mente de matemáticos y filósofos; las situaciones que involucran el infinito resultan ser paradójicas y conflictivas. Según Aristóteles, el infinito potencial es de fácil comprensión para los humanos, esto resulta natural pues las experiencias fuera de un contexto escolar relacionan esta noción matemática con "procesos sin fin" o con todo aquello que resulta inalcanzable por los sentidos (el número de estrellas en el firmamento, el mar, el amor, entre otros). Contrario a esto, el infinito actual se percibe sólo en un contexto escolar y es estudiado con detalle en cursos avanzados de teoría de conjuntos.

La construcción del infinito actual tiene influencia directa en conceptos del análisis elemental, topología y álgebra lineal y abstracta. El infinito potencial y el infinito actual en realidad son dos estructuras diferentes de la misma noción, esta idea puede ser explicada en términos de los elementos de la teoría APOE.

En esta investigación nos interesa resaltar las estructuras *Proceso* y *Objeto* que desde la teoría APOE explican cómo un individuo puede construir conceptos o nociones matemáticas. En particular mostraremos cómo las ideas de infinito potencial y actual pueden estructurarse en la paradoja de Aquiles y la tortuga. Para esto tomaremos los resultados previos presentados por miembros de RUMEC (Por sus siglas en inglés RUMEC*: Research in Undergraduate Mathematics Education.*) quienes han establecido una explicación sobre el tipo de Procesos y Objetos generados en situaciones relacionadas con el infinito; además del nuevo mecanismo mental presentado por Roa-Fuentes (2012) que permite dar el paso de un proceso iterativo infinito al *Objeto* que trasciende de él y de la nueva estructura propuesta por Dubinsky, Weller y Arnon (2013)

2. La teoría APOE y el infinito

La teoría APOE (Acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema) es una teoría que surge de la teoría constructivista y que busca describir cómo las personas construyen los conceptos matemáticos a partir del desarrollo de ciertos mecanismos y estructuras. Los resultados que han arrojado los estudios de diferentes conceptos o tópicos a través de la teoría APOE no son sólo de interés para la investigación en sí misma sino que pueden desencadenar herramientas pedagógicas útiles en la enseñanza y el aprendizaje de dicho concepto o noción (para mayor información sobre la teoría ver Arnon, Dubinsky, Cottrill, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros y Weller, 2013)

Han sido diversos los estudios del infinito en términos de la teoría APOE y estos han permitido especializar los elementos de la teoría para dicho propósito. A continuación realizaremos una breve descripción de los estudios que involucran la teoría APOE y el infinito matemático.

2.1 La teoría APOE y el infinito.

Weller, Brown, Dubinsky, McDonald y Stenger (2004) proponen diferentes situaciones donde el infinito aparece, resaltando la importancia de este tópico matemático en conceptos como: límites, asíntotas de funciones racionales, sucesiones infinitas, series e integrales impropias. Así como en algunas estructuras matemáticas estudiadas en álgebra lineal, álgebra abstracta, análisis real y topología en donde son necesarias demostraciones que requieren de la construcción de procesos mentales infinitos. Sin embargo, las concepciones que los estudiantes construyen alrededor de este tópico matemático son contradictorias y están determinadas en muchos casos por los contextos en los que se encuentran inmersas. La primera explicación importante que da la teoría es sobre la relación entre el infinito potencial y el actual:

> El infinito potencial es la concepción del infinito como un proceso. Este proceso es construido empezando por los primeros pasos (por ejemplo 1, 2, 3 en la construcción del conjunto de los números naturales) la cual es una concepción acción. Repetir estos pasos

> (por la adición de 1 repetidamente) al infinito, requiere de la interiorización de estas acciones en un proceso. El infinito actual es el objeto mental que se obtiene de la encapsulación de este proceso. (Dubinsky, Weller, McDonald y Brown 2005a, p. 346)

De esta manera el infinito actual es el objeto que se obtiene de aplicar una transformación sobre el conjunto de los números naturales. Brown, McDonald y Weller (2010) proponen dos estructuras determinadas para la construcción del infinito que se asocian con las conocidas estructuras de *Proceso* y *Objeto*; esto es:

i. Concepción proceso de infinito mediante construcción de un proceso iterativo infinito.
ii. Concepción objeto de infinito mediante construcción de un objeto trascedente.

El estudio del infinito ha generado la evolución de la teoría misma, ha sido necesario establecer nuevas explicaciones sobre cómo los individuos construyen esta noción matemática.

2.2 Totalidad como nueva estructura.

Esta es una nueva etapa propuesta por Dubinsky y otros (2013) que se encuentra entre las estructuras de proceso y objeto. Aunque diversas investigaciones hacen mención a la necesidad de ver un proceso como una totalidad (Weller et al., 2004; Dubinsky et al., 2005a, Dubinsky et al., 2005b) estas plantean la totalidad como una parte de la concepción objeto y no como una estructura independiente. Dubinsky y otros (2013) muestra para algunos casos específicos, como el de los decimales infinitos periódicos, que existen evidencias de la necesidad de una concepción totalidad que represente un cambio en la forma de pensar del individuo sobre el concepto matemático estudiado.

2.3 El mecanismo “Completez”.

Este elemento es una de las contribuciones que hace Roa-Fuentes (2012) a la teoría, como ya se ha mencionado, las características estáticas (en el objeto) y dinámicas (en el proceso iterativo infinito) son ajenas entre sí, al ver el proceso iterativo infinito como una todo se obtienen “cosas” que no mantienen las características del proceso, es decir, el objeto resultante no hace parte de la sucesión de términos que le da origen. Completez se propone como un mecanismo que permite la construcción del objeto trascendente y como se muestra en Roa-Fuentes (2012) se relaciona con la construcción del conjunto de los números naturales como una totalidad. En la sección cuatro abarcaremos todas estas ideas para la paradoja de Aquiles y la tortuga en el contexto propio de nuestra investigación.

3. Componentes del método

La teoría APOE propone un paradigma de investigación específico que consta de tres componentes: Análisis teórico, diseño e implementación de un modelo de enseñanza y

observación, análisis y verificación de datos (Asiala et al., 1996). En esta investigación desarrollaremos la primera y la tercera componente.

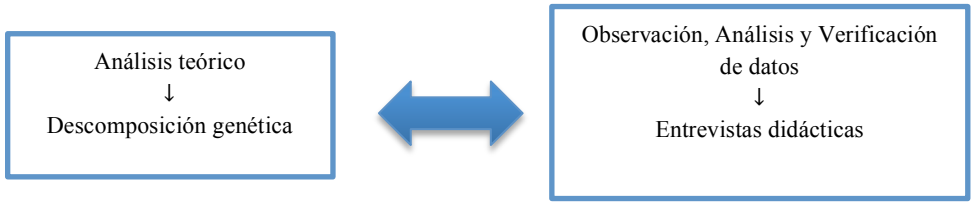


Figura 1. Elementos del método adaptados de Asiala y otros (1996)

La figura 1, vemos que debemos partir de un análisis teórico en el que se tienen en cuenta todos los elementos disponibles que estén relacionados con el tópico a estudiar, los cuales deben considerarse en una descomposición genética. Una descomposición genética revela un camino cognitivo (construido con base del estudio sobre el tópico matemático y su didáctica, así como en su epistemología, su presentación en libros de texto y la experiencia de los investigadores involucrados) sobre cómo un individuo puede construir el tópico matemático de interés. Una descomposición genética hipotética es el primer camino cognitivo que se tiene en cuenta para diseñar y desarrollar entrevistas que permitan determinar esos elementos que pudieron no haber sido tomados en cuenta en el análisis hipotético y aquellos que se tomaron en cuenta pero de los cuales no se encuentran evidencias en el razonamiento de los individuos. Estos elementos enriquecen el análisis teórico que ahora cuenta con evidencias empíricas que apoyan su estructura. Un análisis teórico validado, es una herramienta potente en el diseño de clases y de evaluaciones. Ya que allí se plantean pasos clave en la construcción de conocimiento en los cuales el profesor debe hacer énfasis o detenerse para ayudar a sus estudiantes a superar las dificultades ya detectadas. En la siguiente sección proponemos una descomposición genética hipotética sobre la paradoja de Aquiles y la tortuga.

3. Paradoja de Aquiles y la tortuga: análisis teórico

A continuación aparece la versión de la paradoja a la cual haremos referencia:

> Aquiles, hijo de la diosa Tesis, héroe de la guerra de Troya; apodado "el de los pies ligeros" gracias a su gran velocidad, decide enfrentarse a una tortuga en una carrera. Para que la disputa sea un poco más justa, Aquiles da a la tortuga cierta ventaja. Al iniciar la carrera puede verse que cuando Aquiles llega al punto de partida de la tortuga, ésta ya ha avanzado un poco. Nuevamente, Aquiles va tras la tortuga pero al llegar a donde ésta se encontraba descubre que ya ha avanzado otro pequeño tramo. Así, decide seguir tras ella pero en cada intento, la tortuga ha

recorrido una pequeña distancia; de esta manera, ¿podrá Aquiles alcanzar a la tortuga?

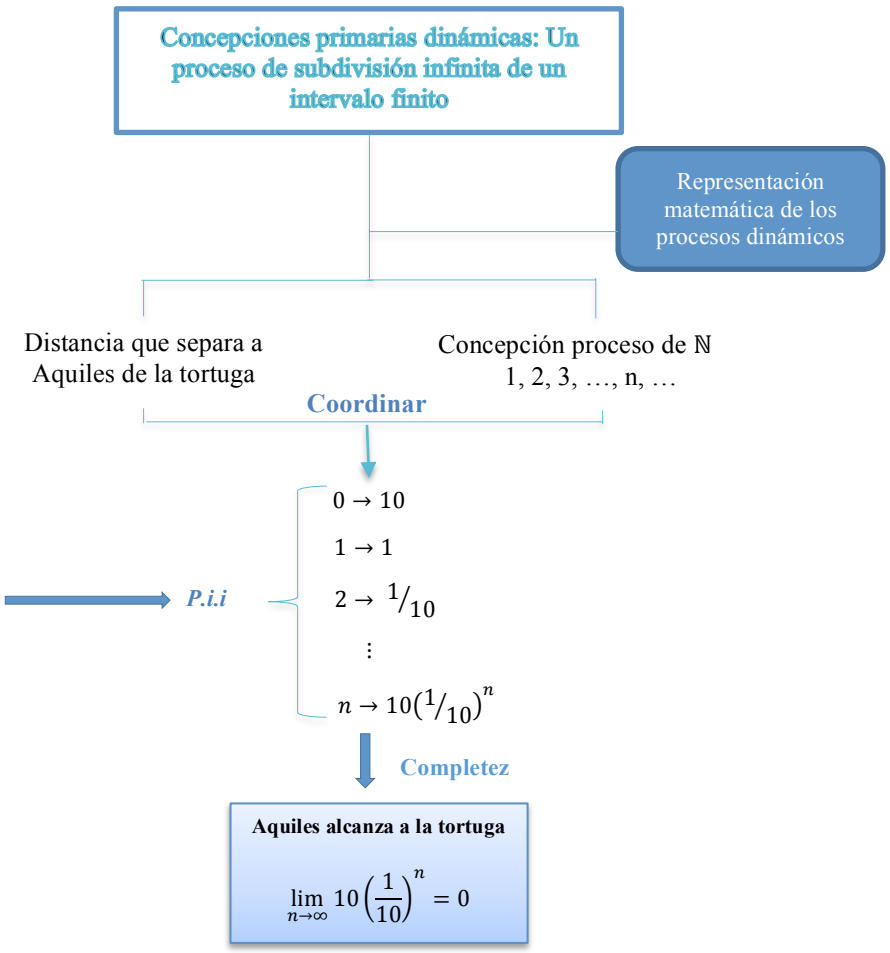


Figura 2. Descomposición Genética Hipotética de la Paradoja de Aquiles y la Tortuga

La figura 2 representa una descomposición genérica hipotética, las concepciones primarias existentes son de tipo dinámico, proporcionadas por el proceso inacabado de dividir una longitud finita, lo que da lugar a un proceso iterativo infinito por el cual podemos determinar para cualquier momento n la distancia que separa a Aquiles de la tortuga; esto es, una transformación de los naturales $\mathbb{N}$ dada por $\frac{10\left(\frac{1}{10}\right)^n}{n}$. La suma de estas distancias arroja una serie geométrica infinita convergente, completar los procesos iterativos a través del mecanismo denominado completez asumiendo la convergencia de los mismos es aceptar que el límite al infinito del término general de la serie es cero, es decir, que al realizar el proceso iterativo infinitas veces no existirá distancia que separe a Aquiles de la tortuga. Durante la presentación de esta propuesta

analizaremos con detalle los elementos teóricos planteados y casos particulares de individuos pensando sobre la situación propuesta.

4. Referencias

Arnon, I., Dubinsky, E., Cottrill, J., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2013). Apos theory—a framework for research and curriculum development in mathematics education. New York: Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education, II. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.) CBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1-32.

Brown, A., McDonald, M. & Weller, K. (2010). Step by step: Infinite iterative processes and actual infinity. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 16, 115-141.

Dubinsky, E.,Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005a). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-Based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 335-359.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005b). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 253–266.

Dubinsky, E., Weller, K., & Arnon, I. (2013). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion: The Case of 0.999... and 1.*Canadian Journal of Science*, Mathematics, and Technology Education, 13(3)

Roa-Fuentes, S. (2012). El infinito: Un análisis cognitivo de niños y jóvenes talento en matemáticas. Tesis de doctorado no publicada, CINVESTAV - IPN. México.

Weller, K., Brown, A., Dubinsky, E., McDonald, M. & Stenger, C. (2004). Intimations of Infinity. *Notices of the AMS,* 51(7), 741-750.

Teoría de las situaciones didácticas en la comprensión de la derivada como pendiente de la recta tangente con GeoGebra

Ingrid Nathalia Bautista García, José Alberto Rueda Rojas
Jorge Enrique Fiallo Leal

Universidad Industrial de Santander (Colombia)
nathalia.bautista@hotmail.com; joal_9005@hotmail.com; jfiallo@uis.edu.co

Resumen

Presentamos una propuesta fundamentada en la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), apoyada en el uso de GeoGebra para iniciar el estudio de la derivada en un punto como recta tangente a una curva con alumnos de 11° grado de la educación media. Planteamos el análisis a priori de tres tareas diseñadas con el objetivo de iniciar a los alumnos a la comprensión de este concepto.

1. Introducción

El uso de las tecnologías computacionales ha ampliado las posibilidades de estudio de fenómenos de variación y de cambio y de poder pasar de un sistema de representación a otro. Actualmente se ha construido un discurso que justifica el uso de la tecnología como elemento que puede ayudar al aprendizaje del estudiante, pero este discurso a veces carece de un fundamento teórico por parte de los profesores, es por esto que presentamos una propuesta apoyada en el uso del software GeoGebra, fundamentada en la TSD para la enseñanza de la derivada en un punto como pendiente de la recta tangente. Proponemos tres situaciones a-didácticas, con su respectivo análisis a priori, para que el estudiante que se enfrenta por primera vez al concepto de derivada adquiera las primeras nociones de dicho concepto, que le permita posteriormente comprender la definición clásica de derivada como límite. Trataremos entonces de exponer de una manera concisa las principales ideas que contribuyen a reconocer el rol las tecnologías y la TSD en la enseñanza de las matemáticas. Presentamos en este escrito los

aspectos teóricos que fundamentan la propuesta y las tres primeras tareas con sus respectivos análisis a priori.

2. Teoría de las Situaciones Didácticas

Esta teoría está sustentada en una concepción constructivista desde un sentido piagetiano del aprendizaje, concepción que Brousseau (1986) caracteriza de la siguiente manera: El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de condiciones, de dificultades, de desequilibrio, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba de un aprendizaje. Las ideas de la TSD se construyen alrededor del aprendizaje por adaptación, dado por una interacción entre el sujeto y el medio sin la intervención directa del profesor. Brousseau recuperó este concepto de aprendizaje biológico y lo adaptó al análisis de las actividades escolares. Según este enfoque, en el aprendizaje por adaptación se considera esencialmente la interacción de un sujeto con un medio. El sujeto tiene una necesidad, un propósito, un objetivo; para alcanzar su intención, el sujeto realiza una acción sobre el medio; el medio reacciona a la acción del sujeto (retroacción); el sujeto interpreta la retroacción del medio y valida su acción; la validación puede ser negativa, en cuyo caso el sujeto abandonará la acción realizada y comenzará un nuevo ciclo de interacción con una acción diferente, o podrá ser positiva, en cuyo caso el sujeto reforzará la acción, es decir la integrará como una respuesta automática a su intención.

Una *situación didáctica* es aquella en la que intervienen un profesor, un alumno y un saber. El profesor es alguien que quiere transmitir el saber al alumno, el alumno es quien quiere aprender el saber. El profesor no puede transmitir de manera directa el saber al alumno. Todo intento de hacer esta transmisión directa está llamado a fracasar. Por eso, el proceso de enseñanza no puede ser visto únicamente como un proceso de comunicación. El profesor debe usar una estrategia indirecta para transmitir el saber, crear las condiciones necesarias para que se dé un aprendizaje por adaptación, debe crear una situación a-didáctica.

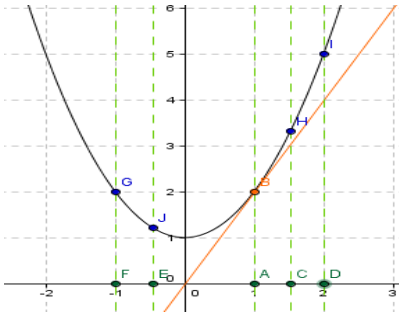
Se denomina *situación a-didáctica* a una actividad que produce un aprendizaje por adaptación, es decir: no hay una intención de enseñarle algo a alguien y sin embargo se produce un conocimiento. En nuestro caso el profesor debe preparar el problema y el medio (este problema debe generar una intención en el alumno), el profesor parte del saber y se pregunta qué conocimientos sus alumnos podrían estar en capacidad de desarrollar. El problema debe ser lo suficientemente claro para que el alumno sepa lo que debe hacer y pueda validar si lo que hizo esta bien o está mal. Parte de la tarea del profesor es tener en cuenta que acciones harían los alumnos y que retroacción haría el medio, finalmente debe quedar explicita las relaciones entre el conocimiento que produjo el estudiante y el saber "institucionalización". La dificultad que presenta la situación a-didáctica es que no se puede transmitir el saber de manera directa, porque no es un problema de comunicación de ¿cómo le cuento a mis alumnos la teoría de manera que

ellos me entiendan? sino ¿cómo el alumno llega hasta el saber?, entonces el profesor tiene que basarse en el conocimiento, para que el saber tenga sentido, el profesor aprovecha el conocimiento para hablar del saber y los alumnos le dan sentido al saber cuando han pasado por el conocimiento. Por lo tanto hay que buscar como transmitir el saber de manera indirecta.

3. Propuesta

La estructura de la actividad consta de dos partes (la situación a-didáctica y la situación didáctica). La primera de ellas conformada por tres tareas y una intervención entre ellas, la segunda parte reúne los conocimientos adquiridos por los alumnos y la institucionalización dirigida por el profesor.

TAREA 1. *Trazar las rectas secantes que pasen por el punto B*: Se espera que los alumnos tracen las cuatro rectas sin dificultad, Durante la construcción de las rectas podrán notar que hay unas rectas secantes más próximas a la recta tangente que otras, debido a la distancia entre los puntos de las abscisas.



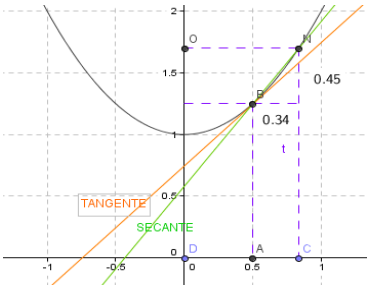
En el archivo TAREA 1 todos los puntos A, C, D, E, F son puntos fijos. Se espera que el estudiante trace las rectas secantes $\overleftrightarrow{BH}$, $\overleftrightarrow{BI}$, $\overleftrightarrow{BJ}$, $\overleftrightarrow{BG}$. El archivo permite ver que los puntos G, J, B, H, I, que están sobre la curva, se encuentran relacionados con los puntos F, E, A, C, D los cuales pertenecen al eje de las abscisas y la recta naranja será la recta tangente que pasa por el punto B.

INTENCIÓN	Trazar las rectas secantes que pasan por el punto *B*
ACCIÓN	Construir las rectas que pasan por el punto *B*
RETROACCIÓN	Hay unas rectas secantes más próximas a la recta tangente que otras
INTERPRETACIÓN	Cuando los puntos en las accisas son más próximos la recta secante se encuentra más cerca de la recta tangente
VALIDACIÓN	Las rectas secantes pasan por el punto *B*
CONOCIMIENTO NECESARIO PARA LA VALIDACIÓN	Saber la definición de recta secante
CONOCIMIENTO PRODUCTO DEL APRENDIZAJE	A menor distancia entre los puntos por los que pasa la recta secante más próxima será ésta a la recta tangente

Seguidamente se conduce al estudiante a calcular las pendientes de las rectas secantes construidas. Estas pendientes las puede construir por medio de tres herramientas que presenta el software: i) Usando la herramienta directa de pendiente encontrada en la barra de herramientas; ii) Construyéndola por medio de la barra de entrada; iii) Calculando el cociente entre las distancias de las ordenadas "y" con las abscisas "x". Esta construcción se realiza para que estudiante se dé cuenta que las pendientes de las secantes más cercanas tienden a la pendiente de la recta tangente, este análisis es importante en la aproximación del concepto de la derivada.

TAREA 2. *Aproximar la recta secante a la recta tangente*: Se espera que el alumno intente acercar la recta secante directamente. Como el software le impide, esta acción él debe tener en cuenta las coordenadas del punto K, ya que en la actividad anterior se notó que cuando los puntos de las abscisas están más próximos, los puntos de las secantes también, y por lo tanto las rectas se aproximan.

El archivo TAREA 2 está construido de manera que los puntos B y N dependen de los puntos A y C respectivamente, con A fijo y C se variable. El punto C se puede acercar hacia el punto A a 10 lugares decimales pero nunca exactamente en A, así el estudiante notará que la proximidad entre las rectas depende de los puntos A y C.



Acción 1

INTENCIÓN	Acercar la recta secante a la recta tangente
ACCIÓN	Mover directamente la recta
RETROACCIÓN	La recta no se mueve (debido a la construcción)
INTERPRETACIÓN	La recta no se puede mover directamente
VALIDACIÓN	La acción no es válida (negativa)
CONOCIMIENTO NECESARIO PARA LA VALIDACIÓN	Saber si un objeto se mueve o no

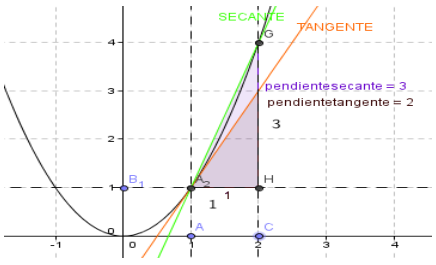
Acción 2

INTENCIÓN	Acercar la recta secante a la recta tangente
ACCIÓN	Acercar el punto C hasta el punto A
RETROACCIÓN	La recta secante se mueve hacia la recta tangente

INTERPRETACIÓN	La distancia entre los dos puntos (A y C) se aproxima a cero
VALIDACIÓN	La recta secante se aproxima a la recta tangente cuando se acercan los puntos correspondientes
CONOCIMIENTO NECESARIO PARA LA VALIDACIÓN	Saber cuándo un objeto está próximo a otro
CONOCIMIENTO PRODUCTO DEL APRENDIZAJE	La recta secante puede estar muy próxima a la recta tangente cuando la distancia entre los puntos es casi nula, esto es equivalente a decir que la recta tangente es la posición límite de la recta secante

TAREA 3. *¿Cuándo la pendiente de la recta secante es igual a la pendiente de la recta tangente?*: Se espera que los alumnos muevan el punto C hacia el punto A. Durante este movimiento el alumno podrá notar que la pendiente es casi igual cuando la recta secante está muy próxima de la recta tangente.

El archivo TAREA 3 es similar al archivo TAREA 2 con la diferencia de que éste muestra las pendientes de cada recta y la manera en que al mover el punto C acercándolo hacia A fijo, la pendiente de la recta secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente.



INTENCIÓN	Buscar que la pendiente de la recta secante sea igual a la pendiente de la recta tangente
ACCIÓN	Acercar el punto C hasta el punto A
RETROACCIÓN	La recta secante se mueve hacia la recta tangente, y las pendientes se hacen casi iguales. Además la ecuación de la recta secante se aproxima a la ecuación de la recta tangente
INTERPRETACIÓN	La pendiente dela recta tangente es casi igual cuando los dos puntos (A y C) se encuentran a una distancia casi igual a 0

VALIDACIÓN	La pendiente de la recta secante es casi igual a la pendiente de la recta tangente cuando C está muy cerca de A
CONOCIMIENTO NECESARIO PARA LA VALIDACIÓN	Saber cuándo dos pendientes son iguales
CONOCIMIENTO PRODUCTO DEL APRENDIZAJE	Cuando la recta secante es muy próxima a la recta tangente, las pendientes tienden a ser iguales o cuando C se aproxima a A las pendientes son casi iguales

Después de la aplicación de las tres tareas, se deberá realizar una puesta en común, donde uno de los alumnos exponga las acciones realizadas y el conocimiento adquirido producto de la situación a-didáctica, esto permite generar un espacio de comunicación en los alumnos. Esta puesta en común también permite verificar si todos los alumnos identificaron los comportamientos visuales de la derivada. Una vez adquirido el conocimiento anterior la actividad deberá pasar de ser una situación a-didáctica a una situación didáctica, donde el profesor interviene para realizar la institucionalización, la cual consiste en explicitar las relaciones entre el conocimiento que se produjo en el estudiante y el saber.

4. Conclusiones

En esta propuesta vemos cómo es posible prever un aprendizaje por adaptación, resultado de la interacción de los alumnos con las figuras dinámicas, y cómo es posible que el profesor relacione los conocimientos producto de este proceso de aprendizaje por adaptación con las propiedades de la derivada en un punto, que es el saber que desea enseñar. Por supuesto que no pretendemos afirmar que con esta actividad los alumnos aprendan lo que es la derivada, puesto que es sólo la primera parte de una serie de actividades que concluyen con su definición. Nuestro propósito es ilustrar cómo la TSD nos provee de un modelo de aprendizaje en el que el software puede considerarse como un medio adecuado para que la interacción de los alumnos produzca efectivamente un aprendizaje, posibilitando al profesor el utilizar las experiencias personales de los alumnos para darle sentido al saber que desea enseñar.

5. Bibliografía

Brousseau G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Brousseau G (1986). *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática*. Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19, versión Castellana, 1993.

Ministerio de Educación Nacional (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales*. Enlace editoriales Ltda. Santafé de Bogotá, D.C.

Estudio de la construcción de pasos de razonamiento en problemas de demostración de geometría

Jesús David Berrío Valbuena*, Martín Acosta Gempeler** y Jorge Fiallo Leal*

*Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

**Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.
jberrio@matematicas.uis.edu.co; maedu@hotmail.com; jfiallo@uis.edu.co

Resumen

Se estudia el uso de un software –asistente de demostración– utilizado en la exploración de reglas teóricas de la geometría euclidiana, y que facilita la construcción y validación de pasos de razonamiento en el proceso de construcción de demostraciones formales. Nuestra hipótesis es que "el proceso de exploración de reglas teóricas, en el asistente de demostración, caracterizado por procesos de razonamiento abductivo y deductivo es interiorizado progresivamente por el estudiante". Mostraremos la funcionalidad del asistente de demostración, y algunas conclusiones obtenidas en lo que va del desarrollo de la investigación.

1. Introducción

La estructura y la metodología del curso de Geometría Euclidiana, impartido en las carreras del Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, apuntan a que una vez finalizado el curso, el estudiante este en capacidad de construir demostraciones deductivas formales. Los problemas que se proponen en las clases se trabajan en dos fases. La primera fase consiste en una construcción geométrica sobre un software de geometría dinámica para favorecer la identificación de: propiedades que se garantizan por medio del uso de herramientas del software y las propiedades que son resultados de otras propiedades; la segunda fase consiste en la justificación teórica de las propiedades que no se garantizan por construcción.

Para favorecer los procesos de razonamiento dentro de esta actividad y la adquisición de la teoría relativa a las construcciones obtenidas mediante el uso de software de geometría dinámica, proponemos el uso del asistente de demostración, atendiendo la necesidad de la exploración de la teoría para encontrar definiciones, postulados o teoremas susceptibles de justificar las

afirmaciones que se quieren demostrar.

El asistente de demostración es un programa matemático computacional que comprende una base de datos de ciento setenta (170) registros con los postulados, definiciones y teoremas a estudiar en el curso de Geometría Euclidiana. Permite realizar búsquedas en esa base de datos con tres criterios: el nombre, el antecedente y el consecuente. Este asistente de demostración es una herramienta de carácter dinámico que le ayuda al individuo en la construcción y verificación de la validez de pasos de razonamiento para la escritura de una demostración formal deductiva.

Nuestra hipótesis es que, el uso del asistente de demostración, caracterizado por procesos de razonamiento abductivo y deductivo se convierten en propiedad del individuo coadyuvando a la interiorización de la teoría. Para obtener algunos datos que nos permitan verificar o refutar nuestra hipótesis, Se proponen una serie de problemas a los cuales se les practican un análisis a priori (este análisis permite poner de manifiesto relaciones hipotéticas entre las variables en función de sus características y contrastarlas con el resultado de la experimentación). Posteriormente son llevados al aula, allí se hacen videograbaciones de los estudiantes resolviendo estos problemas a la vez que son entrevistados sobre las acciones que realizan en la construcción de las demostraciones formales.

En este documento presentamos algunos aspectos metodológicos y teóricos que sustentan nuestra propuesta, y en la exposición, mostraremos los usos del asistente de demostración, algunas de las dificultades que hemos logrado identificar en los estudiantes, en la construcción de demostraciones formales, tales como: errores en la secuenciación de los pasos de razonamiento, errores sobre los controles lógicos en la enunciación de pasos de razonamiento y razonamientos circulares, y finalmente ejemplificaremos cómo el proceso de exploración de la teoría al igual que la teoría es progresivamente interiorizados por lo estudiantes.

2. Referencias teóricas

Interesados, exclusivamente, en el estudio de la construcción de una demostración formal, notamos que hay tres procesos necesarios en esta actividad (tal como se puede apreciar en la figura 1): la construcción de pasos de razonamiento, la verificación de la validez de los pasos de razonamiento y la secuenciación de los mismos. Estos procesos se explicitan en el asistente de demostración.

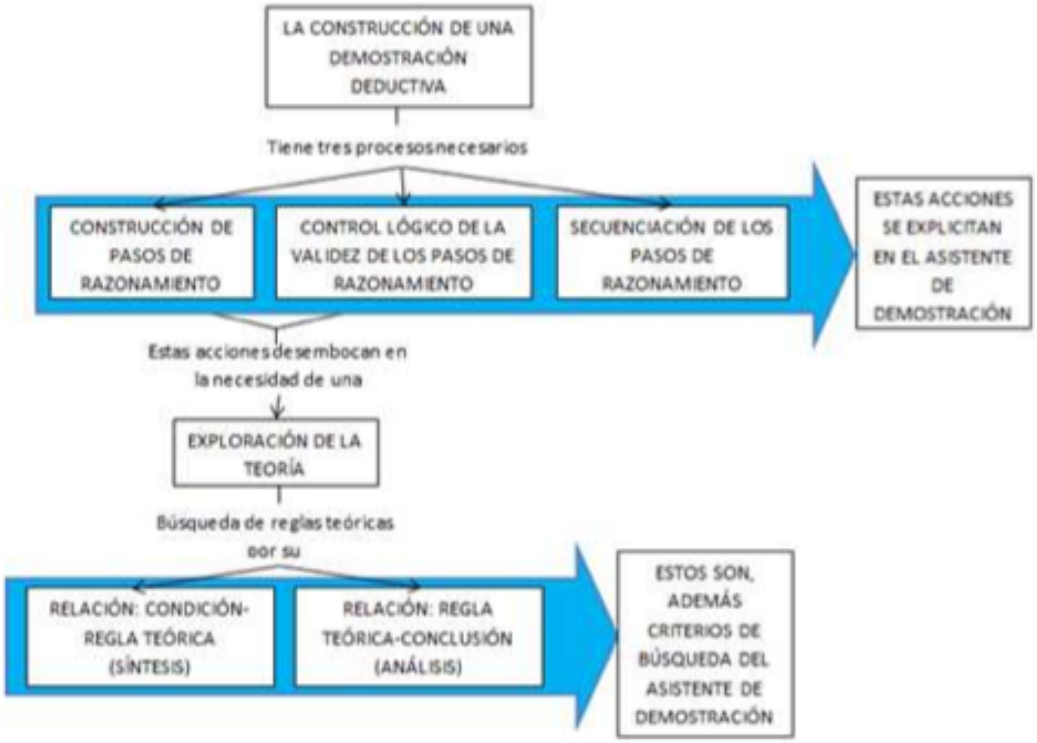


Figura 1. Procesos necesarios en la construcción de una demostración formal

La construcción y la verificación de la validez de los pasos de razonamiento desembocan en la necesidad de explorar reglas teóricas con ciertas características. Bien sea, por la relación condiciones- regla teórica (cuya búsqueda en el asistente se da mediante el filtro "en el antecedente". Se dice que hace síntesis dado que parte de los datos) o por la relación conclusiones-regla teórica (cuya búsqueda en el asistente se da mediante el filtro "en el consecuente". Se dice que hace análisis dado que, a partir de las conclusiones busca la regla teórica que mejor se ajusta a los datos). A este tipo de búsquedas es lo que llamamos dentro de nuestro trabajo, exploración de la teoría.

Manifestamos (ver Figura 2) que es posible desarrollar esta exploración de la teoría primero como una serie de acciones externas al individuo, mediadas por el asistente de demostración, y que progresivamente esta se va interiorizando. Para ello nos basamos en el concepto de zona de desarrollo próximo de Vygotski.

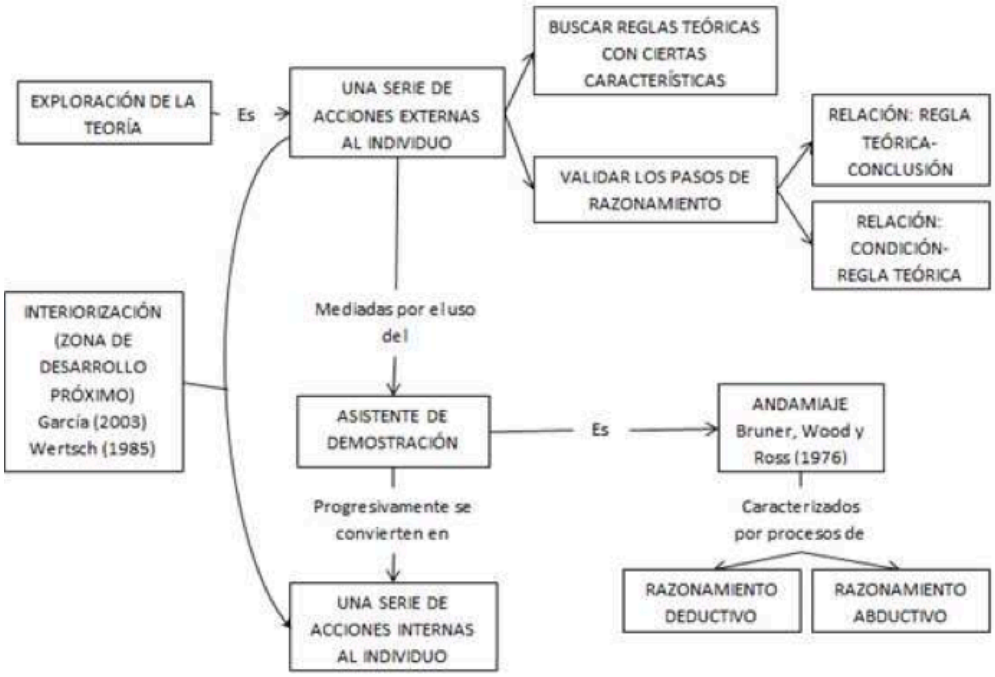


Figura 2. Marco Conceptual

Esta zona de desarrollo próximo, según García (2003) es el momento en el cual se manifiestan en el ámbito social las habilidades psicológicas o las funciones mentales superiores, y existe un momento posterior donde se manifiestan a nivel individual, es decir, es un fenómeno social que progresiva- mente se va transformando en propiedad del individuo. Desde este enfoque Wood, Bruner y Ross (1976) formulan el concepto de andamiaje -que refleja este carácter dinámico y sugiere que el apoyo que se le proporciona al individuo, es aquel que se ajusta a sus competencias en cada momento y que va variando a medida que ´este puede tener m´as responsabilidad en la actividad.

3. Metodología

El diseño de esta investigación está enmarcado en una metodología cualitativa, bajo un enfoque clínico desde la perspectiva de Hunting (1997), quien manifiesta este tipo de enfoque permite al investigador ampliar su experiencia acerca de cómo trabaja matemáticamente la mente del individuo.

Se hacen videograbaciones a cinco estudiantes, del curso de geometría euclidiana de la carrera de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, en donde se enfrentan

a problemas de demostración. Se realizan unos análisis a priori para explicitar previamente los procesos de razonamiento que realizan durante la solución del problema para el cual hacen uso del asistente de demostración; unos análisis a posteriori para explicitar las estructuras de conocimiento construidas los procesos de razonamiento detectados. Y finalmente, se hace un comparativo entre los datos que se establecieron hipotéticamente en contraposición a los datos que se obtuvieron producto del análisis a posteriori de las entrevistas clínicas

4. Resultados

Este es un trabajo que se encuentra en ejecución. Por tanto, se mostrarán posteriormente resultados parciales con respecto a la aplicación del problema de demostración, el análisis a priori, la entrevista clínica y el análisis a posteriori. En la presentación de la comunicación, mostraremos algunos referentes teóricos, el funcionamiento del asistente de demostración, algunas de las respuestas dadas por los estudiantes al problema planteado y las conclusiones obtenidas.

5. Referencias

García, M. (2003). Construcción de la actividad conjunta y traspaso de control en una situación de juego interactivo padres-hijos, Tesis Doctoral, Universitat Rovira i Virgili.

Hunting, R. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice, *Journal of Mathematical Behavior* 16, 145–164.

Wertsch, J. (1985). Vigotsky and the social formation of mind, USA: Harvard University Press.

Wood D., Bruner J., & Ross G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry* 17, 89–100.

Automatización de actos de devolución en actividades de matemática recreativa utilizando el software Cabri LM

Martín Acosta Gempeler*, Marisol Rueda Puentes**, Ángel Miguel Niño Navas**

*Universidad Distrital Francisco José de Caldas
**Universidad Industrial de Santander, Grupo EDUMAT– UIS
maedu@hotmail.com; mruedapu@matematicas.uis.edu.co; alfarzan77@hotmail.com

Resumen

Esta es una investigación de tipo ingeniería didáctica, en la cual se adoptó actividades de matemática recreativa por medio del software Cabri LM, intentando automatizar los actos de devolución abordados por Guy Brousseau en su Teoría de las Situaciones Didácticas, que debe tener en cuenta el docente en las intervenciones durante la clase como una reacción a una acción.

1. Presentación del problema

Las investigaciones pedagógicas muestran que los alumnos aprenden y retienen mejor lo que tocan y manipulan. Por eso el software interactivo tiene un impacto positivo en el aprendizaje porque permite a los alumnos manipular en la pantalla del computador objetos que corresponden a conceptos teóricos, pero que al mismo tiempo adquieren una realidad perceptible. De esta manera, el software se convierte en un puente entre el mundo real que rodea al alumno y el mundo abstracto de las matemáticas.

Por otra parte, según los planteamientos de la matemática recreativa, uno de los factores que incide positivamente en el aprendizaje es el modo de intervención del profesor, que busca una mayor implicación de los estudiantes fomentando la identificación de errores, la búsqueda de comprensión y la comunicación de procesos. Estas intervenciones son el fruto de los actos de devolución que realiza el docente.

En esta investigación pretendemos automatizar esos actos de devolución en el software Cabri LM de manera que los estudiantes reciban la retroalimentación que buscan por medio de la identificación de sus errores y la comprensión de sus procesos.

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos formular el problema de la siguiente manera: ¿Cómo utilizar Cabri LM para automatizar actos de devolución en actividades de matemática recreativa y calendario matemático, de manera que se favorezca el empoderamiento matemático de estudiantes de básica primaria entre los 10 y 11 años?

2. Referentes teóricos

Se utilizó la teoría de las situaciones didácticas para analizar las actividades de Matemática Recreativa y Semillero Matemático con el fin de identificar las decisiones didácticas. Los conceptos clave son los de *devolución* y *validación*, según los cuales el estudiante asume la responsabilidad de resolver una situación problema y está en capacidad de decidir si el resultado es correcto; de lo contrario, debe corregirlo.

Por otra parte, la teoría de las situaciones didácticas dará argumentos para automatizar las decisiones didácticas a través del software CABRI LM. **El proceso (acto) de devolución** se refiere a la forma como el profesor interviene en la interacción del estudiante con el medio, con el fin de garantizar la posibilidad de la validación. Al combinar las actividades de Matemática Recreativa con el software Cabri LM y aplicando la TSD se piensa que se debe obtendrá una nueva herramienta que mejore la enseñanza de las Matemáticas.

3. Metodología

Se utilizó la metodología de ingeniería didáctica, que comprende tres fases: diseño, experimentación y validación.

Población. Se trabajó con un grupo de estudiantes de básica primaria entre los 10 y 11 años.

Toma de datos. Registro en vídeo de tres parejas de estudiantes y notas de campo de los observadores.

4. Análisis de datos y conclusiones

Consideramos este trabajo como un primer esfuerzo de automatizar actos de devolución en actividades de matemática recreativa, que necesariamente tiene limitaciones, pero que abrió perspectivas interesantes para el desarrollo de la educación matemática y el uso de las tecnologías computacionales. El software Cabri LM, al posibilitar la representación informática del trabajo del estudiante y la programación flexible de las retroacciones, genera oportunidades

de automatizar acciones que antes eran exclusivas del profesor. Esta nueva situación requiere un estudio cuidadoso para determinar las ventajas y desventajas para el aprendizaje de los estudiantes. Nuestra experimentación nos permite prever un efecto positivo de la automatización de los actos de devolución, pero es necesario hacer estudios con un mayor número de estudiantes

5. Referencias bibliográficas

De Guzmán, Miguel. (1984). *Juegos matemáticos en la enseñanza.* En Actas de las IV JAEM. Tenerife (pp. 49-85)

Margolinas, C. (2009) *La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas*. (Martín Eduardo Acosta & Jorge Fiallo, trad.) Colombia: Universidad Industrial de Santander, UIS. (Obra original publicada en 1998)

Mora, A. & Lucena, A. (2008) "*Conceptualización de la traslación con la mediación del programa Cabri LM*". Trabajo de grado. Escuela de matemáticas. Universidad Industrial de Santander.

El rol de los estándares para matemáticas en el discurso de profesores de primaria: Una visión sobre el desarrollo del pensamiento algebraico

Janeth Castellanos Rodríguez*, Juddy Amparo Valderrama Moreno*, Solange Roa Fuentes**

*Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia.
**Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.
janethe.26@gmail.com; juddyamparo@gmail.com; roafuentes@gmail.com.

Resumen

En este artículo se describe una propuesta de investigación que está en proceso de diseño, la cual pretende hacer un análisis acerca de los elementos que hacen parte del Discurso Matemático Escolar en cuanto al desarrollo del Pensamiento Algebraico en profesores que enseñan matemáticas en primaria. Para este proceso se tienen como referentes documentos que contienen los parámetros estandarizados para el área de Matemática tanto a nivel internacional de la NCTM como a nivel nacional del MEN. La base conceptual de este trabajo se desarrolla a través de tres categorías: Los Estándares de Competencia, el Pensamiento Algebraico y el Discurso Matemático Escolar. En este escrito se destacan aspectos teóricos del trabajo y el método que lo guía.

1. Introducción

En los últimos 20 años los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra han tenido grandes cambios en cuanto a la edad de iniciación de los estudiantes en esta área de las matemáticas, esto se debe a que se ha trabajado en investigaciones y propuestas, las cuales han corroborado que el desarrollo del Pensamiento Algebraico en edades tempranas preparan a los niños para enfrentarse en la construcción de procesos algebraicos más complejos.

El propósito de este artículo es mostrar los avances de nuestro trabajo, el cual inicia con una mirada a los documentos públicos y estandarizados que orientan el proceso de enseñanza de las matemáticas, principalmente en lo que tiene que ver con el Pensamiento Algebraico, en un ámbito internacional y nacional; nos referimos a los Principios y Estándares Básicos para la Matemática, de las NTCM y a Los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencia, del MEN. Además, se trata a groso modo las bases conceptuales sobre las cuales cimentamos nuestro trabajo, profundizando en las tres categorías en las que se estructura nuestra

propuesta. Finalmente, mostramos la ruta metodológica que guía nuestra práctica, teniendo en cuenta que, por sus características este proceso investigativo se inscribe en un diseño cualitativo etnográfico con estudio de casos; así mismo se da una idea sobre los resultados e impacto esperados.

2. Pensamiento algebraico en los primeros años escolares

A nivel internacional y a nivel nacional el estudio del Álgebra en edades tempranas ha sido un tema de interés, es así que en estos dos ámbitos encontramos documentos de dominio público que se constituyen en un referente conceptual a la hora de enseñar las Matemáticas. A nivel Internacional se cuenta con Los Principios y Estándares para la Educación Matemática publicados por la *National Council of Teacher of Mathematics* (NCTM, 2000, por sus siglas en inglés) y a nivel nacional se cuenta con dos documentos bandera publicados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), los Lineamientos Curriculares publicados en 1998 y Los Estándares Básicos de Competencia en Matemática publicados en el año 2006. En estos documentos se describe lo que la matemática debe enseñar en los diferentes niveles, y su propósito es integrar la enseñanza de las matemáticas en un contexto de situaciones problema, con una visión global e integral fundamentada en tres grandes aspectos: los Procesos, Conocimientos Básicos y el Contexto.

Desde los documentos anteriormente citados nos centraremos en lo que ocupa nuestro interés: dar una mirada a la enseñanza del Pensamiento Algebraico en la básica primaria, entendiendo que dicho pensamiento debe ir más allá de la aritmética y el cálculo, de tal manera que los estudiantes logren comprender profundamente las estructuras matemáticas. Cai y Knuth (2011) mencionan que "no se trata tan solo de suavizar el paso de la aritmética al álgebra, debe ser un proceso que permita entender y comprender las matemáticas a través del desarrollo de caminos particulares de pensamiento, que incluye el análisis de relaciones entre cantidades, el reconocimiento de estructuras, el estudio del cambio, la generalización, la prueba y la predicción" (p.ix).

Por otra parte resaltamos el interés de estudiar el desarrollo del Pensamiento Algebraico a tempranas edades en dos propuestas: Pre-Álgebra y *Early Algebra*. En Molina (2009) encontramos un trabajo basado en Early-Álgebra, con el que se propone un aprendizaje por comprensión que se propone facilitar el aprendizaje del Álgebra. Así mismo la Pre-Álgebra es una propuesta muy similar a la expuesta anteriormente, Molina (2009) destaca que su principal objetivo es facilitar la transición entre la aritmética y el Álgebra, evitando así rupturas o cortes entre ambas, como las que enfrentamos diariamente en las aulas de clase. De igual forma Merino (2012) enfoca su estudio del Pensamiento Algebraico enmarcándolo en el campo de Early Algebra, donde hace relevancia a la introducción de modos de Pensamiento Algebraico en la Matemática escolar desde los primeros cursos escolares.

Dado nuestro contexto vemos la necesidad de hacer un análisis y una comparación entre lo estipulado en Los Estándares Básicos de Competencia del MEN (2006), en cuanto a lo referente al Pensamiento Algebraico entendido desde el Pensamiento Variacional y los Sistemas Algebraicos y Analíticos y la manera como éstos permean el discurso del profesor de básica primaria en la clase de Matemáticas, por tanto formulamos la siguiente pregunta: *¿Cómo los docentes de Básica Primaria incorporan los Estándares Básicos de Competencia en su Discurso Matemático para promover el desarrollo del Pensamiento Algebraico en sus estudiantes?*

3. Desarrollo del álgebra escolar desde tres ejes

Los **Estándares** para el área de matemáticas "deben entenderse en términos de procesos de desarrollo de competencias, los cuales se trabajan de manera gradual e integral, con el fin de ir superando niveles de complejidad creciente en el desarrollo de las competencias a lo largo del proceso educativo" (MEN, 2006, p.76). Para nuestro caso se sitúa en el Pensamiento Algebraico y se toma del Pensamiento Variacional y los Sistemas Algebraicos; los Estándares son definidos desde el MEN (2006) como criterios claros y públicos que permiten juzgar si un estudiante, una institución o el sistema educativo en su conjunto cumplen con unas expectativas comunes de calidad en cuanto al pensamiento matemático. Además tomaremos de referencia lo estipulado por la NCTM (2000) con respecto al concepto de Estándar de Álgebra, el cual se centra en las relaciones entre cantidades incluyendo las funciones, las formas de representaciones de las relaciones matemáticas y el estudio del cambio.

En el estudio del **Pensamiento Algebraico** no se hace referencia al punto de llegada del álgebra y su continuidad por funciones en cálculo, sino al estudio de patrones y relaciones que llevan al proceso de generalización, además del estudio del cambio y la variación desde los primeros años escolares. El MEN (2006) se refiere a la Variación y Cambio, y a los Sistemas Analíticos y Algebraicos como el reconocimiento, la percepción, la identificación y caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos al igual que su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos. También enfatiza en tres ejes en que se recogen los estándares de este pensamiento: patrones y regularidades, procesos algebraicos y análisis de funciones (Posada, 2005); los cuales deben ser desarrollados de tal forma que, a través de situaciones de contexto el estudiante realice procesos de ver, decir, registrar, argumentar, validar y generalizar. Es así que entenderemos estos ejes desde diferentes miradas, para determinar los procesos que aportan al desarrollo del Pensamiento Algebraico.

Finalmente hablaremos de un último eje el **Discurso Matemático Escolar**, el cual hace referencia a las estrategias que el maestro pone en juego en el momento de preparar y llevar al aula un saber erudito, de manera tal, que este pase a ser un conocimiento asequible para el niño o joven a quien va dirigido. Desde el MEN (1998) se habla de una repersonalización del

conocimiento, pues este debe nacer de adaptaciones o situaciones específicas, dando respuesta a las condiciones naturales que tienen sentido para el alumno.

Por su parte Cantoral (2004) habla de la formas de difusión del saber a través de un proceso en el que el "saber ha de ser problematizado antes de ser llevado al aula con el fin de desnaturalizarlo o desmatematizarlo en un complejo de prácticas de naturaleza social que den sentido y significado al saber matemático posibilitando su carácter heurístico y funcional" (p.6). Es así que el profesor ha de crear las condiciones necesarias para producir la apropiación del conocimiento por parte del estudiante, de tal manera que le permita ser aplicado a contextos diversos según las necesidades.

Por otra parte es importante mencionar el papel fundamental que juega la comunicación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, así por ejemplo los niños deben aprender a explicar y sustentar sus respuestas, a describir sus estrategias, a interpretar sus gráficos y símbolos, entre otros. En este sentido Montiel (2006) se refiere al Discurso Matemático Escolar como "el conjunto de interacciones entre profesor y estudiantes, dirigidas por la exposición coherente de los saberes escolares; es la forma de tratar didácticamente los objetos matemáticos en clase" (p.3). El Discurso Matemático Escolar tiene gran amplitud en cuanto a sus definiciones, sin embargo para este caso lo entenderemos desde Chevallard (1998) como un conjunto de acciones didácticas (métodos y técnicas) llevadas al aula con el propósito de crear las condiciones pertinentes que posibiliten la aprehensión de un saber matemático. Dicho saber antes de llegar al aula debe pasar por una transformación matemática que consiste en establecer puentes que logren conectar el saber erudito con el saber didáctico, proceso considerado como trasposición didáctica. Esta transformación la debe hacer el docente a través la contextualización de dicho contenido para que pueda ser asimilado, aplicado y funcional para el estudiante.

4. Ruta metodológica

Esta investigación es cualitativa con un enfoque etnográfico con estudio de casos. A lo largo del estudio, no buscamos hacer una generalización de resultados, sino una descripción minuciosa de una realidad del proceso enseñanza y aprendizaje que permita enriquecer la comprensión del discurso Matemático Escolar y los elementos empleados en él. Desde este punto de vista la investigación busca descubrir, construir e interpretar una realidad vivenciada en la clase de matemáticas.

Esta investigación se llevará a cabo con docentes de Básica Primaria que orientan el área de Matemáticas en instituciones educativas públicas.

Este trabajo se desarrollará en 4 fases:

Fase1: Estudio de Concepciones, lo que el profesor dice.
Fase 2: Revisión Documental, lo que el profesor planea.
Fase 3: Trabajo en el aula, lo que el profesor hace.
Fase 4. Entrevista en profundidad, lo que el profesor sabe.

5. Resultados e impacto esperado

Al finalizar esta investigación se tendrá fundamentos teóricos que den cuenta del trabajo que se realiza en las instituciones educativas en cuanto al desarrollo del Pensamiento Algebraico en los niveles de la básica primaria. De igual forma se tendrá claridad sobre el rol que desempeñan los Estándares Básicos de Competencia en el Discurso Matemático Escolar y la manera como son contextualizados y llevados al aula en el desarrollo el Pensamiento Algebraico.

Es así que al finalizar este trabajo se espera tener los siguientes impactos:

- Generar espacios de diálogo al interior de las instituciones educativas.
- Crear la necesidad de la Formación Académica de los docentes que orientan el área de matemáticas en primaria.
- Reflexionar sobre la interpretación y el análisis realizado hasta el momento sobre los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas.

6. Referencias bibliograficas

Cai, J. & Knuth, E. (2011). A Global dialogue about Early Algebraization from multiple perspectives en J. Cai y E. Knuth (Eds.) *Early Algebraization* (pp. i-x). Berlin: Springer.

Cantoral, R. (2001). *Enseñanza de la Matematica en la Educación Superior, de Revista Electrónica Sinéctica,* (19) 3-27.

Cantoral , R. (2004). *Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional, una mirada socioepistemológica.* Diáz, L. (eds). Acta Latinoamericana de Matemáticas Educativa (Volumen 4 pp. 1-9). Mexico: Comité Latinoamericano de matemática Educativa.

Chevallard, Y. (1991). *La Transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de* Matemáticas: Autor. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estádares Básicos de Competencia en Matemáticas.* Recuperado el 07 de 08 de 2010, de Estádares Básicos de Competencia en Matemáticas.: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Merino, E. (2012). Patrones y Representaciones de Alumnos de 5° de Educación Primaria en una Tarea Generalización. (Tesis de Master no publicada). Universidad de Granada, España.

Molina, M. (2006). Desarrollo del Pensamiento Relacional y Comprension del Signo Igual por alumnos de tercero de Educacion Primaria. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada. Granada.

Montiel, G. (2010). Hacia el rediseño del discurso: Formación docente en linea centrada en la resignificación de la Matemática Escolar. *Revista Latioamericana de Investigación en Matemática Educacativa*, 13(4), 69-84.

Nacional Council of Teacher of Mathematics. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*.

Posada, M. (2005). *Interpretacion e implementacion de los Estandares Básicos de Competencia en Matemáticas.* Medellin Colombia. Digital Express Ltda.

Rediseño del discurso escolar desde la creación de talleres: experiencia de formación docente del semillero matemático

Claudia Barajas Arenas, María del Pilar Peralta Acevedo

Grupo EDUMAT-UIS, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga (Colombia)
claubaren28@hotmail.com, pilarik_29@hotmail.com

Resumen

El Semillero Matemático del Grupo EDUMAT-UIS suma una experiencia de más de 10 años diseñando actividades para favorecer el aprendizaje de las matemáticas de niños y jóvenes; al considerar que la experiencia proviene de la relación dialéctica entre la práctica y el aprendizaje, esta comunicación reporta la fase de revisión y retroalimentación de los talleres diseñados en el Semillero Matemático centrándose en el análisis de los elementos didácticos empleados en el diseño de las actividades del taller con el propósito de superar la enseñanza tradicional y rediseñar el discurso escolar a través del mismo.

1. Introducción

Diversas investigaciones en educación matemática reflexionan sobre el discurso matemático escolar (dME) y su incidencia en las prácticas docentes y en la formación matemática de los estudiantes; Montiel (2005, en Castañeda et al, 2010, p. 5) afirma que el "el discurso matemático escolar es una noción teórica que se refiere a la manera en cómo se interpreta, usa y se comparte en situación escolar aquella matemática que la definimos como *escolar*"; asimismo la autora expone que el que "el discurso escolar es el conjunto de interacciones entre profesor y estudiantes, dirigidas por la exposición coherente de los saberes escolares" (ibídem).

En términos de lo metodológico, Soto (2010, p. 57 citando a Castañeda, 2006) distingue dos elementos que definen al *discurso matemático escolar:* los libros de texto en los que se apoya la enseñanza y, por otra, el tipo de explicaciones que brinda un docente. Para efectos de esta comunicación, nos concentraremos en los talleres que diseñan los profesores del programa Semillero Matemático para apoyarse y desarrollar la actividad aúlica buscando, con ello, resaltar

el proceso de revisión que conduce el primer borrador del taller hacia el taller que se aplica en el aula.

2. Los talleres: una propuesta para rediseñar el discurso matemático escolar

Los talleres son el principal recurso didáctico del Semillero Matemático; a medida que la experiencia nos ha aportado aprendizaje, los integrantes del grupo aunamos esfuerzos por crear materiales que mengüen el antagonismo en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que ha colocado en una ladera las actividades propias de la matemática como el descernimiento, el razonamiento, la deducción, la generalización, la creación de estrategias y la demostración, y en la otra ladera al estudiante y su capacidad para aprender.

Al socializar el proceso de análisis de los talleres se quiere señalar la fuerte incidencia de la enseñanza tradicional que empuja a los profesores a propiciar actividades matemáticas en las cuales se pide a los estudiantes ejercitar algo enseñado mientras que en la metodología del Semillero Matemático (a través de los talleres) se busca involucrar al estudiante en la construcción del conocimiento matemático lo cual implica, para nosotros, evidenciar espacios dentro de la actividad matemática propuesta que permitan la puesta en marcha de la intuición, el análisis de estrategias de solución, la comunicación, el debate sobre lo que un estudiante considera sobre el trabajo matemático de su compañero respecto al suyo logrando, así, re-descubrir o construir el conocimiento matemático lo que favorece el aprendizaje significativo y la motivación hacia las matemáticas.

De ese modo, asumimos el ejercicio de crear los talleres del Semillero Matemático como un escenario propio para rediseñar el discurso matemático escolar (y a su vez el discurso escolar) pues desde aquel intentamos superar la concepción de que la Matemática es un conocimiento acabado y continuo ya que desde esta no se le permite al estudiante plantear nuevas hipótesis, inferir y transformar las situaciones que hacen emerger el conocimiento, en busca de otros significados sobre la actividad matemática.

3. Las fases de los talleres

Como se expone en la Figura 1, los talleres realizan un recorrido de cinco fases: *(i) propuesta y elaboración, (ii) revisión a priori, (iii) ejecución, (iv) revisión a posteriori, y (v) final* con el propósito de asegurar que los estudiantes estén involucrados en la actividad matemática.

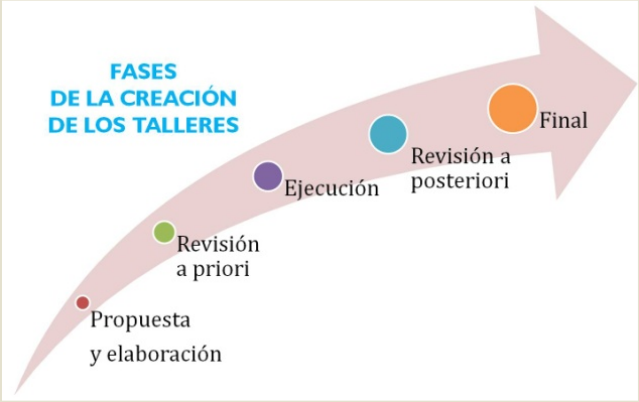


Figura 1. Fases del proceso de creación de talleres del Semillero Matemático.

Para efectos de esta comunicación no se explicarán cada una de las fases sino que precisaremos en la fase "revisión a priori" realizando un análisis de los elementos propuestos en la fase "propuesta y elaboración". Así, en la primera fase del proceso, el equipo de trabajo del curso[6] elige un tema o concepto que enmarca el taller a realizar, después de una revisión bibliográfica, elaboran el taller empleando su experiencia y saber en el ejercicio matemático (ver Ilustración 2) habiendo llegando a acuerdos en la parte didáctica la cual "se centra en identificar las formas, procedimientos, estrategias por los que se transmite el saber, por ejemplo el tipo de recursos gráficos y explicativos que el autor utiliza, el enfoque o paradigma de aprendizaje, la naturaleza de los ejemplos y problemas que plantea" (Castañeda, Rosas y Molina, 2010, p. 6).

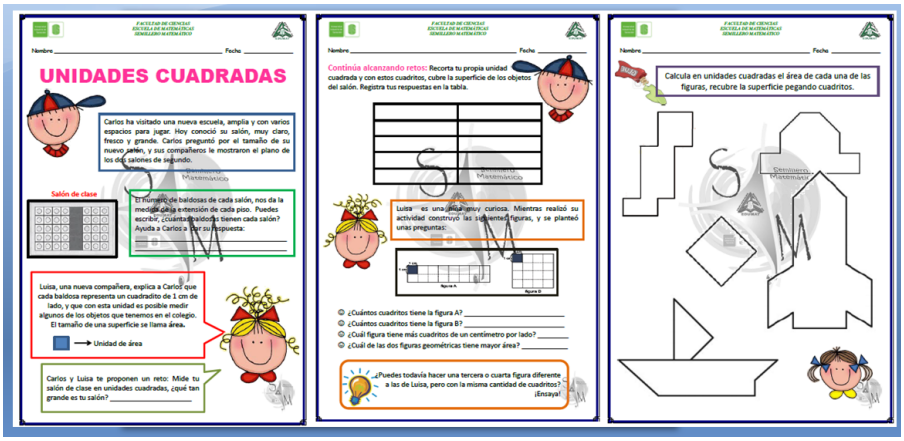


Figura 2. Taller en fase de "preparación y elaboración"

En la fase de "revisión a priori" dos profesores, conocedores de la metodología del Semillero y con la claridad de la intención de los talleres como recursos didáctico y vehículo para el rediseño

[6] Cada curso del Semillero cuenta, como mínimo, con un profesor de matemáticas titulado y un profesor en formación de la carrera Licenciatura en Matemáticas de la UIS.

de discurso matemático escolar, revisan el taller detectando en su diseño aspectos que no promuevan ni faciliten la interacción del estudiante con el saber matemático, cuestionando la organización y representación del saber en los talleres, analizando las funciones del texto así como la forma en que se "representa" o reconstruye el saber en el taller (ibídem, citando a Dijk, 2002); analizando los momentos elegidos para la institucionalización del saber[7].

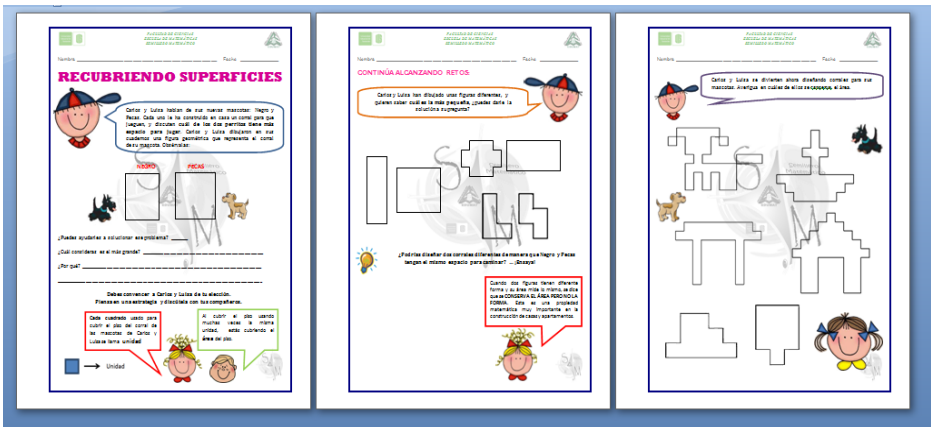


Figura 3. Taller después de la fase de "revisión a priori"

Finalmente, en esta misma fase, una vez realizada la revisión, se socializa con los profesores-autores del taller el análisis realizado y los elementos puestos en escena en el mismo para que, posteriormente, realicen el taller mejorado que será ejecutado en el aula.

4. Conclusiones

Al someter nuestro propio material a revisión a través de una metodología que se ha construido por la experiencia, la orientación de constructos teóricos como los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, los Estándares de la Comisión Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, por sus siglas en inglés) y la iniciativa de ofrecer a los estudiantes mejores experiencias de aprendizaje estamos promoviendo, al interior del grupo, la inquietud de reflexionar sobre lo que presentan los libros de textos en cuanto al discurso matemático escolar y las diferentes actividades matemáticas que contemplan.

[7] La "institucionalización" hace referencia a todo aquello que cumple el rol de preservar el conocimiento; en él se observan también ciertas reglas o procedimientos para organizar y garantizar que los saberes trasciendan al tiempo. […] La función de la institucionalización es la de establecer y dar un estatus oficial al conocimiento referido en una actividad didáctica y representa una síntesis o generalización de las actividades y producciones de los estudiantes, estableciendo así los objetos de saber oficiales (Castañeda *et ali*, 2012, pp. 29-30).

De este modo, a través del análisis que se presentará buscamos mostrar a los profesores participantes del Simposio la incidencia de las decisiones y elecciones que se realizan a nivel didáctico y metodológico en el diseño de los recursos para la enseñanza de las matemáticas, cuestiones que son objeto de investigación en la educación matemática.

5. Referencias bibliográficas

Castañeda, A, Rosas, A. y Molina, G. (2012). La institucionalización del conocimiento en la clase de matemáticas. Un estudio sobre el discurso del aula. *Perfiles Educativos*. Vol. XXXIV, 135. pp. 26-40. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S0185-26982012000100003&script=sci_arttext

_____ (2010). *El discurso matemático escolar de los logaritmos en libros de texto*. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. CICATA-IPN. (México). Recuperado de http://www.soarem.org.ar/Documentos/44%20Casta%F1eda.pdf

Soto, D. (2010). *El discurso matemático escolar y la exclusión. Una visión socioepistemológica*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Aprendizajes que pueden emerger en la formación de un profesor de matemáticas que funge como tutor

Islenis Carolina Botello Cuvides, Sandra Evely Parada R.

Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia,
islenis.botello@correo.uis.edu.co; sparada@matematicas.uis.edu.co

Resumen

En este documento presentamos resultados de una investigación en la que se analizan los aprendizajes de alumnos-maestros que realizan tutorías entre pares con estudiantes de primer nivel universitario de Cálculo Diferencial, con este estudio se buscó responder: ¿qué aprendizajes emergen de las actividades de seguimiento y acompañamiento académico en los profesores en formación? Para ello, se sistematizaron los datos obtenidos a partir de: videograbaciones, formatos de seguimiento tutorial, bitácoras, y otros. El trabajo de campo se realizó en dos semestres académicos consecutivos, encontrándose que los aprendizajes corresponden a elementos tanto del contexto didáctico como del contexto matemático.

1. Introducción

La Universidad Industrial de Santander (UIS), ha notado con preocupación la alta tasa de deserción académica de sus estudiantes de primer semestre. Por ello la UIS con el fin de conocer un poco más sobre esta problemática realizó un estudio acerca de esta situación (ver Parada, 2012), encontrando que la asignatura con mayor ´índice de deserción y reprobación es Cálculo I (cálculo diferencial o cálculo de una variable). Para enfrentar dicha problemática, la Universidad ha planteado diferentes alternativas que han tratado de subsanar de una u otra forma dicha situación; sin embargo, ´estas no han logrado generar un impacto relevante frente a este escenario. Al respecto, hemos considerado que dicha problemática puede tomarse como una oportunidad para los profesores en formación de matemáticas y para los estudiantes de Cálculo I.

En el actual plan de estudios de la Licenciatura en Matemáticas se contemplan tres componentes: el matemático, el didáctico y el complementario; que hasta el final convergen en una práctica docente (realizada en los dos últimos semestres), desaprovechando una potencial articulación entre lo que van aprendiendo los profesores en formación dentro de sus cursos, y la práctica real [con la que se van a enfrentar en sus salones de clase], es por ello que en nuestra investigación se plantea la creación de un primer espacio que sirva como puente entre la teoría y la práctica, siguiendo las características que un programa de formación inicial debe presentar según Rico (2004). Posteriormente, se analizarán los aprendizajes que surjan a partir del trabajo en dicho espacio: las tutorías entre pares.

2. Aspectos teóricos y revisión bibliográfica

Para responder a nuestra pregunta de investigación, necesitamos definir algunos elementos teóricos que usaremos tanto en el diseño metodológico de la investigación.

- Tutorías entre pares. Según Goodlad y Hirst (1989) se entiende por tutoría entre pares como el conjunto de prácticas, en las cuales algunos estudiantes ayudan a otros estudiantes, y aprenden enseñando. Luego, existe un tutor (quien ayuda) y un tutorado (el estudiante que presenta dificultades en su proceso de aprendiza je). De acuerdo a Miranda (2010), este tipo de tutorías se fundamenta en la mayor aproximación empática que el estudiante tutorado puede encontrar en los tutores próximos en edad y, con problemáticas semejantes.

- Pensamiento Matemático y Pensamiento Didáctico. Al hablar de profesores en formación es necesario conocer el objetivo y algunos términos claves de la formación inicial. Según Rico (2004), su finalidad es preparar al profesor que inicia su trabajo en el mundo de la educación para la consideración coherente y tratamiento coordinado de las múltiples tareas que requiere la actividad docente. Para efectos de nuestra investigación hablaremos de los términos Pensamiento Matemático y Pensamiento Didáctico. De Parada (2011) retomamos que:

    1. Pensamiento matemático (PM). Resulta de la necesidad del profesor al hacer uso de sus conocimientos del contenido matemático escolar para desarrollar sus prácticas profesionales: a) proponer tareas; b) seleccionar, usar y diseñar recursos; c) comunicarse en el aula; d) hacer adaptaciones curriculares; e) evaluar; f) colaborar; y g) profesionalizarse.

2. Pensamiento didáctico (PD). Se da cuando el profesor se cuestiona sobre las diferentes maneras de acercar los conocimientos matemáticos a los estudiantes, buscando las formas más útiles de representar los contenidos mediante analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones, y demostraciones que permitan hacerla más comprensible a los alumnos.

3. Aspectos Metodológicos

La investigación que se está realizando es de carácter cualitativo y comprendió un trabajo de campo de un año, con una población conformada por estudiantes del curso de Didáctica del Cálculo del 1er y 2do semestre de 2012. Para el diseño, recolección, análisis de datos, ejecución, y posterior evaluación de la alternativa se estipulan las siguientes fases: i) Estudio preliminar, este consistió en el análisis del contexto a nivel nacional e internacional, y la exploración de programas tutoriales en la UIS; ii) Diseño e implementación de un programa tutorial (ASAE I), en esta fase se diseñó la estructura curricular del programa para su posterior implementación; iii) Análisis de los resultados de la Fase II, de la primera implementación se analizó el funcionamiento del programa y la relación tutor ↔ estudiante; iv) Rediseño e implementación de un programa tutorial (ASAE II), de la fase anterior se reestructuró el programa para una nueva implementación; v) Análisis de los resultados de la Fase IV, detección de seis categorías de análisis (de acuerdo al PM y al PD) y la identificación de cuatro perfiles de tutor; vi) Documentación del programa ASAE, descripción de los procesos del programa tutorial; vii) Institucionalización de ASAE en la UIS por parte de la Vicerrectoría Académica y la Escuela de Matemáticas.

Para responder a la pregunta planteada en el resumen del presente documento, a continuación se presentará un episodio de un alumno-tutor en una sesión tutorial y el aprendizaje que surgió tras ella.

4. Un alumno tutor que trata de enseñar límites y recuerda la continuidad de funciones

La actividad tutorial se centra en el tema de la continuidad de una función en un punto, para ello el tutor pregunta a su estudiante sobre inquietudes que tenga referente al tema, manifestando ella una duda sobre por qué su profesora no valió un proceso que había realizado para verificar la continuidad de la función $f(x) = x^2 + \sqrt{7-x}$ en $a = 4$.

Estudiante: La profesora no me valió el punto porque me faltó escribir algo: $\lim_{x\to 4} f(a) \Rightarrow \lim_{4}(4)^2 + \sqrt{7-4} = 17{,}7$. Comprobé las dos primeras condiciones para corroborar la continuidad de una función en un punto, y que si se cumplen las dos primeras, ¡listo!

Tutor: la función es continua en un punto, si cumple las condiciones: i) f(a) exista, ii) $\lim_{x\to 4} f(x)$ exista y iii) $\lim_{x\to 4} f(x) = f(a)$.

Estudiante: yo pienso que si se cumplen las dos primeras condiciones, ya está. ¿Usted cree que esto es cierto?

Tutor: Si.

Estudiante: Es que yo vi en un libro y dice que no.

Tutor: Para $\lim_{4} x^2 + \sqrt{7-x}$, nos toca darle valores cercanos a 4, qué pasa cuando x es 4 por la izquierda, evaluemos esa función en 3,9, 3, 99 y 3,999.

Estudiante: Así no lo hace la profesora. Lo que pasa es que la profesora para esta función no se puso a mirar lo que pasa por la derecha ni por la izquierda.

Tutor: ¿qué fue lo que hizo ella?

Estudiante: Simplemente evaluar el límite en la función y encontrar f(a) ... ¡ah!, o sea que siempre va a dar lo mismo.

Tutor: En este caso sí, porque es una función polinómica, porque la función está definida para ese $a = 4$. No hay inconveniente con este tipo de funciones. El problema se da cuando no se tiene este tipo de funciones.

Observando el trabajo tutorial del profesor en formación, se presenta una situación en la que él trabaja con los conceptos de límite y continuidad de una función en un punto. Su estudiante al encontrar el límite de la función, realiza una sustitución de la función $f(x) = x^2 + \sqrt{7-x}$ por $f(4)$, y "evalúa" el límite, demostrando así una dificultad al entender el límite como una simple sustitución (Hitt y Páez, 2005). Sin embargo, el tutor trata hacer aproximaciones para determinar el límite, evaluando $f(3{,}9)$, y así intuitivamente; e ir haciendo una idea del límite, manifestando la estudiante que este procedimiento no lo realiza su profesora truncando así la idea que iba construyendo el tutor.

Por otro lado se encuentra la discusión sobre las condiciones para la continuidad, de donde él [tutor] afirma que para el caso de esta función no hay problema, ya que es polinómica. Esta situación presenta dos inconsistencias: la primera es que la función $f(x) = x^2 + \sqrt{7-x}$ no es una función polinómica (es algebraica) y la segunda, sobre las condiciones para la continuidad de una función en un punto (olvidando la definición de continuidad en un punto).

5. Algunos resultados

Este tipo de situaciones le brindan al tutor la oportunidad de recordar aquellos conocimientos que aprendió durante su formación matemática, y que ahora como tutor, deberá hacer uso (tanto de sus conocimientos matemáticos como los didácticos) para enseñar a un estudiante tutorado, igualmente le ofrece experiencia para atender las dificultades que presente su estudiante, y los inconvenientes que emergen en el desarrollo de las tutorías, en este caso: la necesidad del tutor por reforzar el concepto de continuidad de una función en un punto y su intención de generar ideas intuitivas en su estudiante acerca del concepto de límite; para que así, mediante el proceso de las tutorías puedan fortalecerse las debilidades en los pensamientos del profesor y consolidarse las fortalezas que posea.

6. Referencias

Goodlad, S. y Hirst, B. (1989). *Peer tutoring: A guide to learning by teaching*. England: Kogan Page Ltd.

Hitt, F., y Páez, R. (2005). Dificultades de aprendizaje del concepto de límite y actividades de enseñanza. En J. Cortés, y F. Hitt, *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza* (págs. 133-156). Morelia: Morevallado Editores.

Miranda, A. (2010). Peer tutoring: aprendiendo entre estudiantes. *Médica UIS. Revista de los estudiantes de medicina de la Universidad Industrial de Santander*, 23, 7-8.

Parada, S. (2011). *Reflexión y acción en comunidades de práctica: Un modelo de desarrollo profesional* (Tesis doctoral). Centro de investigación y estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Revista de curriculum y formación del profesorado*, 8 (1), 1-15.

Análisis intuitivo de datos: La intuición como recurso didáctico de la estadística en el semillero matemático

Edwin López Velandia, Ingrid Yulieth Diaz Ruiz y Claudia Barajas Arenas

Grupo EDUMAT-UIS, Universidad Industrial de Santander (Colombia)
edwinlopez-0527@hotmail.com; yulieti83@hotmail.com; claubaren28@hotmail.com

Resumen

El Semillero Matemático se ha instituido como un espacio en el cual sus integrantes (profesores profesionales y profesores en formación) han venido elaborando un trabajo comprometido alrededor de la enseñanza de las matemáticas a través de una metodología que implica una visión diferente de la enseñanza matemática en contraste a la tradicional. Por tal razón, el objetivo de esta comunicación es mostrar una experiencia de aula que muestra que la enseñanza de la estadística no requiere excesivos esfuerzos por parte del profesor si se toma en cuenta la intuición como plataforma de enseñanza y aprendizaje.

1. Introducción

El matemático trabaja a partir de definiciones y axiomas y llega a verdades y es, quizás, por esto que por años la enseñanza de las matemáticas se ha estructurado bajo el enfoque de *definir, ejemplificar y practicar* (para finalmente *evaluar*); enfoque que es aún validado culturalmente. No obstante, el enfoque abstracto y utilitario que ha tenido la enseñanza de la matemática ha venido transformándose involucrando en los procesos de enseñanza y aprendizaje la experimentación, la interacción, la simulación, la resolución de problemas; se ha venido involucrando al estudiante en la construcción del conocimiento matemático.

El Semillero Matemático, a través de su metodología, ha procurado involucrar las características transformadoras señaladas en sus espacios de enseñanza y aprendizaje tanto de la Aritmética, el Álgebra, Geometría, Probabilidad como de la Estadística pues reconocemos que la naturaleza de la estadística es muy diferente de la cultura determinista tradicional en clase de matemáticas.

2. La intuición como recurso didáctico para la enseñanza de la estadística

Hoy son muchos todavía los profesores que están arraigados al conceptualismo, dando más importancia a la mecanización extrema que a los aspectos facilitadores de un proceso intelectual creativo. De Guzmán (2007, p. 26) afirma que:

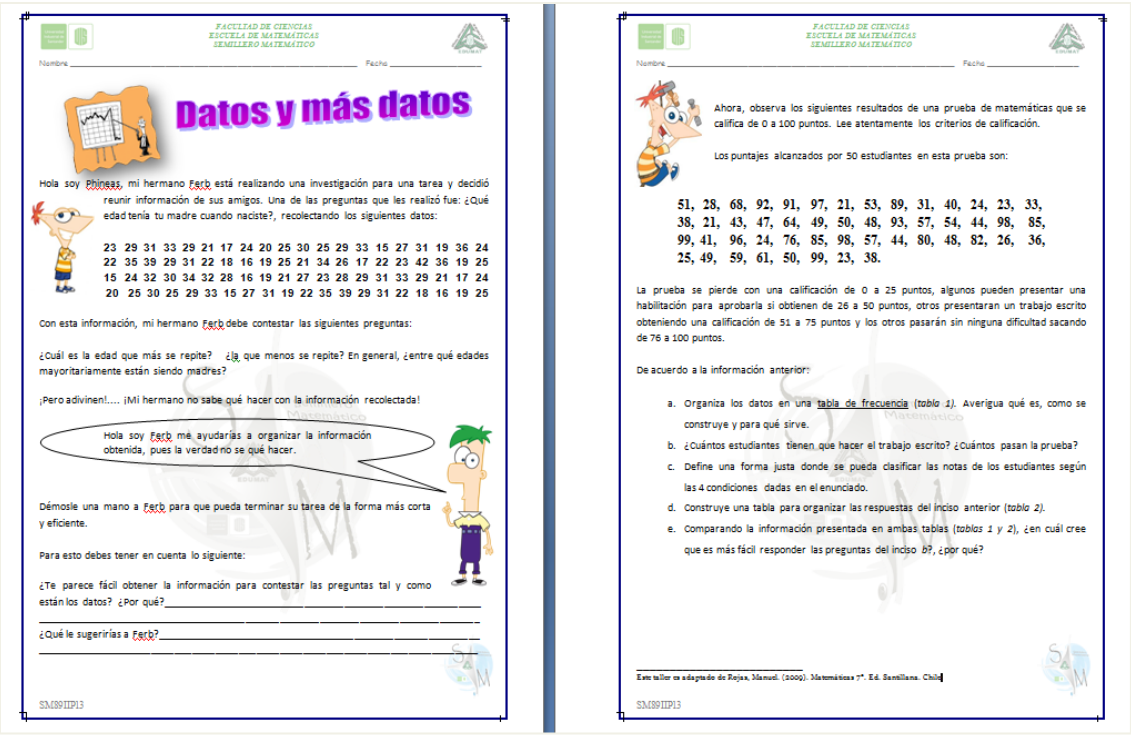
> En los años ochenta hubo un reconocimiento general de que se había exagerado considerablemente en las tendencias hacia la «matemática moderna» en lo que respecta al énfasis en la estructura abstracta de la matemática. Es necesario cuidar y cultivar la intuición en general, la manipulación operativa del espacio y de los mismos símbolos. Es preciso no abandonar la comprensión e inteligencia de lo que se hace, por supuesto, pero no debemos permitir que este esfuerzo por entender deje pasar a segundo plano los contenidos intuitivos de nuestra mente en su acercamiento a los objetos matemáticos.

Respecto a la Estadística, Batanero (2001, p. 1) señala que "aunque hace unos años pocos investigadores se interesaban por los problemas de la enseñanza y aprendizaje de la estadística, en la actualidad asistimos a un aumento notable de las publicaciones, diseños curriculares e investigación relacionados con este tema […]. La estadística se ha incorporado, en forma generalizada al currículo de matemáticas de la enseñanza primaria y secundaria".

Por lo anterior, y teniendo en cuenta que nuestros libros de texto están, por lo general, repletos de meros ejercicios y carentes de verdaderos problemas, nosotros nos motivamos para diseñar una experiencia de aula que involucrara la intuición y la actividad de resolver problemas, aprovechando la naturaleza interdisciplinar de la estadística para ofrecer a los estudiantes una actividad que los indujera a proponer, cuestionar, refutar, reflexionar y evaluar las estrategias de solución planteadas en relación a la situación y a la herramienta estadística que se quería institucionalizar a través de la actividad: tablas de frecuencia.

3. La actividad

Desde Rojas (2009) se estructuró en un taller (ver la Ilustración 1) que partió presentando, bajo una situación hipotética, una muestra de datos que debía emplearse para extraer información y responder a unas preguntas sobre la misma, inicialmente, desde un trabajo individual.



FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
SEMILLERO MATEMÁTICO

Nombre _____ Fecha _____

Datos y más datos

Hola soy Phineas, mi hermano Ferb está realizando una investigación para una tarea y decidió reunir información de sus amigos. Una de las preguntas que les realizó fue: ¿Qué edad tenía tu madre cuando naciste?, recolectando los siguientes datos:

23	29	31	33	29	21	17	24	20	25	30	25	29	33	15	27	31	19	36	24
22	35	39	29	31	22	18	16	19	25	21	34	26	17	22	23	42	36	19	25
15	24	32	30	34	32	28	16	19	21	27	23	28	29	31	33	29	21	17	24
20	25	30	25	29	33	15	27	31	19	22	35	39	29	31	22	18	16	19	25

Con esta información, mi hermano Ferb debe contestar las siguientes preguntas:

¿Cuál es la edad que más se repite? ¿la que menos se repite? En general, ¿entre qué edades mayoritariamente están siendo madres?

¡Pero adivinen!.... ¡Mi hermano no sabe qué hacer con la información recolectada!

Hola soy Ferb, me ayudarías a organizar la información obtenida, pues la verdad no se qué hacer.

Démosle una mano a Ferb para que pueda terminar su tarea de la forma más corta y eficiente.

Para esto debes tener en cuenta lo siguiente:

¿Te parece fácil obtener la información para contestar las preguntas tal y como están los datos? ¿Por qué?_____

¿Qué le sugerirías a Ferb?_____

SM89IIP13

FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
SEMILLERO MATEMÁTICO

Nombre _____ Fecha _____

Ahora, observa los siguientes resultados de una prueba de matemáticas que se califica de 0 a 100 puntos. Lee atentamente los criterios de calificación.

Los puntajes alcanzados por 50 estudiantes en esta prueba son:

51, 28, 68, 92, 91, 97, 21, 53, 89, 31, 40, 24, 23, 33,
38, 21, 43, 47, 64, 49, 50, 48, 93, 57, 54, 44, 98, 85,
99, 41, 96, 24, 76, 85, 98, 57, 44, 80, 48, 82, 26, 36,
25, 49, 59, 61, 50, 99, 23, 38.

La prueba se pierde con una calificación de 0 a 25 puntos, algunos pueden presentar una habilitación para aprobarla si obtienen de 26 a 50 puntos, otros presentaran un trabajo escrito obteniendo una calificación de 51 a 75 puntos y los otros pasarán sin ninguna dificultad sacando de 76 a 100 puntos.

De acuerdo a la información anterior:

a. Organiza los datos en una tabla de frecuencia (*tabla 1*). Averigua qué es, como se construye y para qué sirve.
b. ¿Cuántos estudiantes tienen que hacer el trabajo escrito? ¿Cuántos pasan la prueba?
c. Define una forma justa donde se pueda clasificar las notas de los estudiantes según las 4 condiciones dadas en el enunciado.
d. Construye una tabla para organizar las respuestas del inciso anterior (*tabla 2*).
e. Comparando la información presentada en ambas tablas (*tablas 1 y 2*), ¿en cuál cree que es más fácil responder las preguntas del inciso *b*?, ¿por qué?

Este taller es adaptado de Rojas, Manuel. (2009). Matemáticas 7°. Ed. Santillana. Chile

SM89IIP13

Figura 1. Taller "Datos y más datos"

Los datos se presentaron en bruto con el objetivo de que los estudiantes reconocieran que en ese estado sería tedioso dar respuesta a lo solicitado. Así, de manera intuitiva, cada uno propuso una forma de organizar los datos que les permitió responder las preguntas; al socializar las propuestas diferentes, los estudiantes seleccionaron, con las orientaciones del profesor en forma de preguntas, la más adecuada y eficiente llegando por sí mismos, y de manera intuitiva, a la tabla de frecuencias.

Así, en el desarrollo de esta parte del taller y tal cual se esperaba, los estudiantes propusieron intuitivamente diferentes representaciones de los dos conjuntos de datos (ver Ilustración 2): algunos ordenaron de menor a mayor los datos y realizaron el conteo para determinar la cantidad de veces que se repetía cada dato; otros simplemente trabajaron sobre los datos en bruto tachando a medida que contaban; otros organizaron los datos verticalmente, ordenándolos de mayor a menor y escribiendo su respectiva frecuencia (siendo esta la mejor propuesta de organización de los datos). Las intervenciones del profesor después de que los estudiantes expusieran sus invenciones y discutieran sobre ellas, se dirigieron hacia la formalización de lo que es una tabla de frecuencia y la forma como se encuentra comúnmente en los libros.

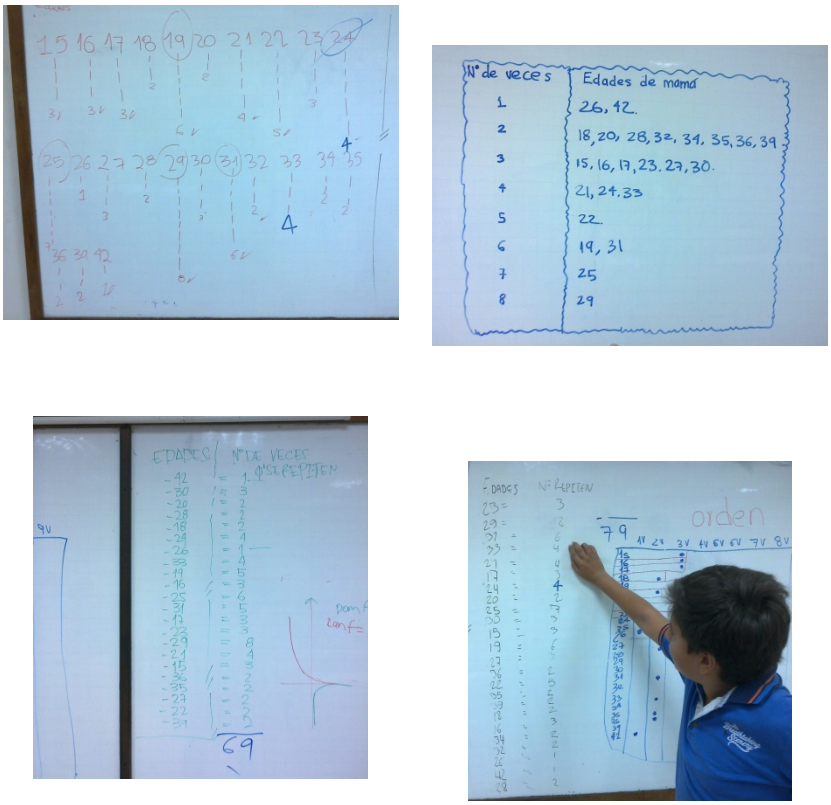
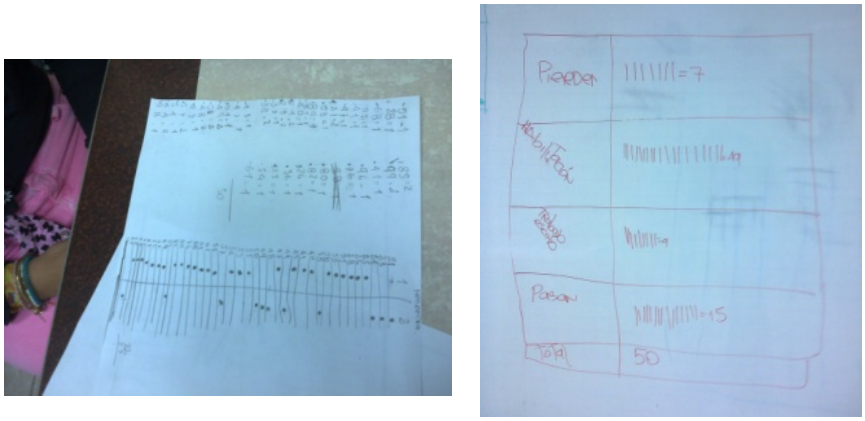


Figura 2. Propuestas para la organización de los datos de la 1ª situación del taller

Siguiendo la misma metodología del taller, se presentó una muestra de datos dispersos cuya organización en una tabla de frecuencias exigiera, además, agrupar los datos. En el desarrollo de esta parte, y después de formalizar la primera, tal y como se esperaba, todos los estudiantes organizaron tablas de frecuencias pero al tratar de contestar las preguntas se dieron cuenta de que la herramienta no facilitó la actividad porque los datos tenían baja frecuencia, por lo que (después de esa reflexión), les propusimos que elaboraran una tabla pero que, además, fuera eficiente para extraer la información que se les pedía.



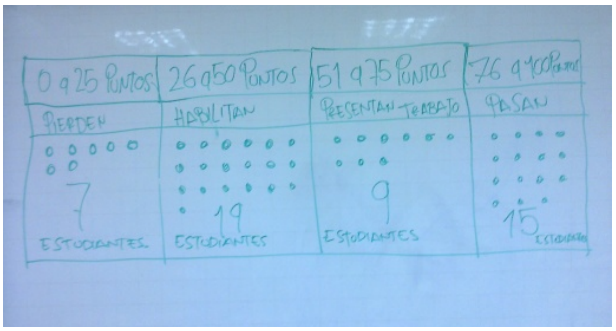


Figura 3. Propuestas para la organización de los datos de la 2ª situación del taller.

De esta manera, a través del taller se planteó una situación que supera la actividad rutinaria que se da en los libros de texto pues en estos se presentan datos, se indica qué hacer con ellos y la herramienta que se ha de usar; contrario a ese enfoque, esta actividad (desde su planificación) centró la construcción del saber en el estudiante dándole protagonismo al propiciar el espacio para que este creara soluciones a las situaciones problematizadoras desde su intuición y activara su propia capacidad mental, su creatividad, la capacidad reflexiva sobre su propio proceso de pensamiento a fin de mejorarlo y, al discutir y reflexionar con sus compañeros y profesores, llegar alcanzar la institucionalización del saber.

Finalmente, a través de esta comunicación queremos compartir con los profesores de matemáticas la importancia de reflexionar sobre las actividades que proponemos a nuestros estudiantes porque a través de ellas podemos fomentar la capacidad autónoma para construir el conocimiento matemático y resolver situaciones problemas desde sus intuiciones y saberes favoreciendo con ello la comprensión y el correcto entendimiento de lo estudiado, además de la confianza y la motivación hacia las matemáticas y su aprendizaje.

4. Referencias bibliográficas

Batanero (2001). *Didáctica de la Estadística*. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.uruguayeduca.edu.uy/Userfiles/P0001%5CFile%5C118didacticaestadistica.pdf

De Guzmán (2007, p. 26). "Enseñanza de las Ciencias y la Matemática". *Revista Iberoamericana de Educación*. No. 43, pp. 19-58. Recuperado de http://www.rieoei.org/rie43a02.pdf

Rojas, Manuel. (2009). *Matemáticas 7°*. Ed. Santillana. Chile

Diseño de instrumentos para introducir el concepto de sucesión

Graciela Morantes Moncada

Universidad Pontificia Bolivariana, Bucaramanga, Colombia.
graciela.morantes@upb.edu.co

Resumen

La búsqueda constante de alternativas que potencien el aprendizaje de los estudiantes debe ser un propósito permanente de la actividad docente. Aún más en el área de matemáticas en donde los resultados de muchos trabajos de investigación han mostrado dificultades dentro del proceso de enseñanza y de aprendizaje. Este trabajo pretende mostrar una opción didáctica para introducir el concepto de sucesión usando instrumentos diseñados con base en La Modificabilidad Cognitiva Estructural (MCE) y La Mediación-Experiencia de Aprendizaje mediado (EAM) del profesor Reuven Feurestein.

1. Descripción del problema

Los resultados obtenidos en los diferentes temas del área de matemáticas no siempre son los mejores para muchos estudiantes. Pero, en algunos temas los resultados empeoran y muy pocos estudiantes logran asimilar adecuadamente estos conceptos. Tal es el caso de las "sucesiones". Este es un concepto que los alumnos rechazan cuando se les expone de manera tradicional. Por esta razón, es conveniente la aplicación de un material motivante para introducirlo y ayudar al estudiante a apropiarse de las bases necesarias para entender mejor este tema tan importante que le permitirá más adelante afrontar con propiedad otro concepto fundamental como es el de los límites.

2. Objetivos

General: Diseñar instrumentos para introducir el concepto de sucesión, sucesión aritmética, sucesión geométrica y sus aplicaciones a estudiantes de undécimo grado.
Específicos

• Diseñar un instrumento para introducir el concepto de sucesión a estudiantes de undécimo grado.

• Diseñar un instrumento para determinar el término general de una sucesión a estudiantes de undécimo grado.

• Diseñar un instrumento para introducir el concepto de sucesión aritmética a estudiantes de undécimo grado.

• Diseñar un instrumento para introducir el concepto de sucesión geométrica a estudiantes de undécimo grado.

3. Justificación

La forma como enseñamos es determinante en el aprendizaje de los estudiantes, el modelo pedagógico que el profesor use puede favorecer o obstaculizar el aprendizaje. Ochoa (2000) muestra cómo la labor docente de muchos maestros en las escuelas es frecuentemente no inteligente en lo pedagógico, en lo científico y cultural e indica el hecho de que su pensamiento sea eminentemente tradicionalista como una de las causas:

> Los rasgos pedagógicos observados durante varios años en diversos grupos poblacionales de educadores nos permiten caracterizar su pensamiento como eminentemente tradicionalista, por ser en esencia autoritario en la relación maestro-alumno, repetitivo, memorístico y formalista en la metodología de enseñanza, y transmisor de contenidos ya hechos y acabados que el alumno debe almacenar pasivamente. Es decir, la pedagogía tradicionalista que guía la acción pedagógica del maestro es precisamente la negación de la inteligencia de los muchachos… (p. XIV).

Actualmente, en muchas instituciones educativas se sigue una metodología basada en la exposición magistral de temas, realización de ejercicios por parte del profesor y afianzamiento con resolución de ejercicios (si es una asignatura que los requiera) por parte del estudiante ya sea individual o en grupos. De acuerdo con Not (1994) "Esta escuela tradicional ha considerado siempre que las nociones transmitidas no están perfectamente integradas sino al término de una serie de ejercicios de puesta en práctica de los conocimientos, cuya repetición asegura el aprendizaje y siempre ha acompañado las lecciones-exposiciones orales de ejercicios de aplicación" (p. 38), es decir, se enseña bajo la concepción de que "el estudiante es un receptor pasivo en el cual se depositan los saberes. Para esta concepción, la escuela es el centro donde se transmite el conocimiento, creado por fuera de ella y el cual es incorporado al alumno a través del maestro, quien necesariamente ocupa, junto con el saber el papel central en la relación educativa" (De Zubiría, 1994, p.29).

Se ratifica de esta manera la pedagogía tradicional como modelo pedagógico actual: "Exceso de teoría, abuso de las recetas, ausencia de fundamentación, exaltación del "activismo", son elementos claramente identificables, cuando describimos las prácticas y políticas en las facultades de educación" (p.24), (Tamayo, 1999).

Con este trabajo se intenta un pequeño cambio en la enseñanza mediante la incorporación de unos instrumentos accesibles al estudiante por medio de los cuales se deben apropiar de un tema un poco árido en el área de matemáticas, como son las sucesiones, de una forma amigable y amena.

Los instrumentos que se aplicaron fueron diseñados siguiendo la propuesta la **Modificabilidad del Desarrollo Cognitivo** de Reuven Feuerstein y el mecanismo que él propone para lograrlo como es la **Experiencia del Aprendizaje Mediado**. Esta propuesta se expone a continuación.

4. Marco teorico y conceptual

4.1. Fundamentación teórica de la modificabilidad cognitiva: las características del aprendizaje mediado.

4.1.1. Concepción de aprendizaje de Reuven Feuerstein

La fundamentación teórica de la teoría de Reuven Feuerstein parte de su concepción acerca del aprendizaje. Concepto que toma con mucha fuerza de Vigotsky. En especial en estos aspectos:

• Su concepción acerca del origen de las Funciones Psíquicas Superiores.

• El papel que juega el mediador humano en la internalización de los aprendizajes.

• El papel del Instrumento tanto el humano (que es el mediador) como el material (que luego va a proponer lo que será el programa de enriquecimiento instrumental).

• Y en especial la Teoría de la Zona de Desarrollo Próximo.

4.2. Teoría de la modificabilidad cognitiva estructural: propuesta teorica del Dr. Reuven feuestein

La modificabilidad cognitiva estructural es la propuesta teórica del Dr. Reuven Feuerstein, en ella plantea el desarrollo cognitivo en términos dinámicos, es decir, susceptible de ser modificado en tanto se trabaje sobre las habilidades o funciones del pensamiento necesarias para realizar un eficiente acto mental o proceso de aprendizaje.

Feuerstein, identifica 29 habilidades cognitivas como pre-requisitos o cimientos del pensamiento, que permiten realizar operaciones mentales más complejas. Él plantea que un desarrollo cognitivo deficiente, es producto de habilidades cognitivas descendidas, por lo tanto, si se trabaja para mejorar estas funciones o habilidades es posible lograr una modificabilidad cognitiva estructural en el sujeto.

Objetivo General de la propuesta de Feuerstein:

"Aumentar la capacidad del organismo humano de ser modificado a través de la exposición directa a estímulos y experiencias proporcionadas por los enfrentamientos con los hechos de la vida, en situaciones formales e informales de aprendizaje" (Cornejo, 2009, p.1).

5. La mediación para potenciar el aprendizaje del concepto de sucesión

La propuesta de Feurestein tiene como característica principal el logro del cambio en el individuo, al proporcionarle los medios necesarios para su adaptación al ambiente. Por esto desde esta teoría se clasifica el rol del estudiante como participativo pues lo lleva a realizar procesos de metacognición, es decir, el estudiante debe lograr el control sobre sus formas de pensamiento, sobre lo que aprende y cómo lo aprende.

Es lo que se pretende lograr con la acción pedagógica que incluye el diseño y aplicación de los cuatro instrumentos para introducir el concepto de sucesión:

- Corregir las funciones cognitivas deficientes que caracterizan la estructura cognitiva del estudiante con carencia o privación cultural llevándolo a la construcción secuencial del concepto de sucesión.
- Adquirir conceptos básicos, vocabulario, operaciones mentales y saber proyectar relaciones.
- Producir la motivación intrínseca a través de la forma en se diseñan los instrumentos.
- Desarrollar el pensamiento reflexivo, los procesos de "insight" como resultado de la confrontación de los éxitos y fracasos en las tareas asignadas.
- Desarrollar la toma de conciencia, la autopercepción y aceptación del individuo.
- Llegar a lograr cambios en la actitud del sujeto y desarrollar una conducta cognitiva autónoma.

> El docente mediador tiene como responsabilidad crear las condiciones óptimas para que se produzca una mediación constructiva entre el alumno y el objeto que activará su pensamiento. Si bien interesa que el estudiante comprenda que la matemática es una disciplina que ofrece herramientas para resolver ciertos problemas de la realidad, no se debe perder de vista la matemática como producto cultural, como práctica, como forma de pensamiento, como modo de argumentación. P ara esto es necesario planificar y llevar adelante una enseñanza

que permita a los alumnos construir el sentido de los conocimientos matemáticos. (Cesca y Menendez, 2010, p.6).

6. Conclusiones

- Los objetivos propuestos en cada uno de los instrumentos se alcanzaron con la mayoría de los estudiantes sobre todo el que tiene que ver con el aspecto actitudinal, que se refleja en el interés que demostraron en el desarrollo de cada uno de los instrumentos.
- En cada una de las clases hubo participación de los estudiantes llenando los espacios libres en los instrumentos y preguntando cuando alguna instrucción no era clara para ellos.
- Formaron grupos de trabajo en los que trabajaron con el material y no como usualmente sucede que se hacen visita o se solapan para hacer tareas de otras asignaturas.
- Esta metodología motivo a los estudiantes y los hizo creer en ellos mismos y pensar que sí pueden realizar trabajo dentro de la clase de matemáticas, lo que para ellos no era usual.

Recomendaciones y proyección

- Continuar desarrollando el tema bajo la propuesta del doctor Feuerstein para ayudar a estos estudiantes a mejorar su interés por la asignatura y su nivel en el área.
- Dar a conocer los instrumentos diseñados para recibir recomendaciones con el fin mejorarlos y para motivar a otros docentes a implementar esta metodología.

7. Referencias

Antonyan, N. y Cendejas L. (2006). *Fundamentos de Álgebra*. México: Editorial Thomson.

Ardila, A. (2007). Estructuración cognitiva. En M. De Zubiría (Ed.). *Enfoques Pedagógicos y Didácticas Contemporáneas.* (pp 119-140). Bogotá, Colombia: Editorial FiPC Alberto Merani.

Cesca, P. y Menendez, S. (2010). *De la Escuela Como una gran aula que aprende.* Recuperado de http://www.delasallesuperior.edu.ar/biblioteca/articulolimen.pdf

Cornejo, C. (2009). *Teoría de la modificabilidad cognitiva estructural: propuesta teorica del dr. reuven feuestein.* Recuperado de www.google.com.co/search?q=Cornejo%2C+Claudia.+Teoría+de+la+modificabilidad

De Zubiría, J. (1994). *Los Modelos Pedagógicos*. Bogotá, Colombia: Editorial Fundación Alberto Merani.

Ibañez, P. y García, G. (2006). *Matemáticas I.* México: Editorial Thomson.

Moscovich, I. (2007). *El gran libro de Juegos para la mente*. Argentina: Editorial Troquel.

Not, L. (1994). *Las pedagogías del conocimiento*. Bogotá, Colombia: Editorial. Fondo de Cultura Económica.

Ochoa, R. (2000) *Hacia una pedagogía del conocimiento*. Bogotá, Colombia: Editorial McGrawHill.

Sandoval, C. (2002). *Investigación Cualitativa*, Bogotá, Colombia: ARFO Editores e Impresores.

Tamayo, A. (1999). *Cómo identificar formas de enseñanza*. Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio.

Tébar, L. (2003). *El perfil del profesor mediador*. España: Editorial Santillana.

Velarde, E. (2008). La Teoría de la Modificalidad Estructural Cognitiva de Reuven Feuerstein. *Investigación Educativa* 12(22). 203-221.

Exploración de conceptos geométricos con el uso de GeoGebra en estudiantes de cuarto año de básica primaria

Leonel Manrique Vergara, Luigi Alejandro Lasso Munares

Universidad del Valle; Liceo Los Alpes, Cali, Colombia
leonel.manrique@gmail.com; luigiale99@gmail.com

Resumen

La tecnología ha permeado de manera directa e indirecta las escuelas, llevando a los docentes a pensar nuevas estrategias de enseñanza para construir cada uno de los conceptos de las diferentes asignaturas, ese dinamismo de la sociedad ha hecho que las clases de Geometría pierdan ese lugar privilegiado que tenían años atrás. Hoy en día contamos con software de geometría dinámica como lo son Geogebra, Regla y Compas, CAR Metal los cuales son de distribución gratuita, ayudando al docente a construir actividades intencionadas a desarrollar un concepto en específico y la articulación con otros. El propósito de este trabajo es resaltar la importancia de la Geometría en la escuela y como la tecnología con el uso de software de geometría dinámica se convierte en una herramienta para crear nuevas estrategias de enseñanza, mejorando así el aprendizaje de los conceptos Geométricos en los estudiantes.

1. Introducción

El uso de tecnología ha afectado dramáticamente cada una de las asignaturas en la escuela, una de ellas la geometría, así como avanza la tecnología muchas de nuestras prácticas docentes como actividades tradicionales y situaciones problemas al pasar de los años se convierten en obsoletas, nuestros estudiantes desean están a la vanguardia y mientras la sociedad dinámica le presenta nuevos retos y nuevas carreras profesionales, las clases de geometría no pueden estar aisladas de esta realidad, estamos inmersos en una sociedad dinámica, en continuo cambio, por lo tanto debemos de apuntar a la integración de la tecnología en a las distintas asignaturas de la escuela, mejorando el puente entre la escuela y la universidad. Gracias a la geometría y a la tecnología hoy en día contamos con mega construcciones, videos juegos cada vez más, las cuales tiene como base las matemáticas a su vez la geometría. Con el anterior pretexto decidimos pensar una serie de actividades en geometría usando tecnología como los son las

computadoras con software de geometría dinámica de libre distribución como lo es Geogebra, gracias a este *micro mundo* los estudiantes dinamizan cada una de las situaciones propuestas en las clases de geometría.

2. Metodología

El trabajo se desarrolló en el Liceo Los Alpes, ubicado en la Ciudad de Cali, Valle del Cauca, Colombia, el Liceo Los Alpes es un Colegio del Mundo (IBO), el bachillerato internacional ofrece una variedad de estrategias para nutrir cada una de las asignaturas, caso curioso las matemáticas, se hace bastante énfasis en la Geometría y el uso de tecnología, invitando al docente a ser indagador y creativo con las diferentes actividades, teniendo en cuenta los diferentes niveles de pensamiento.
Partimos de una serie actividades orientadas a que nuestros estudiantes cuarto año PEP (Programa Escuela Primaria) pudieran explorar el programa de geometría dinámica, el objetivo es despertar la curiosidad de los estudiantes. La primera actividad trata de la construcción de un triángulo equilátero, la segunda actividad es la construcción de un cuadrado, las dos actividades se presentan de manera escrita son colocadas en la plataforma Moodle, tiempo dispuesto por cada actividad es de una hora, cada estudiante guarda su trabajo, nombra el archivo según la sintaxis establecida, luego es subido a la plataforma nuevamente. Paralelo al trabajo el estudiante realiza la autoevaluación, señalando su nivel de comprensión del concepto (continuo).

Para la tercera actividad la cual trata sobre la construcción de un circulo inscrito en un triángulo, aquí los estudiantes ponen a prueba su destreza y conocimiento.

La cuarta actividad se comparte un problema, invitando a los estudiantes a pensar de manera creativa para obtener distintas soluciones, inicialmente se realizan grupos de 3 estudiantes con el objetivo de recrear de manera física el problema, después se pasa a la sala de computo, se le pide los estudiantes representar el problema en software de geometría dinámica Geogebra, interactuar con cada una de las herramientas exploradas y por explorar. El tiempo disponible para la actividad es de una hora y media, al final deben de entregar sus resultados siguiendo el ejemplo de las dos primeras actividades.

Como cierre de las actividades, cada estudiante compartió su experiencia con sus compañeros, realizando su escalera de retroalimentación.

3. Marco teórico

El símbolo para comprender, recordar y comunicar.

Las representaciones visuales o algebraicas en su caso, permiten comprender los conceptos eficazmente que determinadas frases verbales o descripciones sintéticas. Una "imagen vale más que mil palabras" es un viejo principio que aquí cabe reivindicar. Pero además del comprender hay un segundo estadio importante, sin el cual la comprensión quizás dejaría de tener sentido, que es el de poder recordar y por ende comunicar los conceptos. Es mucho más fácil recordar una curva, vía su gráfica, que no por una descripción lingüística de la misma. Por supuesto a partir de cierto nivel, interesara mezclar e identificar las diferentes simbolizaciones y significados de un concepto, el objeto o modelo real, la representación gráfica, el vocablo y la definición o descripción sintética. En la enseñanza de los conceptos hay que trabajar de forma específica y relacional con cada simbolización particular, puesto que la traducción e interpretación de significados constituye una excelente estrategia para la enseñanza de la Geometría. Así mismo, los cambios de lenguaje, aun fueran del campo de la Geometría, permiten relacionar sus conceptos característicos con otros campos de las Matemáticas y otras ciencias.

El símbolo para construir conceptos nuevos y facilitar la creatividad.

La combinación de conceptos previos para elaborar conceptos nuevos puede verse facilitada mediante el uso de los símbolos adecuados. Así, los conceptos de paralelismo y perpendicularidad, entendidos como dos casos especiales de situación relativa entre dos rectas, son fácilmente comunicables. Y mediante la manipulación de símbolos es mucho más fácil crear nuevas situaciones y conceptos, que a priori, pueden no tener ningún nombre ni descripción verbal. Así, se puede trazar hilos (o dibujando) un cono espacial y posteriormente dar nombre y estudiar propiedades de la "nueva figura".

La resolución de problemas en la clase de Geometría

La resolución de problemas concibe un enfoque de enseñanza y aprendizaje, en general, consistente en considerar tan importante los procesos de razonamiento como su resultado final. El lenguaje es el modo esencial de la comunicación humana. Todo "buen uso" de un lenguaje es indicador de "buenos modos" de pensar. Por ello, el acceso a los lenguajes de las matemáticas debe de integrarse plenamente en el acceso a la lengua marteña que nuestros escolares están simultáneamente depurando.

4. Resultados y discusión

> De acuerdo con el documento de Hanna (1997), la demostración tiene un papel fundamental en la teoría y en la práctica matemática, y su uso en todo a lo que se refiere con la práctica didáctica favorece el aprendizaje y la comprensión en los estudiantes, les brinda la posibilidad de actuar cognitivamente en terrenos nuevos, haciendo así el ambiente de la clase de matemáticas mucho más reflexivo y crítico.

En las primeras dos actividades se evidencio en nuestros estudiantes, una Geometría muy superficial, dada a recordar y memorizar resultados de las diferentes demostraciones, pero jamás abordadas desde la demostración, es importante que nuestros estudiantes conozcan la estructura de las cosas, con el objetivo de formar estudiantes reflexivos, críticos y constructores de conocimiento.
Geogebra como micro mundo ofrece una variedad de herramientas, con las cuales podemos crear nuevas actividades involucrando definiciones, teoremas y postulados sin dejar a un lado la rigurosidad. Potenciando el pensamiento lógico-geométrico y ayudando a mejorar los niveles de pensamientos de los estudiantes.

Las actividades desarrolladas cada una tiene una intención en específico, con las cuales buscamos potenciar los diferentes niveles de pensamientos de los estudiantes, es importante la gestión docente, es la persona que motiva a los estudiantes por explorar, no es la persona pasiva que años atrás observamos.

Retomando el documento del licenciado Luis Moreno Armella (1996), en la actividad demostrativa la cognición se dirige hacia la construcción de toda una generalidad matemática, que actúa de forma valiosa para el estudiante; es claro que hoy en día, con la implementación de los recursos tecnológicos en el aula de clases, como las calculadoras, las computadoras, etc., favorecen procesos y habilidades cognitivas como el desarrollo de la visualización, promueve la capacidad investigativa, el aprendizaje de la retroalimentación, la observación de patrones y el establecimiento de conexiones; de ésta manera, el aspecto experimental de las matemáticas se resalta y se utiliza para poder observar, hacer predicciones, validar hipótesis, etc., no debe ser un fin en sí mismo, sino un medio para lograr el mejoramiento tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de las matemáticas y la geometría.

El NCTM en los Principios y Estándares para la Educación Matemática (2000) afirma: “La Geometría ofrece medios para describir, analizar y comprender el mundo y ver la belleza en sus estructuras" Poco difieren las intenciones de las afirmaciones anteriores de lo ya expresado por Galileo: "El Universo está escrito en el lenguaje de las matemáticas y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible entender una sola de sus palabras. Sin ese lenguaje, navegamos en un oscuro laberinto".

5. Conclusiones

- La cooperación entre estudiantes y docente, fue fundamental para construir cada uno de los conceptos.
- Al formular actividades intencionadas, los objetivos y resultados deben de ser claros para los estudiantes, ya que ellos deben de supervisar su proceso de aprendizaje.
- Reconocer el trabajo de cada uno de los estudiantes es importante, porque todos no tenemos los mis procesos de aprendizaje, el dialogo es herramienta fundamental de todo proceso de enseñanza.
- Nuestros estudiantes pueden explorar a fondo cada una de las características y elementos de las funciones en un ambiente dinámico.
- Construir actividades intencionadas para obtener resultados distintos por parte de los estudiantes, evitar la monotonía entre las tareas que transciende de generación en generación.
- Generar autonomía en nuestros estudiantes por medio de las tareas. Hacerlos participes del proceso enseñanza-aprendizaje.
- Nuestra sociedad es dinámica, utilizar las herramientas tecnológicas para motivar, ayudar a nuestros estudiantes por el estudio de las matemáticas.
- No abandonar los procesos de demostración, es decir, exponer y recrear los diferentes resultados de las matemáticas, a partir de las demostraciones.
- Invitar a docentes, padres de familia y instituciones a ver a la tecnología como una herramienta de apoyo en el proceso de aprendizaje de las matemáticas.
- Implementar mecanismos de evaluación que sean transparente, invitar a los estudiantes al dialogo y a la argumentación.
- La Geometría debe devolver a las aulas de clase y tener el mismo estatus que las matemáticas, no podemos hablar de matemáticas si no conocemos la naturaleza de la Geometría.

6. Referencias

Moreno, L. (1996). Una perspectiva sobre la demostración. *Revista Mexicana de Investigación Educativa 1(1)*, 123-136.

Hanna, G., El valor permanente de la demostración. Recuperado en http://www.uaq.mx/matematicas/redm/art/a0102.pdf el 1 de Febrero de 2012.

Catala, C., Fortuny, J. Perez Rafael., ¿Por qué Geometria?: Propuestas didácticas para la ESO. Editorial Sintesis.

Laboratorio de olimpiadas matemáticas: propuesta metodológica basada en resolución de problemas

Edwin López Velandia, Tulia Ester Rivera Flórez, Juan de Dios Urbina

Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia
edwin-lopez0527@hotmail.com; trivera@uis.edu.co; juanurbina58@yahoo.es

Resumen

Las Olimpiadas Regionales de Matemáticas se han constituido en un espacio de integración académica en Santander y en una estrategia para promover el gusto por la matemática en la región. En esta comunicación se presentarán los resultados obtenidos de una experiencia realizada a través del servicio social cuyo objetivo fue conformar e iniciar la preparación del equipo de Olimpiadas de una institución educativa. Los resultados a mostrar abordan el análisis de errores al resolver preguntas tipo olimpiadas con especial énfasis en las preguntas tipo ensayo (problemas) y recomendaciones sobre la metodología de trabajo.

1. Introducción

La Olimpiada Internacional de Matemática es una competencia que se realiza cada año para estudiantes de secundaria y es la más antigua de las Olimpiadas Internacionales de Ciencias. La primera Olimpiada se celebró en Rumania en 1959, desde aquel tiempo se ha celebrado anualmente con excepción de 1980 [1]. Cerca de 100 países envían equipos de un máximo de seis estudiantes junto con un líder de equipo, un tutor y observadores.

En Colombia se celebran varias competencias de matemática, algunas son organizadas por la Universidad Antonio Nariño y otras por grupos de trabajo a nivel regional. La principal de ellas, la competencia nacional llamada Olimpiada Colombiana de Matemáticas se inició en 1980 impulsada por el rector de la universidad Antonio Nariño de la época. Esta competencia sirve como base para la selección del equipo que va a representar al país en la competencia internacional. Los mejores concursantes de la competencia son invitados a conformar el equipo

nacional, y reciben entrenamiento en solución de problemas de matemáticas propios de la prueba.

A nivel local, apenas en el año 2009 se realizaron las primeras olimpiadas de alcance regional, iniciativa de la Universidad Industrial de Santander a través de un equipo de trabajo perteneciente al grupo de investigación EDUMAT de la Escuela de Matemática. Con este proyecto La Escuela espera generar un espacio permanente con actividades programadas a lo largo del año que puedan estimular el estudio de las matemáticas, ayudando a la formación de un pensamiento crítico y de un espíritu científico en los jóvenes, así como al desarrollo de habilidades y destrezas que les permitan un mejor desempeño en los ámbitos social, académico y laboral. Por ello, a diferencia de otras competencias cuyo objetivo es sólo identificar estudiantes talentosos, las actividades que desarrolla el Grupo de Olimpiadas de la Universidad Industrial de Santander tiene como objetivo adicional incentivar el estudio de la matemática entre profesores y estudiantes de Bucaramanga y la provincia.

2. Laboratorio de olimpiadas matemáticas

Las olimpiadas en matemáticas en la actualidad son conocidas a nivel internacional por la difusión que hacen de la disciplina y la detección temprana de jóvenes talentos; según Falk (2001) el impacto de este tipo de competencias se refleja en la transformación de la forma como estudiante y maestro se perciben a sí mismos y el aumento en la confianza del poder creativo y solidez del pensamiento matemático entre ellos. La resolución de problemas es la base de las olimpiadas matemáticas, actividad que se constituye en el mejor escenario para introducir a los estudiantes en las formas propias del quehacer matemático.

De Guzmán (2007) sostiene que la resolución de problemas tiene la intención de transmitir, de una manera sistemática, los procesos de pensamiento eficaces en la resolución de verdaderos problemas. Esta estrategia debe permitir al alumno manipular objetos matemáticos, activar su capacidad mental, ejercitar su creatividad y divertirse con su propia actividad mental al tiempo que se prepara para otros problemas de la ciencia o de la vida cotidiana.

De otro lado, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1999) afirman que la estrategia de resolución de problemas permite a los estudiantes ganar confianza ante las matemáticas, se hacen inquisitivos y desarrollan una actitud perseverante ante los problemas; se fortalece la capacidad de comunicarse matemáticamente y potencia el desarrollo de procesos de pensamiento del más alto nivel.

Bajo esta perspectiva y reconociendo que el objetivo de las Olimpiadas Matemáticas debe ir más allá de reconocer a los más talentosos surgió la idea de vincular a los estudiantes de la

Licenciatura en Matemáticas en el diseño de una propuesta metodológica conducente a mantener una agenda de trabajo permanente del equipo de Olimpiadas de una institución educativa iniciando con estudiantes de sexto grado y séptimo grado. Se espera que éste grupo se mantenga reunido en un alto porcentaje hasta que logren llegar al último nivel de la competencia (Nivel Avanzado, 10° y 11°).

La propuesta metodológica para la primera fase del laboratorio se fundamenta en mantener una sesión de trabajo semanal que tiene dos momentos: se inicia con el planteamiento de un problema de nivel intermedio no necesariamente tipo Olimpiadas del que se espera un alto porcentaje de acierto. Luego se plantean problemas de mayor dificultad que son abordados primero de forma individual y luego en equipos. El trabajo individual se considera importante pues abre el espacio para el diseño de estrategias y la formulación de conjeturas, el trabajo grupal lo es en igual medida pues favorece la argumentación y la discusión entre pares. A este nivel, niños de sexto y séptimo grado, es difícil obtener el registro escrito de soluciones ordenadas y argumentadas, por esto la verbalización es el primer paso.

En cuanto al desarrollo personal, aunque finalmente la competencia es de carácter individual, se privilegia el trabajo en grupo para permitir revisar las distintas formas de afrontar una misma situación-problema ya sea para descartarla o para validarla; también proporciona apoyo y estímulo en una labor que de otra manera puede resultar dura, por su complejidad y por la constancia que requiere; el trabajo con otros da la posibilidad de contrastar los progresos que un método es capaz de producir en uno mismo y en otros, y proporciona la posibilidad de prepararse mejor matemáticamente (Guzmán (2007).

La agenda de trabajo del laboratorio se desarrolló en nueve sesiones de trabajo donde se incluyeron cinco entrenamientos y tres sesiones de evaluación. Las situaciones problemas incluidas en los talleres se basaron en la revisión de material de referencia de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la UIS, de la Universidad del Valle[8] y del Canguro Matemático[9]. Las áreas de estudio consideradas fueron geometría, lógica, aritmética-álgebra y técnicas de conteo.

3. Desempeño en la competencia real

El equipo de Olimpiadas de la institución educativa donde funcionó el Laboratorio inicio con 42 integrantes, la preparación la finalizaron sólo 11 estudiantes que fueron quienes participaron de

[8] Página Web del grupo de Olimpiadas de la Universidad del Valle
http://matematicas.univalle.edu.co/orm/
[9] Página Web de la Asociación Canguro Matemático Sin Fronteras
http://www.canguromat.org.es/canguro2013/kg2013Niv1def.pdf

la competencia real. Los resultados en la Tabla 1 sugieren que en general el rendimiento es bajo pero en forma positiva el equipo entrenado en el Laboratorio muestra proporciones de éxito levemente superiores en la mayoría de las preguntas de la primera fase de la competencia.

		% de acierto	
Pregunta	**Área**	**Total**	**Equipo Laboratorio de Olimpiadas**
P1	Geometría	0,16	0,23
P2	T. de números y Combinatoria	0,03	0,08
P3	Algebra	0,17	0,23
P4	T. de Números	0,15	0,31
P5	Geometría	0,15	0,23
P6	Algebra	**0,40**	**0,23**
P7	Geometría	**0,17**	**0,08**
P8	T. de números y Combinatoria	0,20	0,31
P9	Algebra	0,24	0,23
P10	Geometría	0,26	0,38
P11	T. de Números	0,16	0,23
P12	Algebra	0,05	0,08

Tabla 1. Proporción de éxito alcanzada en la fase clasificatoria 2013.
Fuente: Registro oficial Grupo de Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la UIS.

A la fase selectiva llegaron 135 participantes de los cuales 3 trabajaron con nosotros en el Laboratorio. A la final del nivel básico en la cual se seleccionan los mejores veinte puntajes clasificó una integrante de nuestro grupo la cual al final tuvo un desempeño sobresaliente alcanzando la medalla de bronce del evento. A continuación la Tabla 2, resume el desempeño en la fase final, cabe recordar que ésta última prueba consta de sólo 6 preguntas pero todas son tipo ensayo, el puntaje otorgado esta en relación con la complejidad de la solución, esto es, el grupo ha definido unos parámetros mínimos que debe contener la solución, así sobre la revisión de un procedimiento existe un valor en puntos que se otorga según la solución contenga o no cada parámetro, una solución correcta vale 6 puntos.

		Puntaje según calidad del procedimiento						
Pregunta	**Area**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
P1	Algebra	**17**	2	1	1	2	1	1
P2	Geometría	**18**	2	1	4	0	0	0
P3	T. de números	**21**	0	0	1	0	0	3
P4	Algebra	**14**	1	0	0	0	0	10
P5	T. de números y Combinatoria	**18**	3	0	0	2	2	0
P6	Geometría	**20**	2	3	0	0	0	0

Tabla 2. Resumen de los puntajes alcanzados en la fase final, los valores en la tabla indican el número de participantes que alcanzo cada puntaje.

4. Conclusiones

La alta deserción observada sugiere que además de abrir el espacio a una participación voluntaria debe haber un criterio de selección adicional para evitar el abandono por frustración. Los logros más visibles se observaron en relación a la metodología de trabajo utilizada, se logró aumentar el nivel de participación y seguridad al presentar ideas al grupo. Durante la preparación, se observó un mejor rendimiento en los ejercicios de álgebra y un pobre desempeño en lógica y geometría. Entre los errores frecuentes se destaca la baja capacidad de comprensión lectora afectando directamente el desempeño en lógica; en geometría se conocen las fórmulas básicas de área y perímetro pero hay dificultad al involucrar estos conceptos como parte de una solución más compleja, hay dificultad también en el manejo de sistemas de medidas y reconocimiento de patrones. En muchos casos se tuvo que recurrir a estrategias de tipo heurístico (experimentación real, trabajo con sólidos, monedas, dramatización, etc) para lograr la comprensión de un enunciado verbal y puntualizar el reto que impone el problema. En la competencia real a nivel grupal el rendimiento en las pruebas no fue sobresaliente, a nivel individual el Laboratorio tuvo un desempeño destacado, el éxito se obtuvo gracias al buen planteamiento de las soluciones en Geometría, desafortunadamente las evidencias numéricas sugieren la necesidad de un entrenamiento más profundo al resolver preguntas tipo ensayo ($\bar{x} = 6.12, s = 5.86$), por áreas hay debilidades en Algebra y Teoría de números en todos los participantes.

5. Referencias

De Guzmán, M (2007). Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Revista Iberoamericana de Educación, 43, 19-58. Recuperado de http://www.rieoei.org/rie43a02.pdf

Falk de Losada, M. (2001). Olimpiadas de Matemáticas: retos, logros y (frustraciones). Boletín de la Asociación Matemática venezolana, 3(1).

MEN, (1999). Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Bogotá Ministerio de Educación Nacional.

[1] http://olimpia.uan.edu.co/olimpiadas/public/frameset.jsp, Recuperado el 7 de mayo de 2013.

Habilidad para interpretar enunciados y sus repercusiones en la resolución de problemas

Silvia Johanna Rojas S., Sonia Rocío Suárez C., Sandra Evely Parada Rico

Universidad Industrial de Santander. EDUMAT-UIS. Bucaramanga, Colombia.
Silviajoha_1105@hotmail.com; joncia91@hotmail.com; saevpa@hotmail.com

Resumen

Exponemos en este documento algunos resultados de una investigación cualitativa que tuvo como objetivo diseñar experiencias que posibiliten el desarrollo de habilidades comunicativas (NCTM, 2000)) específicamente la habilidad interpretativa en estudiantes de once grado, y analizar como dicha habilidad contribuye en la resolución de problemas. Este estudio surge para atender una problemática identificada en estudiantes de nuevo ingreso a la universidad, quienes en una prueba inicial dejan ver que sus respuestas incorrectas refieren más a su baja interpretación de enunciados que a la incorrecta aplicación de algoritmo.

1. Introducción

Actualmente se hace latente la preocupación de la comunidad académica por las escasas competencias matemáticas con las que ingresan los estudiantes a la Universidad Industrial de Santander (UIS). Ante ello, la Escuela de Matemáticas ha desarrollado algunos iniciativas, mismas que se han condensado en un proyecto institucional en el que se plantean alternativas curriculares para atender, específicamente, la problemática relacionada con el curso de Cálculo Diferencial de la UIS (Parada, 2012).

Un estudio preliminar que nos condujo al planteamiento de nuestra investigación, corresponde al análisis de los resultados de la prueba diagnóstica aplicada en el año 2012 a 162 estudiantes. La prueba constó de 19 ítems (10 del componente algebraico y 9 del variacional). De este estudio surge como resultado primordial que los estudiantes de nuevo ingreso a la UIS tienen escasa interpretación de enunciados, no sólo en los que interviene el lenguaje matemático.

Por todo lo anterior se realizó un estudio en el que se diseñó un plan de intervención alrededor de las habilidades comunicativas, con el fin de posibilitar un avance en el desarrollo de dichas habilidades específicamente en la habilidad interpretativa en estudiantes de once grado de una institución pública, logrando una mejor comprensión de los problemas matemáticos, en particular en la resolución de problemas; ya que como lo menciona el MEN (2006) un individuo competente en matemáticas será

"capaz de dominar con fluidez distintos recursos y registros del lenguaje cotidiano y de los distintos lenguajes matemáticos, de argumentar, de dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz" (p.51).

2. Referentes conceptuales

Ser considerado competente en la práctica matemática tiene mucho que ver con ser considerado competente en el contexto cultural y social donde se produce dicha práctica, y esto conlleva necesariamente compartir o simular determinados significados y valores legitimados en ese contexto (Pinxten, 1997). En este sentido, la construcción del conocimiento matemático y el buen desarrollo de los procesos de comunicación son del todo inseparables.

El MEN (1998) menciona que en todas las actividades que realizamos los seres humanos es indispensable tener la habilidad de comunicarnos, en ella puede construirse y comunicarse las matemáticas a través de diferentes lenguajes con los que se expresan y representan, se leen y se escriben, se hablan y se escuchan. Un estudiante es comunicativo cuando puede expresar sus ideas a sus compañeros dándose a entender y entendiendo lo que sus compañeros dicen.

De lo anterior, caracterizamos las competencias comunicativas a partir de algunas habilidades que desde nuestra perspectiva nos pueden ayudar a caracterizar el desarrollo de las competencias comunicativas en matemáticas de los estudiantes, las llamaremos dentro de nuestra investigación "habilidades comunicativas", estas son: i) habilidad para interpretar, ii) habilidad para explicar, iii) habilidad para justificar y iv) habilidad para argumentar.

Se espera que estas habilidades previamente mencionadas contribuyan en el desarrollo de las competencias comunicativas y en los procesos de resolución de problemas, no obstante en este documento solo abordamos la habilidad interpretativa la cual definimos a partir de la revisión de la literatura como la capacidad del estudiante para comprender y dar sentido a la estructura de un problema (expresado en lenguaje verbal o matemático); así como la de entender o leer demostraciones, definiciones, gráficos, mapas o esquemas matemáticos en los que se plantean argumentos y/o procesos de un objeto matemático de estudio.

En el proceso de resolución de problema Polya (1945) identifica etapas fundamentales en las que el uso de los métodos heurísticos desempeña un papel importante. Estas etapas son:

1. Entendimiento del problema.
2. Diseño de un plan.
3. Ejecución del plan.
4. Examinar la solución obtenida.

3. ¿Cómo influye la interpretación de enunciados en la resolución de problemas?

A continuación presentamos algunos resultados del análisis de la información recuperada en la prueba diagnóstica inicial y a las actividades implementadas de nuestro plan de intervención. A continuación mostramos algunas evidencias al respecto, mismas que extraemos de las respuestas dadas por los estudiantes.

En la tabla 1 vemos la interpretación de la estudiante Susana al problema, quien nos deja ver su escasa comprensión del enunciado pues ella excluye el dato relacionado con la mandarina. Además la estudiante realiza una incorrecta traducción del lenguaje verbal al lenguaje algebraico, lo que no permite dar la solución acertada

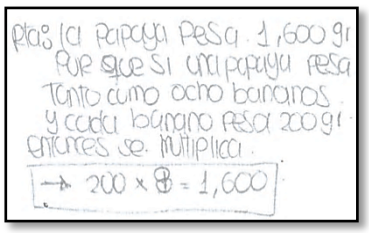
Situación 1.	
Don Pedro está apurado pesando varias frutas en una balanza. Después de varias pesadas, se da cuenta que tres mandarinas y una papaya pesan lo mismo que una docena de bananos; además, advierte que la papaya pesa tanto como una mandarina y ocho bananos. Si cada banano pesa 200 gramos, ¿cuánto crees que pesa una papaya? Explica tu respuesta.	

Tabla 1. Respuesta de Susana a la situación 1

Con la Situación 2 pretendíamos analizar como los estudiantes resolvían el problema haciendo uso de las diferentes representaciones.

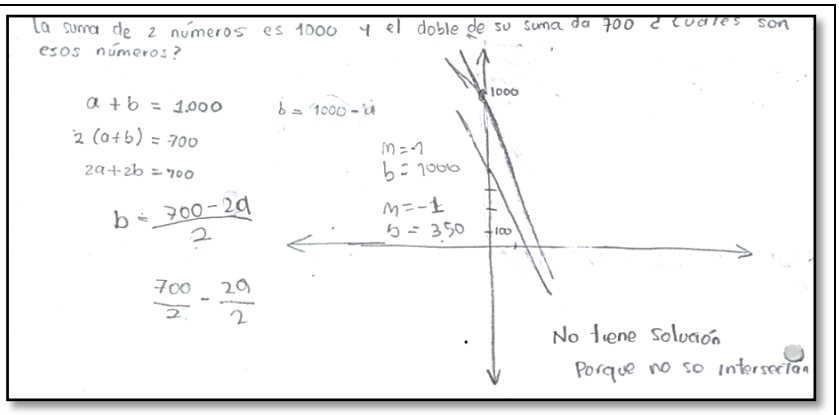
Situación 2:	
La suma de dos números es 1000 y el doble de su suma da 700 ¿cuáles son estos números?	

Tabla 2. Respuesta de Germán a la situación 2

En la tabla 2 se observa que el estudiante realiza la traducción del lenguaje verbal al algebraico, en donde plantea correctamente un sistema de ecuaciones que al desarrollarlo no le permite encontrar los valores de

las incógnitas, luego se observa que hace la traducción del lenguaje algebraico al gráfico obteniendo dos rectas que no se intersectan, con esta información que ya tiene hace una buena interpretación y de esta manera logra la solución del ejercicio.

Otra de las respuestas la encontramos en la actividad de desarrollo de la sesión 2 en donde se trabajó una tabla con diferentes representaciones de una expresión en la que los estudiantes debían hacer la traducción de una representación a otra.

En la figura 3 se observa que Paula al realizar la traducción de la expresión algebraica a la gráfica reconoce la ecuación como la de una circunferencia e identifica el punto (h,k)= (2,0) no como el centro de la circunferencia sino el corte con el eje x, por ende, al Paula tener una gráfica errónea la traducción de la expresión gráfica a la verbal no va ser en totalidad correcta pues como se observa en su respuesta dice que es un circunferencia con radio 3 pero su centro no es correcto.

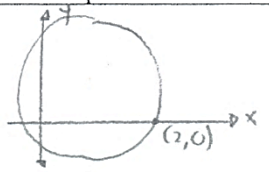
Expresión Algebraica	Expresión Gráfica	Expresión Verbal
$(x-2)^2+y^2=9$		una Circunferencia de Radio 3 Con Centro 2,5.

Figura 1. Respuesta dada por Paula al inciso 1 de la sesión 2

Lo expuesto previamente nos permite deducir que si no se tienen los presaberes necesarios aun haciendo una buena interpretación no se podría solucionar el problema.

4. Algunas reflexiones

• Podemos decir que un estudiante ha desarrollado la habilidad para interpretar enunciados verbales cuando está en capacidad de identificar los datos, las incógnitas, las condiciones del problema, o encontrar datos no explícitos en el enunciado verbal, lo que influye en los procesos de resolución de problemas dado que la conexión de los datos interpretados lo conduce a los procesos necesarios para llegar a la solución del mismo.
• Es importante que el estudiante maneje las diferentes traducciones de las representaciones ya sea de la verbal a la gráfica, de la algebraica a la gráfica o de la verbal a la algebraica y viceversas, ya que esto le permite tener una mejor comprensión de un objeto matemático y por ende facilitar el proceso de resolución de problemas
• Para la resolución de problemas no sólo es necesario la interpretación de enunciados sino también los presaberes matemáticos necesarios; puesto que si un estudiante interpreta correctamente el enunciado pero no tiene los conocimientos, no podrá resolver el ejercicio satisfactoriamente.

5. Referencias bibliográficas

Ministerio de Educación Colombia. (2006). Estándares Básicos de Competencias. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional .

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA, EUA: National Council of Teachers of Mathematics.

Parada, S. (2012). Alternativas curriculares para atender la problemática relacionada con el curso de cálculo diferencial de la Universidad Industrial de Santander (UIS). En memorias del IV Seminario Taller en Educación Matemática: La enseñanza del cálculo y las componentes de su investigación. Bucaramanga, Colombia.

Pinxten, R. (1997). Applications in the teaching of mathematics andsciences. En A.B. Powell & M. Frankenstein (Eds.), Challengingeurocentrism in mathematics education (pp. 373-402). New York: SUNY.

Polya, G. (1945). How to solve it. Princeton University Press. Princeton.

Construcción del pensamiento numérico en niños y niñas invidentes o con baja visión de grado primero utilizando bloques lógicos fijos

Blanca Elineth Barreiro Yáñez

Universidad del Quindío (Armenia, Colombia)
baneht@yahoo.com

Resumen

La ceguera se entiende como un lugar a través del cual se puede acceder a nuevos modos de realidad. Entender el mundo a través del tacto como percepción complementaria irremplazable (Gallón, 2008), en consecuencia, el objetivo fundamental de este trabajo es introducir la utilización de bloques lógicos fijos en la construcción del pensamiento numérico en estudiantes invidentes de primer grado de modo que se logre un aprendizaje significativo del concepto de número (contar, cardinal, ordinal) empleando la ingeniería didáctica como metodología.

1. Introducción

A efectos didácticos, se entiende por "alumnos ciegos" a aquellos que su falta de visión les impide seguir el aprendizaje de la Matemática en las mismas condiciones que los alumnos considerados como de "visión normal" (Campo, 1996). Los bloques lógicos constituyen un recurso pedagógico básico destinado a introducir a los niños en los primeros conceptos lógico-matemáticos**.** El pensamiento numérico se refiere a la comprensión en general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones…(McIntosh, 1992).

Los niños son capaces de pensar en forma operatoria sólo cuando actúan sobre los objetos o situaciones que se encuentren físicamente presentes siendo capaces, además, de abstraer de ésa realidad física los conceptos matemáticos que se desea que aprenda (PUELLO, La psicología y las matemáticas, 2009), más aun si hablamos de niños y niñas invidentes, es por esto que esta clase de material educativo (bloques lógicos) que cuenta con la característica de ser tangible,

permite al estudiante no vidente adquirir conceptos importante para su formación cognitiva en torno al pensamiento numérico.

Son muchas las corrientes pedagógicas que han trabajado para que la educación sea cada vez mejor y que tenga mejores resultados; el constructivismo, escuela nueva y pedagogía sistémica son alguna de ellas, por supuesto estudios sobre cómo enseñarle las matemáticas a los discentes impedidos visualmente no faltan, pero la mayoría de los estudiantes tanto videntes como no videntes desde tiempos remotos han tenido dificultad a la hora de aprender las matemáticas. Con este trabajo se buscan mostrar una estrategia práctica y asequible para aportar positivamente a la solución del problema que esto significa, considerando que también es un aporte para lograr el cumplimiento de las políticas de integración en educación de la población discapacitada.

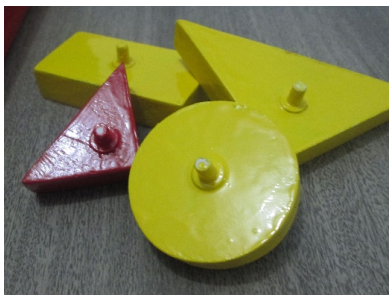
2. Objetivo

El uso de bloques lógicos fijos en la construcción del pensamiento numérico en niños invidentes de primer grado como implementación lúdica y didáctica puede mejorar los entornos escolares y coadyuvar al buen desempeño académico de los estudiantes invidentes, el objetivo fundamental de esta investigación es introducir la utilización de estos bloques en la construcción del pensamiento numérico en estudiantes invidentes de primer grado de modo que se logre un aprendizaje significativo y se evidencie un mejoramiento en el desempeño académico como en el crecimiento personal de los estudiantes involucrados.

2.1 Los bloques lógicos fijos

El material que se usara en esta investigación está inspirado en los bloques lógicos de Diennes, pero con una variación, la cual consiste en que se podrán fijar en una lámina perforada, esta modificación se hizo al observar la dificultad que tienen los niños y niñas invidentes de mantener la forma de una serie (secuencia) o alguna construcción con los bloques de Diennes. Al no poder conservar la posición de los bloques se hacía imposible realizar las actividades de conteo entre otras.

El material está conformado por una lámina perforada la cual está sujeta a una base de madera y por bloques que tienen la forma de las siguientes figuras geométricas: triangulo, cuadrado, rectángulo, y circulo cada una en dos tamaños: grande y pequeño, seis bloques de cada figura.



3. Contenidos a desarrollar

Para ayudar en la construcción del pensamiento numérico en estudiantes invidentes de primer grado se tomaran en cuenta las siguientes características del pensamiento numérico los cuales se desarrollaran por medio de situaciones didácticas:

Significado de los números

- Seriación
- Numeración
- Contar
- Cardinal
- Ordinal

4. Metodología

Para esta investigación se empleara la ingeniería didáctica que surgió en la didáctica de las matemáticas francesa, a principios de los años ochenta, como una metodología para las realizaciones tecnológicas de los hallazgos de la teoría de Situaciones Didácticas y de la Transposición Didáctica. El nombre surgió de la analogía con la actividad de un ingeniero quien, según Artigue (1998, p. 33): "Para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo." (Campos, 2006).

La Ingeniería Didáctica se elabora fundamentalmente por cuatro fases a mencionar: un análisis preliminar que considera las dimensiones cognitiva, didáctica y epistemológica del conocimiento a impartir; de un análisis a "priori" y diseño de una situación didáctica, se determinan qué variables didácticas son pertinentes y sobre cuáles se actuará, se establece las hipótesis de trabajo; y una vez que se establecen se diseña la situación didáctica; la experimentación es una "puesta de escena" de la situación didáctica, donde es un "proceso" en el cual el profesor implementa el producto y realiza los ajustes y adaptaciones necesarias según la dinámica de clase lo exija y finalmente el análisis a posteriori y validación que consiste en la revisión de los resultados, en las observaciones que se tuvo en la resolución de los estudiantes.

6. Bibliografía

Campo, J. E. (1996). *La Enseñanza de las Matematicas a los Ciegos.* España: ONCE.
Gilberto Obando Zapata, N. L. *Pensamiento numérico del preescolar a la educación básica.*
Puello, J. A. (2009). La psicología y las matemáticas. *Matemáticas A Ciegas*.

Agustín, L. F. (2003). Los bloques lógicos: un recurso pedagógico básico en Educación Infantil. *Educacion Primaria* .

Puello, J. A. (2010). Los bloques lógicos. *Matemáticas a Ciegas*.

Resolución de problemas geométricos: estrategias heurísticas novedosas para un problema variacional

Ana María Palacios Rojas, Sandra Liceth Solarte Alvear

Universidad del Valle, Santiago de Cali- Colombia
anyta-0306@hotmail.com, sandra-lsa@hotmail.com

Resumen

Nuestra propuesta de charla corta tiene como propósito promover la discusión sobre la importancia de que los profesores elaboren tareas matemáticas en un contexto de pensamiento geométrico; que haga que sus alumnos apliquen diferentes estrategias heurísticas en la resolución de un problema geométrico específico. Así se propone presentar aspectos relativos al proceso de resolución de problemas geométricos, en particular la pertinencia de trabajar en distintas estrategias heurísticas y mostrar algunas de las más usadas en la resolución de problemas geométricos, posteriormente mostrar la importancia de estas en la enseñanza y aprendizaje de la geometría a nivel de la formación básica secundaria.

Introducción

Esta comunicación breve surge en el interior del curso de práctica profesional y en el contexto del Laboratorio de Matemáticas (LabMatUV) del Programa Licenciatura en educación básica, énfasis en Matemáticas, del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP) de la Universidad del Valle. Aborda la resolución de problemas que es considerada desde hace décadas una parte esencial de la educación matemática y se reconoce como un campo abierto de estudio para aportar ideas en el sentido de que se reconoce que hay métodos, procedimientos y actitudes que favorecen el éxito de la mayoría de los alumnos de una clase en la resolución de problemas. En efecto, algunas investigaciones dan cuenta que el proceso de enseñanza y el proceso de resolución de problemas geométricos demanda mucho tiempo y que en ocasiones los resultados tardan en llegar. En este sentido, se señala la importancia de llevar a cabo situaciones que ofrezcan alternativas para que los profesores puedan ayudar a sus estudiantes en la adquisición y consolidación de herramientas para la resolución de problemas y mejorar las condiciones de tiempo y continuidad para trabajar este enfoque en las clases de geometría.

Aunque no existe un consenso definitivo sobre el asunto, son numerosos estudios los que confirman que la enseñanza de pautas, estrategias y técnicas consigue más y mejores resolutores que el trabajo excesivo de resolución de problemas o la mera práctica espontánea de resolver

problemas que aparecen en los libros de texto, que la mayoría de las veces suelen presentar ejercicios en lugar de problemas; tareas estereotipadas que por lo general favorecen la rutina y la práctica reiterada de algoritmos y fórmulas.

Se considera así, que la habilidad para resolver problemas no sólo se adquiere resolviendo muchos problemas, sino habituándose y tomando partido por un amplio espectro de decisiones y técnicas de resolución, conocidas como *estrategias heurísticas,* aunado al esfuerzo de los profesores para ayudar a sus estudiantes a ganar *confianza* para abordar y resolver problemas.

Marco Teórico

En el campo de la didáctica de las matemáticas se considera que los procedimientos heurísticos son formas de trabajo y de pensamientos que apoyan la realización consciente de actividades mentales exigentes. Así se logra resaltar que la introducción de estos procedimientos en la clase y su aplicación por parte de los alumnos propicia la asimilación de los conocimientos, su capacidad para resolver problemas para los cuales no existen procedimientos algorítmicos y el desarrollo del pensamiento lógico. La implementación de las estrategias heurísticas, nace como la necesidad de buscar métodos concretos que den solución a problemas matemáticos o geométricos. Cabe traer a colación la estrategia del trabajo hacia atrás o método analítico, para hacer un buen uso de esta estrategia es necesario sacar la conclusión de las conjeturas del problema, suponiendo que estas son verdaderas. Si se llegase a una conclusión falsa, entonces evidentemente la conjetura también será falsa. Si, se llega a una conclusión verdadera, entonces la conjetura será probamente verdadera. Y para corroborar lo anterior se debe invertir el proceso, del trabajo hacia atrás, e intentar deducir la conjetura original por el camino inverso, desde la verdad indudable hasta la conjetura inicialmente planteada y dudosa. Y el proceso es exitoso entonces, la conjetura se habrá probado indudablemente y el problema será solucionado; precisamos también que en cada una de esas conjeturas y conclusiones que se obtienen son el resultado de incluir en las mismas otras estrategias heurísticos como lo son; empezar por el final, elegir la incógnita, expresar relaciones en forma algebraica, plantear ecuaciones, hacer un esquema, reducir el problema a otros conocidos, particularizar y generalizar e imaginar el problema resuelto. Las anteriores estrategias están enfocadas a la solución de problemas geométricos, los cuales implican una reflexión previa a llegar a su solución pues, es importante caracterizar su paso a paso para hallar el proceso correcto que lleva al desenlace. Así pues, para resolver algún problema geométrico es importante tener conceptos, propiedades y procedimientos geométricos y matemáticos claros entre otras cosas. Ya que, remitirse a la tarea de resolver alguna problemática de este tipo puede resultar todo un reto interesante y divertido que requiere de cierto tiempo en particular.

Por tanto, hacer uso de algunas de estas estrategias, permite el desarrollo de ciertas habilidades puesto que, un problema es más que un enunciado que requiere de alguna respuesta en particular. De esta manera, se trata de hallar una idea que lleve a una solución concreta y

correcta, aunque en ocasiones se pueda involucrar más de una estrategia. Reducir el problema a otro ya conocido, hacer un esquema, particularizar y generalizar son la forma de configurar el plan de solución; mientras que imaginar el problema resuelto es darle una mirada hacia atrás a ese problema.

Finalmente, algunos investigadores sugieren abordar la compleja relación entre el desarrollo de una alfabetización heurística y los cambios en los logros geométricos de los estudiantes en distintos niveles de escolaridad. Por alfabetización heurística se refieren a: Una capacidad individual para usar vocabulario heurístico en el discurso de la resolución de problemas y para aproximarse escolásticamente a la resolución de problemas matemáticos usando una variedad de heurísticas.

En este tipo de aproximaciones, se reconoce una hipótesis subyacente, reportada en variados estudios, a saber, que los experimentos de clase que tratan con la enseñanza de estrategias tienen efectos significativamente pequeños o moderados, en términos de medidas estandarizadas (Hembree, 1992; Schoenfeld, 1992).

Desde un aporte matemático se resalta la importancia de pensar el sentido de las estrategias heurísticas de la siguiente manera según Koichu, Berman como:

- Reglas generales o recomendaciones para los resolutores de problemas (Larson, 1983; Polya, 1945/1973; Perkins, 1981; Schoenfeld, 1985)
- Unidades útiles en la descripción y análisis de las formas de pensamiento matemático (De Bono, 1984; Goldin, 1998; Newell & Simon, 1972) y
- Herramientas cognitivas / metacognitivas en la real resolución de problemas matemáticos (De Bono, 1984; Goldin, 1998; Martínez, 1998; Newell & Simon, 1972; Verschaffel, 1999).

Metodología

A partir de una situación en un contexto de pensamiento geométrico, se ilustrara la complejidad de las estrategias heurísticas utilizadas en la resolución de un problema geométrico específico, también se ofrecen ejemplos contextualizados sobre la eventual integración de las mismas en el trabajo en el aula de geometría, en conexión con estrategias propias de problemas matemáticos en el campo de la aritmética y el algebra.

Situación

Escoja un punto P en el segmento de línea AB y construya dos cuadrados: un lado de un cuadrado es AP y un lado del otro cuadrado es PB. ¿Dónde se debe ubicar al punto P para satisfacer la condición que la suma de las áreas de los dos cuadrados sea mínima?

Los cuadrados, pueden tener cualquier configuración[10].

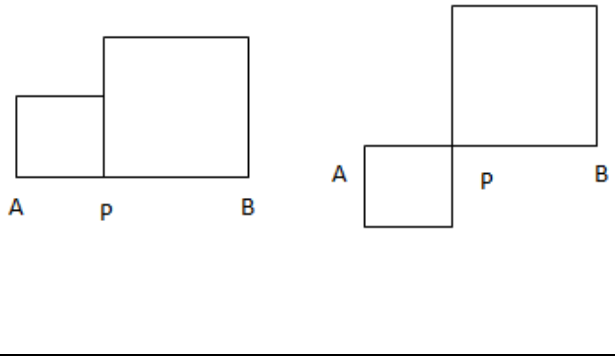


Figura. 1 Posible configuración

El problema puede ser resuelto utilizando cuatro estrategias heurísticas diferentes. Las cuales son:

1. *Considerar el problema resuelto*; a sumiendo una solución para el mismo.

Como el problema pide el mínimo de la suma de las áreas de dos cuadrados; entonces se puede considerar que los dos lados del cuadrado se extienden en un bosquejo para formar un cuadrado de longitud AB en cada lado, se forman cuatro regiones:

Los lados del cuadrado $(AP)^2$ y $(PB)^2$

Cada rectángulo AP y PB

El área total de las cuatro regiones es AB^2

Por lo tanto, la suma mínima de los cuadrados $(AP)^2$ y $(PB)^2$ ocurre cuando los dos rectángulos tienen área máxima. Pero, un rectángulo tiene área máxima cuando es un cuadrado o cuando AP = PB.

10 Recuperado en: http://iwilson.coe.uga.edu/EMT725/twosmosquares/TwoSquares.html; Traduccion y adaptacion: Octavio Augusto Pabon, LabMatUV

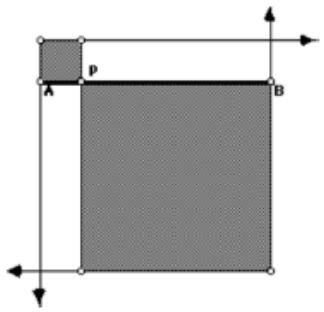


Figura 2. Solución estrategia 1

2. *Reducir el problema a otro conocido*; determinado relaciones algebraicas y haciendo variaciones sobre las aproximaciones establecidas.

Las variaciones en la aproximación anterior, incluyen las siguientes:

$$\text{Sean AB} = x \text{ y PB} = y$$

$$\text{Entonces deseamos minimizar } x^2 + y^2$$

Por la desigualdad de la media aritmética y la media geométrica $x^2 + y^2 \geq 2xy$**,** con igualdad si y solo si $x = y$.

Por lo tanto, la suma de las áreas de los dos cuadrados es siempre mayor que las áreas combinadas de los dos rectángulos, excepto cuando $x = y$. así el área mínima ocurre cuando P es el punto medio.

3. *Hacer un esquema;* recurriendo a software geométricos, para lograr formular el área de los cuadrados como función de una única variable.

Se formula el área como función de única variable.

$$\text{Sean AP} = x \text{ y PB} = \text{AB} - x$$

$$\text{El área es: } f(x) = x^2 + (AB - x)^2 = 2x^2 - 2(AB)x + (AB)^2.$$

Esto es una parábola como el grafico siguiente

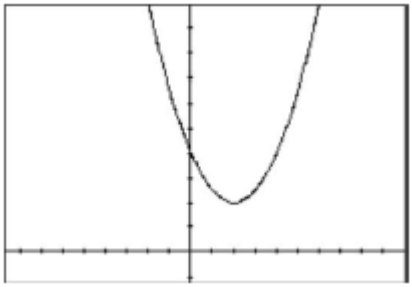


Figura 3. Solución estrategia 3

Donde el vértice esta en (AB/2, AB/2)

4. *Hacer una tabla;* en la cual se particulariza la longitud del segmento AB y se registra una secuencia de los valores para la suma de los cuadrados en la medida que P se coloca en los puntos del segmento de línea.

Sea AB = 10 y x = AP. Entonces la tabla siguiente se puede generar rápidamente.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10 - x	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
suma	100	82	68	58	52	50	52	58	68	82	100

Figura 4. Solución estrategia 4

Esto proporciona una buena intuición de la ubicación del punto P, este está en el punto medio de AB.

Cabe resaltar que el anterior problema, hace parte de los denominados *problemas no rutinarios*, en los cuales el resolutor se debe dar a la tarea de poner en juego la creatividad, imaginación y originalidad del proceso de resolución del mismo, dado que en este tipo de problemas es muy difícil de identificar de forma directa el modelo de solución, pues de ahí la necesidad de recurrir a la utilización de una variedad de estrategias heurísticas como; hacer conjeturas, explorar patrones y argumentar.

Nivel al que va dirigido: profesores de Educación Básica, estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas.

Conclusiones

Aunque no existe un consenso definitivo sobre el asunto, son numerosos estudios los que confirman que la enseñanza de pautas, estrategias y técnicas consigue más y mejores resolutores que el trabajo excesivo de resolución de problemas o la mera práctica espontánea de resolver problemas que aparecen en los libros de texto, que la mayoría de las veces suelen presentar ejercicios en lugar de problemas, tareas estereotipadas que por lo general favorecen la rutina y la práctica reiterada de algoritmos y fórmulas.

De manera análoga las orientaciones profesionales sugieren la creación de ambientes para que los estudiantes puedan explorar ideas geométricas. Así, los futuros profesores deberían ser formados conforme a las expectativas de enseñanza explorando, elaborando conjeturas, comunicándose y razonando.

No obstante, la utilización de las estrategias heurísticas empleadas en la resolución del problema propuesto, si bien fueron consideradas como necesarias, no fueron consideradas como condiciones suficientes para que los estudiantes adquirieran el conocimiento didáctico necesario para el eficaz desenvolvimiento en las aulas durante una clase de geometría, pero esto garantiza que el estudiante adquiere la habilidad para resolver problemas habituándose y tomando partido de una amplia visión en la toma de decisiones y técnicas de resolución, es decir utilizando *estrategias heurística.*

Referencias

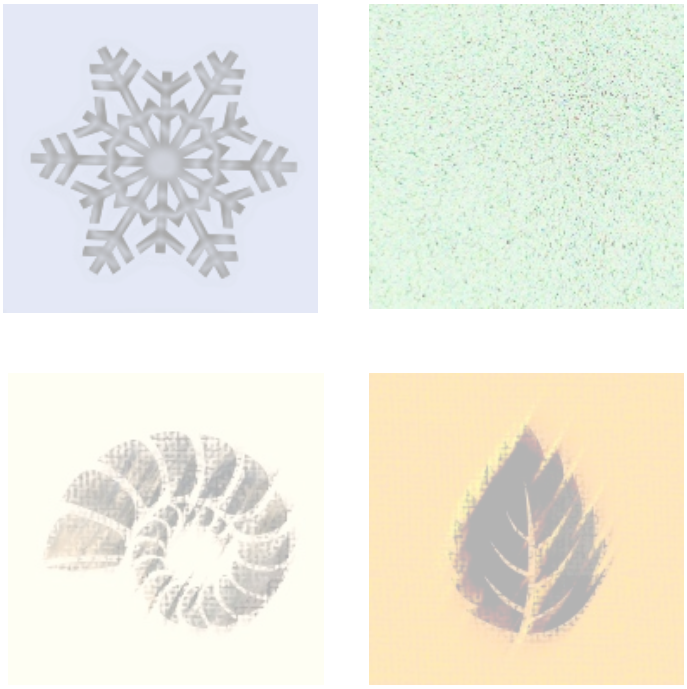
Blanco, L. J. La resolución de problemas en primaria. Una propuesta para la formación inicial del profesorado. EN: Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos. Editorial Hergué.

Koichu, Boris; berman, Abraham; Moore Michael (2006) Heuristic literacy development and its relation to mathematical achievements of middle school students. p. 3

Nunokawa Kazuhiko (2000) Heuristic strategies and problem situations. EN: Resolución de problemas en los albores del siglo XXI. José Carillo Yánez, Luis Carlos Contreras. Editorial Hergué

Santos Trigo L. M. (1996) Análisis de algunos métodos que emplean los estudiantes al resolver problemas matemáticos con varias formas de solución. Educación Matemática, 8 (2). México.

Schoenfeld, A. (1985) Mathematical problem solving. Orlando Academic Press



Cursillos

Visualización del espacio 3D utilizando software educativo

Efraín Alberto Hoyos Salcedo

Universidad del Quindío Colombia
eahoyos@uniquindio.edu.co

Resumen

El presente cursillo será orientado para profesores de básica secundaria con el fin de aportar secuencias didácticas apoyadas con una serie de recursos de software educativo (de mi autoría) para el desarrollo de habilidades de visualización del espacio 3D de los estudiantes. Se implementarán las actividades recalcando en las tareas para el desarrollo de estas habilidades y articulando la parte conceptual de área, volumen, y el reconocimiento de prismas, pirámides, superficies de revolución, cónicas, representación de sólidos por medio de vistas ortogonales, trazas de superficies y sólidos y operaciones entre cuerpos (unión intersección y diferencia).

1. Descripción del cursillo

De acuerdo a varios autores entre ellos Ángel Gutiérrez **(**1996), la visualización del espacio 3D es un proceso que va más allá de la percepción visual y se acerca a los conceptos matemáticos desde la conjetura matemática a través de tres actividades: La realización de construcciones, la utilización de transformaciones geométricas y la apropiación de los sistemas de representación. Para mejorar las habilidades de visualización del espacio 3D se deben desarrollar (Margherita Gonzato, Teresa Fernández Blanco y Juan Díaz Godino, 2011) una serie de tareas entre las que se destacan:

- Contar elementos que componen un sólido (unidades de volumen, caras, aristas, vértices, etc.).
- Representar un objeto 3D a partir de una representación plana y viceversa (perspectiva/proyección isométrica/vistas/vistas codificadas/fotografías).
- Rotar el objeto o partes del objeto, o de manera equivalente cambiar mentalmente de perspectiva.

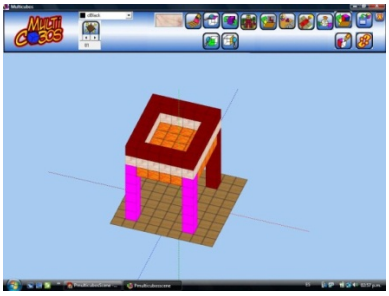
- Plegar un desarrollo plano para formar un objeto tridimensional o viceversa desplegar el objeto para obtener uno de sus desarrollos.
- Componer y descomponer en partes un objeto 3D.

Teniendo en cuenta lo anterior me permito presentar la siguiente propuesta (cursillo) la cual tiene como finalidad poner en consideración de los participantes una serie de estrategias didácticas apoyadas en materiales educativos computarizados que conforman secuencias didácticas enfocadas hacia el desarrollo de habilidades de visualización de los objetos en el espacio y adquisición de un sistema de representación de los objetos del espacio3D. El desarrollo de la misma está soportado por el uso adecuado de estos recursos didácticos computarizados de mi autoría (software: área, superficies de revolución y cónicas, geoespacio, multicubos el editor de minoli (prismas y pirámides), trazas y operaciones . Este software educativo está diseñado como ambientes de reconocimiento y de construcción utilizando objetos tridimensionales y sus transformaciones. Cada programa propone una serie de preguntas que deben ser resueltas por el estudiante, quien confronta su respuesta con la respuesta ofrecida desde el software correspondiente .

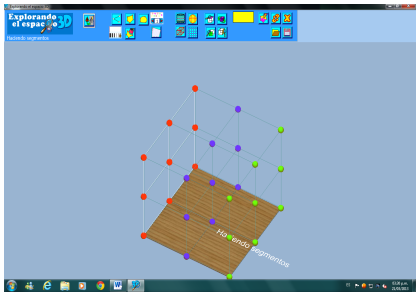
Las secuencias incluyen el acercamiento a los conceptos de: el área, superficies de revolución, cónicas, prismas y pirámides, representaciones de los sólidos por medio de vistas ortogonales, estimación del volumen y área de sólidos, trazas y operaciones entre sólidos.

El desarrollo del taller tendrá en cuenta los siguientes aspectos:

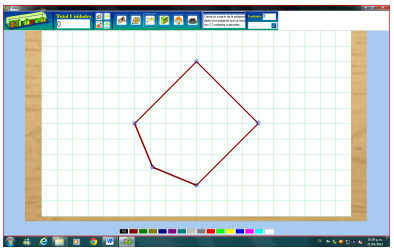
a. Introducción teórica sobre visualización y sistemas de representación del espacio 3D.
b. Desarrollo de actividades en una sala de informática en grupos de dos participantes por computador, utilizando el software educativo.
c. Discusión de los alcances bondades y dificultades de la propuesta didáctica.



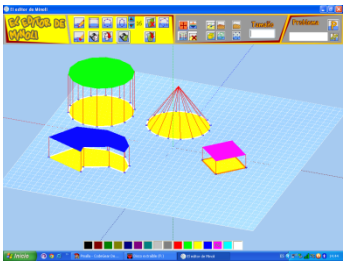
Software "multicubos"



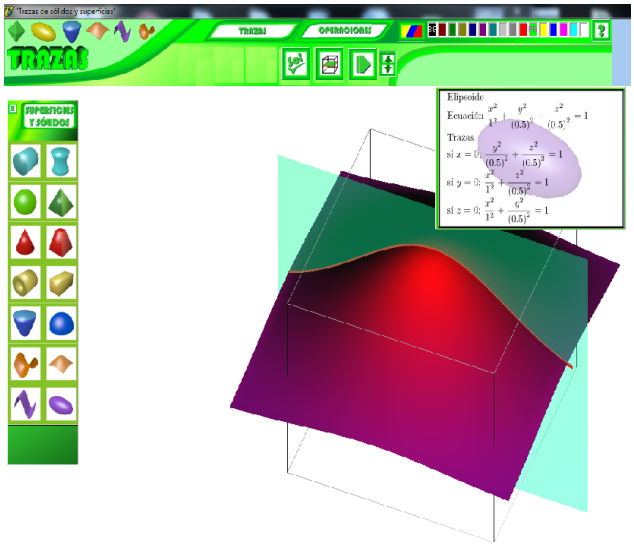
Software "geoespacio"



Software "el área"



Software "editor de Minoli"



Software trazas

Software operaciones

Software cónicas

2. Bibliografia

Gonzato, M., Fernández Blanco, T. y Díaz Godino, J. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números*, 77, 99–117.

Gutiérrez, A. (1996a). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, 3-19. Valencia: Universidad de Valencia.

De la aritmética discreta, al concepto de variable

Natalia Guzmán Bautista, Jairo Pulido Gómez, Mónica Alarcón R.

CORPORACIÓN ESCUELA PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL
natalia.guzman@epe.edu.co; jairo.pulido@epe.edu.co; monica.alarcon@epe.edu.co

Resumen

Una de las dificultades en las matemáticas escolares es la iniciación al lenguaje algebraico, para esto es necesario fortalecer la transición de la aritmética al álgebra y utilizar patrones geométricos que lleven a la generalización dando significado a la utilización de la letra requerida en el aprendizaje del álgebra.

Esta transición es importante, pues permite el paso de lo concreto a lo abstracto, o como Piaget lo llama de la percepción a la representación. Esto no sólo se presenta al enseñar nociones espaciales y geométricas también se presenta en la enseñanza del álgebra, puesto que un camino es desde lo concreto (lenguaje natural) para llegar a la simbolización que en este caso sería lo abstracto (uso de la letra). Dicha propuesta, se fundamenta en el manejo de representaciones geométricas a lo que algunos autores llaman "pruebas sin palabras" Flores (2000).

Introducción

Existen varias posturas de cómo se concibe y cómo se aplica la matemática, además de cómo se trabaja en el ámbito escolar, la Escuela Pedagógica Experimental ha venido desarrollando una concepción de matemáticas que orientan el trabajo con los estudiantes en cuanto a la construcción del conocimiento. Debido a la diversidad de tareas y al uso de la tecnología procesos que anteriormente se realizaban de forma algorítmica, han perdido su fuerza y han ocupado ese lugar procesadores, ordenadores lógicos, calculadoras, que agilizan el trabajo. No obstante a pesar de las facilidades de tiempo se corre el riesgo de perder procesos que se reconocen como importantes, la importancia del pensamiento, la creatividad y la imaginación, que no solo aporta al área de las matemáticas, sino a una formación integral.

En la EPE venimos buscando, desde hace varias décadas, alternativas en y para la clase de matemáticas. En estas incursiones hemos privilegiado más que el aprendizaje de algoritmos y procedimientos rutinarios, lo que denominamos "hacer matemáticas", que no es otra cosa que propiciar entornos de trabajo para lograr las metas siguientes.

1. Fortalecer y desarrollar diversas formas de pensamiento tales como el iterativo y el analógico que unidos a lo aditivo, multiplicativo, probabilístico y proporcional, han sido reconocidos desde siempre, como determinantes para el hacer matemáticas.
2. Propiciar la invención y hallazgo de patrones y modelos, con la firme convicción de que lo que mejor caracteriza a las matemáticas es la búsqueda de patrones.
3. Crear ambientes de trabajo que busquen en los estudiantes a la vez un gusto por las matemáticas y una confianza en sí mismos y en las posibilidades del trabajo en colectivo.
4. Seleccionar los problemas de trabajo de tal suerte que en los procesos de búsqueda los estudiantes tengan que acceder a los elementos operatorios y algorítmicos.
5. Crear situaciones que nos permitan conocer mejor los procesos de matematización y de "hacer matemáticas". Esta meta está unida con nuestra preocupación permanente de investigar el fenómeno del aprendizaje.

Consideramos que esto implica una concepción de las matemáticas diferente, sin embargo en otros lugares y como un propósito general de la educación Colombiana, se debe contar con un referente común a todas las instituciones, es decir, asegurar que todos los estudiantes tengan dominio de ciertos conceptos básicos para estar en capacidad de desenvolverse en igualdad de condiciones dentro de nuestra sociedad, esto con el fin de elevar la calidad de la educación en nuestro país. Para ello el ministerio de Educación Nacional (MEN) propuso unos estándares de calidad donde se exponen ciertas exigencias temáticas y expectativas que deben plantearse a todos y cada uno de los estudiantes de acuerdo al grado que estén cursando.

Conocimiento matemático en torno al álgebra

Es importante tener en cuenta que al realizar un análisis de los aspectos matemáticos a los que se hace referencia, se busca tener claro lo que se va a realizar con los estudiantes y los sustentos que en este aspecto son importantes, no solo conocer sino también considerar a la hora de ponerlos en juego en el aula. Por esto es necesario presentar entre otros aspectos, la posibilidad de representar con una sola letra un conjunto de valores y el hecho de poder manejarlos de forma sencilla es, precisamente, lo que hace que el álgebra sea de gran utilidad, pero, sin embargo, los estudiantes no llegan a comprender y aprovechar la ventaja que supone la utilización de símbolos porque no llegan a ver la relación con lo que representan, y esto es debido, generalmente, a que las situaciones que se plantean no son lo suficientemente adecuadas como para llegar a necesitar símbolos. Para que esto no ocurra los símbolos tiene que servir realmente para recordar y comprender los procesos que se han seguido y para facilitar y hacer posible los cálculos.

Otra de las mayores dificultades con que se encuentran los estudiantes al iniciar el estudio formal está en el uso y significado de las letras. Esto lleva a pensar que las dificultades del álgebra se deben a la naturaleza abstracta de sus elementos. Collis dice que esta dificultad no

sólo se da con las letras a un determinado nivel, sino que está muy relacionada con el tamaño de los números en otros niveles. Cree que el pensamiento concreto permanece mientras está restringido a la experiencia concreta, y que se llega al pensamiento formal en el momento en el que se pueden manejar elementos abstractos y operaciones.

Metodología del taller

Como el sentido de la estructura de las actividades va encaminada a centrar el trabajo en los procesos de pensamiento, de creatividad, de elaboración de patrones, en lugar de repetir y adiestrar; la organización del taller debe brindar espacios en los que el trabajo personal, grupal y los concesos del colectivo permitan la construcción del conocimiento. En estos procesos el papel de los argumentos, y las habilidades en la socialización de las elaboraciones, en las cuales aparecen el uso de las representaciones y de diversos lenguajes, dotan de mayor significado el trabajo permitiendo que cada persona que lo aborde tenga la oportunidad de construir, pero con el apoyo de lo que llama Brosseau una microsociedad científica que se genera en alrededor de la propuesta de trabajo.

Se proponen cuatro actividades en los que el objetivo principal es la identificación de patrones de regularidad desde la observación geométrica y concluir con el tránsito al lenguaje simbólico con la siguiente estructura:

Fase personal: De acuerdo a las indicaciones de la actividad esta fase permite el primer acercamiento con el problema, es un momento en el que se pueden hacer apreciaciones propias e identificar desde lo geométrico regularidades, se espera que acá se establezcan propuesta de solución al problema planteado y que se formulen para luego someterlas a procesos de validación.

- Rol de Tallerista: Dinamizar el taller, aclarar términos y orientar indicaciones, con el fin de incentivar el trabajo hecho por los grupos y evitar la deserción en las estrategias de solución propuestas.

- Rol del Participante: Abordar la actividad sugerida, interpretar las indicaciones y proponer una solución.

Fase grupal: Se organizan pequeños grupos en donde el objetivo es comparar las elaboraciones personales y llegar a acuerdos con el fin de dar una propuesta de solución y estructurarla de una forma clara para socializarla con el grupo en general, en esta fase es importante la discusión y la capacidad para recoger las elaboraciones de los demás y llegar a conjeturas de forma grupal, se fortalece el trabajo en colectivo y al hacerse con grupos pequeños permite una participación más directa. El aspecto principal que se trabaja en esta fase es la comunicación.

- Rol de Tallerista: Organizar los pequeños grupos de trabajo, la cantidad de asistentes que se considera pertinente es de 3 o 4 personas. Orientar los pequeños grupos e indicarles que deben preparar una propuesta de solución para ser socializada de forma general, esta debe ser descrita de la forma como se generó y dar argumentos del por qué satisface el problema.

- Rol del participante: Compartir la elaboración personal y analizar las de los compañeros del grupo de trabajo, con el fin de construir de forma grupal una sola. Debe haber una posición muy crítica y habilidad para considerar lo importante con el fin de llegar a conjeturas de forma colectiva.

Fase de socialización: Este espacio permite poner en práctica la habilidad para expresarse ante el grupo en general con una propuesta de solución que será sometida a un proceso de validación, la forma en que se organiza a los participantes debe suscitar momentos de discusión en donde el principal protagonista es el argumento, ya que es este el que dará razones para que de forma colectiva se valide o no.

- Rol de Tallerista: Moderar las exposiciones de los grupos de tal forma que existan espacios para la socialización de las soluciones, para formular preguntas que tengan la intención de cuestionar la capacidad argumentativa de los expositores, para generar posición crítica ante las exposiciones, para mantener la actitud del grupo y buscar estrategias para que los participantes ganen reconocimiento, y se trabajen sobre las inseguridades y temores propiciando orgullos y protagonismo.

- Rol del participante: Se reconocen dos momentos distintos, el primero de ellos como parte del grupo que se conformó para socializar la propuesta de solución que se concertó y el segundo como auditorio de los demás grupos expositores. En este último se debe adoptar una posición crítica ante el trabajo de los demás con el objetivo de validar lo que se expone, es necesario tener en cuenta que pueden darse múltiples formas de solucionar los problemas propuestos.

Fase de formalización: Luego de observar las propuestas de solución del grupo en general, haberlas cuestionado y validado o no, se ofrece un momento para formalizar , haciendo uso de un lenguaje más estricto que permita generalizar, para este proceso no es necesario determinar de nuevo un orden en las exposiciones simplemente orientados por el Tallerista se debe hacer reestructuración de lo expuesto en la fase de socialización teniendo en cuenta los cuestionamientos y los argumentos que se dieron y construir una nueva propuesta de solución más formal.

- Rol de Tallerista: Disponer el espacio y a los participantes con el fin de organizar lo que se propuso para enriquecer la propuesta de solución de cada grupo, en el caso en que la

propuesta no satisfaga el problema, orientarlos para hacer una reelaboración pasando de nuevo por cada fase, se deben hacer constantes intervenciones para motivar y no desistir del problema.

- Rol del Participante: Construir de forma grupal una propuesta de solución que puede ser enriquecida por lo expuesto por otros grupos de trabajo, o en caso de no poder hacer esa adaptación proponer una nueva. Se debe hacer uso de un lenguaje más formal y de llegar a procesos de generalización que por su estructura puedan ser validados ante el grupo en general.

Fase de retroalimentación: En caso de encontrar propuestas de solución que no satisfagan el problema, estas darán herramientas importantes para considerar el interpretar el problema diferente y de reestructurar parcial o totalmente las soluciones. Esta fase permite organizar la actividad en forma de bucle en donde se identifican aspectos importantes a la hora de enfrentar un problema, como la dinámica de la clase, el papel del error, la importancia del conflicto, la convicción del protagonismo. Al final del trabajo es importante reflexionar sobre procesos que se construyen durante la actividad que son cíclicos y consideramos claves en la clase de matemática como la creatividad, el razonamiento lógico, el montaje matemático y la operatoria.

Actividades

Actividad 1. Construcción del triangulo de Sierpinsky.

Se pide al público que dibujen la figura del "tetris" que tiene forma de L, usando la cuadrícula del cuaderno y tratando de usar de un cuadro a la vez, así:

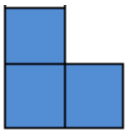


Figura 1.

Para la construcción de la figura 2 se usa la forma de la primera pero esta vez en cada cuadrito, se construirá la figura 1 en su totalidad. Es decir repetir la figura 1 conservando la forma de "L" Así:

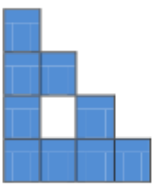
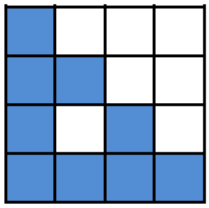


Figura 2.

Nuevamente para la siguiente figura se repetirá 3 veces la figura 2 conservando la forma de "L".

Se pedirá que continúen dibujando hasta la figura No. 6, posteriormente a esto que encierren cada figura en un cuadro grande con la respectiva cuadricula en el interior, así:



Ahora se hará un conteo de la cantidad de cuadros pintados, no pintados y la totalidad de estos y registrar la información es una tabla como la siguiente.

FIGURA	CUADROS SIN PINTAR	CUADROS PINTADOS	TOTAL DE CUADROS.
1	1	3	4
2	7	9	16
3	37	27	64
4	175	81	256
n	$4^n - 3^n$	3^n	4^n

El ideal es continuar la tabla sin hacer uso del dibujo, tan solo basándose en las regularidades del mismo, de manera que tan solo para completar el total de cuadros sea necesario saber el dato anterior y multiplicarlo por 4, de manera análoga para los cuadros pintados se requiere el valor del anterior y multiplicarlo por tres, y para los cuadros sin pintar es necesario conocer el valor del total de cuadros y los cuadros pintados y la diferencia entre estos será el valor de los cuadros sin pintar. A este modelo verbal deberán llegar pues la socialización de estas regularidades será dirigida por el maestro. La pregunta ahora será construir un modelo para completar la tabla si se pregunta por los datos de la figura No 100, obviamente deberán buscar la manera de acortar camino pues sería muy tedioso hacer todos los 99 datos anteriores para encontrar el número 100. De esta forma no es gratuito que se encuentre esa letra allí, pues estará representando cualquier término que se les pregunte, es decir se hará uso de la variable como número generalizado y tendrá sentido en el contexto presentado.

Propósitos:

- Construcción de tablas para registrar información
- Encontrar regularidades a través de la coincidencia de los datos de la tabla.
- Iniciar el uso de la variable.
- Construir modelos usando la letra como numero generalizado.

Actividad 2. "Cubos y caras pintadas"

Se entrega a cada participante 27 cubitos unidad de igual tamaño para que formen con ellos, un cubo grande. Deben ahora pintar el cubo grande que han creado por todas sus caras. Contaran cuantos de los cubitos unidad quedaron con solo una cara pintada, cuantos con 2 caras pintadas, cuantos con 3 y así sucesivamente.

Una vez entendido el ejercicio, será más fácil construir cubos más grandes y más pequeños que el anterior, por lo que ahora deberán construir uno con solo 8 cubos unidad y repetir nuevamente el ejercicio de pintar el cubo grande y verificar la cantidad de cubos unidad que han quedado pintados en una, dos, tres… caras.

Posteriormente dibujaran lo que observan y registraran la información en una tabla. La siguiente es solo una propuesta,

Figura	Cubos con 0 cara pintada	Cubos con 1 caras pintadas	Cubos con 2 caras pintadas	Cubos con 3 caras pintadas	Cubos con 4 caras pintada	Cubos con 5 caras pintadas	Cubos con 6 caras pintas	Total de cubos unidad
1	0	0	0	0	0	0	6	1
2	0	0	0	8	0	0	0	8
3	1	6	12	8	0	0	0	27
4	8	24	24	8	0	0	0	64
5								125
6								
7								

La representación concreta solo se realizara con 8 y 27 cubitos unidad, los demás podrán dibujarlas y hacer desde allí el conteo para registrar la información en la tabla.

Desde la tabla es posible que se identifiquen regularidades y que puedan continuar el proceso sin necesidad de dibujar o construir la figura, se les pedirá ahora que completen la información hasta la figura No. 7. Si es posible solo con las regularidades de la tabla.

Por último construirán un modelo que describa:
El total de cubitos unidad, con 0, 1, 2, caras pintadas,
Para ello solo podrán usar el número de la figura, que es la misma que da cuenta de la cantidad de cubos de lado que requiere el cubo grande, sobre este aspecto son claves las inferencias y la elaboración de correlaciones para llegar a la respuesta.

Propósitos

Esta actividad pretende complementar y dar paso a nuevas actividades. Particularmente serán evidentes aquí aspectos como:

- Tránsito de representaciones, grafica, tabular, simbólica
- Paso de lo concreto a lo abstracto
- Construcción de modelos algebraicos de la situación.

Actividad 3. "el salto de la rana"

Este juego se realiza con fichas de dos colores. Se coloca igual número de fichas, a cada lado de un espacio libre. El objetivo es hallar la menor cantidad de movimientos que permita intercambiar las posiciones de las fichas.
Las reglas del juego son:

- Mover una sola ficha al espacio inmediatamente vacío (paso)

- Saltar sobre solo una ficha a un espacio vacío situado inmediatamente después de esta.

Aquí se debe encontrar el menor número de movimientos

Una característica de este juego es la oportunidad de manipular el material, es decir trabajar en concreto. En un primer momento todos deben iniciar jugando con tres fichas a cada lado, posterior a esto cuando alguno determine la menor cantidad de movimientos y *el grupo valide esta solución como la mejor opción,* se continuara con otra cantidad de fichas a cada lado; por su parte el maestro debe ir registrando los datos obtenidos. Es decir para este caso la recolección de datos es un trabajo en colectivo, general para todo el grupo, todos estarán en búsqueda del mínimo de movimientos para cada caso.

Fichas de cada color	Mínimo de movimientos
1	3
2	8
3	15
4	24
n	

NOTA: Este juego se ha usado en varias ocasiones en los salones de clase de la Escuela Pedagógica Experimental y fue herramienta de una investigación cuyos resultados arrojaron más de 23 soluciones distintas que dan cuenta de los procesos diversos que hacen los estudiantes producto de las invenciones y descubrimientos particulares y a veces personales. Allí se refleja la diversidad del pensamiento. 1 Por esto último es posible que los chicos creen diferentes expresiones a la situación, para responder a la pregunta ¿cuántos movimientos se obtendrán de un número n de fichas a cada lado?

Actividad 4 "Números Pitagóricos".

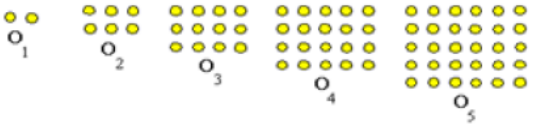
Estudiar los números los pitagóricos implica buscar la manera como representaron por medio de puntos y según la forma geométrica obtenida al distribuirlos tendrán una determinada propiedad. Por ello para este taller como ya hemos mencionado la importancia del hallazgo de patrones geométricos en la construcción de la letra como variable, tomamos este hecho importante en la historia de las matemáticas. Construiremos entonces un modelo para los números:

1 Tomado del texto "La multiplicidad de los patrones y la inagotabilidad del pensamiento". Proyecto de investigación El modelaje matemático en estudiantes de educación básica: la validación de los modelos y

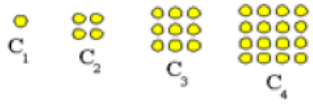
los procesos de matematización de la experiencia, estudio a partir de dos familias de problemas- Noviembre 2003

- Triangulares.

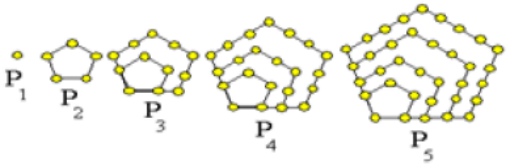
- Rectangulares



- Cuadrangulares



- pentagonales



Una vez graficado cada momento, la dinámica es similar a la de las anteriores actividades, es decir, registrar la cantidad de puntos en relación a cada figura, para poder de allí encontrar el patrón y construir el modelo para cada clase de números.

Referencias bibliográficas

¿Como enseñar ciencieas? Principales tendencias y propuestas [Sección del libro] / aut. Aida Campanario Juan Miguel y Moya // Enseñanza de las Ciencias / aut. libro Ciencias Grupo de investigacion en Aprendizaje de las. - Madrid. España : [s.n.], 1999.

Ideas y actividades para la enseñanza del álgebra. Cap. II y III [Libro] / aut. AZARQUIEL. - Madrid : Sintesis, 1993.

La inagotabilidad del pensamiento y la multiplicidad de patrones [Informe] / aut. Experiemental Escuela Pedagogica. - Bogota. colombia : [s.n.], 2003.

La transicion Aritmetica - Álgebra [Libro] / aut. PRETEXTO. UDFJC. COLCIENCIAS. - Bogotá: [s.n.], 2002.

Planteamientos en Educación. Vol 2 [Libro] / aut. Escuela Pedagógica Experimental. - Bogota. Colombia : [s.n.], 2000.

Una metodologia activa para la solucion de problemas [Libro] / aut. Miro Julia y Margaret. - 1998.